Duke University Libraries
D02057107M

НАРОДНАЯ ЭНЦИКЛОПЕДІЯ

DUKE
UNIVERSITY

LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2020 with funding from
Duke University Libraries

https://archive.org/details/narodnaiaentsikl111unse

ХАРЬКОВСКОЕ ОБЩЕСТВО
РАСПРОСТРАНЕНІЯ ВЪ НАРОДѢ ГРАМОТНОСТИ.

НАРОДНАЯ ЭНЦИКЛОПЕДІЯ

НАУЧНЫХЪ И ПРИКЛАДНЫХЪ ЗНАНІЙ.

Томъ I.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЯ НАУКИ.

1-й полутомъ.

Типографія Т-ва И. Д. Сытина, Пятницкая ул., свой домъ.
МОСКВА.—1912.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ

(КРУГЪ ЗНАНІЙ).

Томъ I.

1-й полутомъ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ НАУКИ.

ПРЕДМЕТЫ:

МАТЕМАТИКА.
ЗЕМЛЕМѢРІЕ.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
АСТРОНОМІЯ.

Въ составленіи статей принимали участіе: пр.-доц. С. Н. БЕРНШТЕЙНЪ, И. Н. БЛЮМШТЕЙНЪ, Н. П. БѢЛЯЕВЪ, проф. Б. П. ВЕЙНБЕРГЪ, Н. А. ВЕРЕЩАГИНЪ, Г. А. ГРУЗИНЦЕВЪ, В. Х. ДАВАТЦЪ, пр.-доц. Н. И. ЕВДОКИМОВЪ, Б. И. КУДРЕВИЧЪ, проф. А. П. ПШЕБОРСКІЙ и проф. Н. И. САЛТЫКОВЪ.

ОБЩЕЕ ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ НАРОДНОЙ ЭНЦИКЛОПЕДІИ.

037
N232
t.1
ch.1

Къ читателю.

«Ученье—свѣтъ, а неученье—тьма!»
«Вѣкъ живи,—вѣкъ учись!»

Въ настоящее время, въ переживаемую нами историческую переходную эпоху, для всѣхъ уже стало очевиднымъ, что умственные запросы народа и пробуждающееся гражданское его самосознаніе начинаютъ предъявлять усиленныя требованія на опредѣленныя знанія изъ области права, экономики, государствовѣдѣнія, исторіи отечества и т. п. Явилась усиленная потребность хотя бы въ той низшей степени образованности, которая необходима для каждаго гражданина, желающаго слѣдить, хотя бы сколько-нибудь, съ пониманіемъ за текущею жизнью, общественной и государственной, и по возможности толково разбираться въ книжномъ и газетномъ чтеніи, а также во всемъ, что его окружаетъ, что происходитъ вокругъ него. Чтобы сдѣлать жизнь болѣе сознательною, недостаточно однихъ приказовъ, мнѣній, совѣтовъ, получаемыхъ отъ другихъ лицъ; необходимо еще и самому имѣть опредѣленныя *познанія*, которыхъ начальная школа у насъ не даетъ. Народъ это понялъ, а потому и стремится уже не къ простой грамотности, но къ дальнѣйшему *образованію*, въ которомъ онъ уже сознательно видитъ основу для своихъ стремленій къ экономическому и гражданскому обезпеченію, къ развитію правосознанія и самодѣятельности, къ поднятію производительности труда, къ пользованію благами культуры и т. д.

Если стародавнее міросозерцаніе народной массы покоилось по преимуществу на всякихъ суевѣріяхъ и предразсудкахъ, на ея невѣжествѣ и легковѣріи, то теперь умственное пробужденіе требуетъ положительныхъ *научныхъ основъ* для обновляемаго міропониманія, требуетъ знанія внѣшней природы, знанія жизни общества и человѣка, его исторіи и т. д.

Вмѣсто инстинктивныхъ, эмоціональныхъ (чувственныхъ) побужденій, столь характерныхъ для низшихъ ступеней человѣческаго развитія, назрѣваетъ критическая разсудочная оцѣнка, которая находитъ свою опору не въ чувствованіяхъ и настроеніяхъ, не въ

субъективныхъ (личныхъ) переживаніяхъ, а въ истинномъ знаніи, въ научныхъ данныхъ, обладающихъ силою прямой убѣдительности и объективной доказательности. Образованность, безусловно необходимая для общаго развитія культуры и гражданственности, для правильнаго разумѣнія своихъ правъ и обязанностей, должна быть обоснована на почвѣ объективной (безпристрастной) науки, которая должна содѣйствовать господству правды и труда, просвѣщеннаго знаніемъ (см. ниже).

Эта образовательная, умственная сила является единственной основой для преуспѣянія и благосостоянія народа и всего государства во всѣхъ направленіяхъ—и въ экономическомъ, и въ политическомъ, и въ соціальномъ (общественномъ) и т. д. Какъ непрочно огромное, съ виду красивое зданіе, построенное изъ плохого кирпича, такъ ненадежно и общество, да и цѣлое государство, состоящее изъ невѣжественныхъ гражданъ; въ немъ не можетъ быть ни истинной силы, ни истиннаго благоденствія.

Правильное, справедливое распредѣленіе просвѣтительныхъ благъ во всѣхъ слояхъ населенія представляетъ собою одну изъ существенныхъ соціальныхъ задачъ. Такая демократизація образованія, т.-е. распространеніе его въ широкихъ слояхъ населенія безъ всякихъ исключеній, во имя общекультурнаго прогресса всего народа, ради преуспѣянія и совершенствованія духовнаго и матеріальнаго, тѣмъ болѣе достижима и плодотворна, чѣмъ бо́льшею свободою пользуется просвѣтительная самодѣятельность общественныхъ силъ. Время монопольнаго пользованія научнымъ знаніемъ (какъ въ древности—«тайными искусствами») (см. томъ 8-й Энциклопедіи) среди только высшихъ состоятельныхъ классовъ населенія прошло уже безвозвратно; соціальная справедливость требуетъ доступности научнаго образованія для всѣхъ способныхъ его усвоить и примѣнить.

Но въ чемъ же заключается научное знаніе? Въ чемъ его смыслъ, каковы его цѣли? Какое имѣетъ значеніе научное образованіе для человѣка? Чѣмъ оно такъ цѣнно для него?

Попробуемъ отвѣтить на эти вопросы хотя бы вкратцѣ, въ общихъ лишь чертахъ.

Наука стремится познать дѣйствительность, все, что находится, происходитъ и совершается внѣ человѣка и внутри него самого, во внѣшней природѣ, въ другихъ живыхъ существахъ, въ тайникахъ его собственной души; наука изучаетъ то, что́ было и что есть теперь; выясняя закономѣрность явленій и въ движеніяхъ небесныхъ свѣтилъ, и въ жизни ничтожнаго насѣкомаго, и въ человѣческихъ побужденіяхъ, и въ историческихъ судьбахъ цѣлыхъ народовъ, выясняя во всемъ доступномъ намъ мірѣ строй-

ность и опредѣленный порядокъ, наука стремится ясно и точно опредѣлить законы всѣхъ реальныхъ (дѣйствительныхъ) явленій и на основаніи этого получаетъ возможность предвидѣть будущія событія и послѣдствія, какъ это, напримѣръ, дѣлаетъ астрономія, предсказывая безошибочно впередъ затменія солнца, луны и т. п.

Таковы широкія задачи научныхъ изысканій. Охватывая все, что доступно истинному человѣческому познаванію, наука прежде всего строго выясняетъ и выбираетъ тѣ *способы мышленія и изученія*, которые приводятъ по возможности къ безошибочнымъ заключеніямъ; ради этого она изучаетъ самого человѣка, его душу, его умъ, чтобы опредѣлить предѣлы и степень достовѣрности его познаванія. Всѣ недочеты и ошибки, происходящіе отъ личныхъ, субъективныхъ свойствъ человѣка, отъ его воображенія, настроенія, легковѣрія и т. п., должны быть строго исключаемы; иначе научное знаніе будетъ ненаучнымъ, оно утратило бы къ себѣ довѣріе. Наука признаетъ только такое знаніе, которое точно провѣрено; она допускаетъ только такіе выводы и заключенія, которые могутъ быть ясно доказаны; все то, что́ только чувствуется, смутно намъ представляется, принимается на вѣру, что̀ не можетъ быть строго логически и фактически обосновано и провѣрено, все это для науки не обладаетъ доказательностью, во всемъ этомъ нѣтъ силы убѣдительности, обязательной для всѣхъ (объективной доказательности), какъ это должно быть въ истинномъ научномъ знаніи.

Цѣль науки — отысканіе истины, постигаемой человѣческимъ разумомъ при строго-научномъ, безпристрастномъ изученіи всего, совершающагося въ реальномъ мірѣ, доступномъ нашему зрѣнію, слуху и т. д.

Что научное знаніе есть истинное благо для человѣка — въ этомъ никто не сомнѣвается, никто этого не отрицаетъ. Но цѣнность науки опредѣляется людьми различно, смотря по тому кто и что́ въ ней ищутъ, чего отъ нея требуютъ.

Одни почитаютъ науку постольку, поскольку образованіе вообще смягчаетъ грубые нравы, обычаи, повышаетъ культурное развитіе и приближаетъ къ идеаламъ, завѣтнымъ мечтамъ общечеловѣчности; другіе требуютъ обязательнаго претворенія науки въ практически полезныя свѣдѣнія и завоеванія въ области техники, медицины, статистики, экономики, метеорологіи и др., ради усиленія мощи человѣка въ борьбѣ съ внѣшней природой и съ житейскими невзгодами; третьи полагаютъ, что научное образованіе наиболѣе цѣнно лишь тогда, когда оно приводитъ къ общему цѣлостному міросозерцанію, когда наука даетъ основы для един-

ства міропониманія, охватывающаго всѣ явленія жизни и природы, включая сюда и самого человѣка; путь истинной науки, по этому мнѣнію, обязательно ведетъ къ такимъ широкимъ обобщеніямъ; узкая спеціализація знаній вызываетъ, напротивъ, раздробленіе науки, суженіе умственнаго горизонта, а тѣмъ самымъ — и умаленіе ея. Есть еще одно воззрѣніе на науку, которое, признавая высокую цѣнность накопленія научныхъ знаній, какъ познанія міра, даже помимо какого-либо практическаго примѣненія, въ то же время предъявляетъ требованіе, чтобы научное образованіе пробуждало пытливость человѣческаго ума и его творческую дѣятельность, въ смыслѣ живой, самостоятельной работы мысли; а это, въ свою очередь, требуетъ извѣстнаго чувства свободы и нестѣсняемости.

Къ сказанному необходимо еще прибавить, что стремленіе къ умственному прогрессу, т.-е. къ развитію и совершенствованію, возможному только на почвѣ научныхъ знаній, мы въ правѣ разсматривать какъ проявленіе естественной (физіологической) потребности нашего мозга, для котораго вообще мыслительная работа (интеллекта) въ такой же мѣрѣ является обязательно необходимой, какъ движенія—для нашихъ мускуловъ, какъ свѣтъ—для глаза, какъ звукъ—для уха.

Во всѣхъ приведенныхъ мнѣніяхъ заключается много вѣрнаго, справедливаго; со всѣми намъ приходится въ извѣстной мѣрѣ соглашаться. Но нашъ обзоръ былъ бы далеко не полный, если бы мы здѣсь не остановились еще на громадномъ *воспитательномъ значеніи* истиннаго научнаго образованія для человѣческаго ума. Уже изъ вышеприведеннаго становится яснымъ, что наука научаетъ человѣка правильно думать, размышлять; она учитъ его правдивости и безпристрастію, или объективности, строгой правильности и послѣдовательности мысли; она требуетъ провѣрки (критики) фактовъ и выводовъ, чтобы обезпечить ихъ правильность и правдивость; она предохраняетъ отъ поспѣшности заключеній, отъ легковѣрія и легкомыслія. Такіе строгіе способы изслѣдованія и мышленія и составляютъ то, что́ называютъ вообще *научнымъ методомъ* (способомъ), который уже самъ по себѣ объединяетъ всю науку во всѣхъ областяхъ положительнаго знанія. Такое совершенствованіе умственныхъ навыковъ человѣка, такая *дисциплина его ума*, представляетъ собою величайшую заслугу науки, въ высокой степени плодотворную для всѣхъ сторонъ жизни человѣка, личной и общественной.

Въ то же время нужно помнить, что истинное просвѣщеніе, проникающее во весь душевный строй человѣка, должно быть разсматриваемо какъ интеллектуальная (умственная — въ широкомъ

смыслѣ слова) основа для идеи справедливости и человѣчности (гуманности), ибо научно просвѣщенный разумъ, въ своихъ сужденіяхъ и побужденіяхъ, сумѣетъ освободиться отъ вліянія всякихъ настроеній, чувствъ и переживаній, личныхъ и соціальныхъ, сумѣетъ освободиться отъ вліянія воображенія, слѣпой страсти и увлеченія; становясь выше всѣхъ такихъ временныхъ, случайныхъ вліяній, человѣческій разумъ научнымъ путемъ приходитъ къ признанію правды и справедливости, какъ идеальныхъ основъ человѣческаго общежитія, на пути къ его истинному благоденствію.

Если къ этому прибавимъ, что научное образованіе пріучаетъ къ правдивому и безпристрастному анализу (разбору) фактовъ и сужденій, что оно даетъ сознаніе устойчивости и убѣдительности своихъ заключеній, что истинная положительная наука придаетъ своимъ выводамъ доказательную силу, равно обязательную для всѣхъ, иначе говоря, — обязательно всѣми признаваемую, то станетъ понятнымъ, какое громадное *моральное* значеніе (нравственное — въ широкомъ смыслѣ слова) мы должны признать за научнымъ просвѣщеніемъ, *весь смыслъ котораго сводится къ стремленію и любви къ истинѣ.* Въ безкорыстности и правдивости стремленій къ знанію и выражается величайшее воспитательное вліяніе науки вообще.

Не меньшее *морально-воспитательное* вліяніе оказываетъ научное образованіе на человѣка еще тѣмъ, что оно пріучаетъ его умъ къ *закону связности, стройности и цѣлесообразнаго, разумнаго порядка,* господствующихъ во всѣхъ явленіяхъ *живой природы,* включая сюда и *всю жизнь самого человѣка.* Его разумъ привыкаетъ поэтому отыскивать во всемъ строгую, закономѣрную послѣдовательность явленій, взаимную причинную связь, опредѣленное взаимоотношеніе внѣшнихъ и внутреннихъ условій и т. п. Ничего нельзя ни понять, ни изучать въ отдѣльности, безъ связи съ иными вліяніями, событіями, условіями; просвѣщенный разумъ сумѣетъ разобраться во всемъ сложномъ, отличить существенное отъ малозначащаго, главное — отъ побочнаго, сумѣетъ отыскать и причины событій; и въ сложномъ, запутанномъ дѣлѣ, напр., житейскомъ—общественномъ, научный методъ сумѣетъ обнаружить закономѣрныя отношенія, откроетъ извѣстный порядокъ, опредѣленную послѣдовательность.

Наконецъ научное образованіе даетъ возможность обнаружить тѣ *таланты и дарованія,* которые, какъ *скрытыя національныя богатства,* таятся безплодно въ народной массѣ и которые безъ умственнаго образовательнаго толчка, сами по себѣ, не пробуждаются и глохнутъ. Нужно ли доказывать, что эти духовныя силы,

богатства неизмѣримо выше и дороже, чѣмъ тѣ матеріальныя блага и богатства, которыя народы такъ жадно и съ такими жертвами вырываютъ изъ нѣдръ земли и изъ рукъ другъ друга?!. Нужно ли доказывать, что умственное оскудѣніе, какъ роковое слѣдствіе невѣжества, есть великое зло, воистину—народное бѣдствіе, ничѣмъ не устранимое, кромѣ просвѣщенія?!.

Одна же простая грамотность, которой обучаютъ въ нашихъ начальныхъ училищахъ, конечно, недостаточна, чтобы пробудить умственныя дарованія и обнаружить ихъ. Кто не знаетъ, что иногда люди, очень способные, даровитые, считались въ начальной школѣ мало способными, что ихъ недюжинные таланты обнаруживались лишь впослѣдствіи, при дальнѣйшемъ образованіи, послѣ простой грамотности!..

Если принять въ соображеніе все вышесказанное, то станетъ понятнымъ, какая великая истина заключается въ словахъ: «**знаніе есть сила!**» Станетъ понятнымъ, почему всегда и вездѣ, во всѣхъ странахъ и у всѣхъ народовъ, стремились и стремятся настойчиво именно къ *научному образованію*, почему разумные люди такъ высоко почитаютъ науку, почему въ культурныхъ странахъ такъ высоко цѣнятъ образованныхъ, просвѣщенныхъ людей! Всѣ понимаютъ, что при теперешнихъ условіяхъ жизни одного *природнаго ума* недостаточно; необходимо еще *образованіе!* Только благодаря просвѣщенію обыватель познаетъ свой нравственный долгъ, какъ гражданина, передъ обществомъ и всѣмъ государствомъ и сознательно его исполняетъ.

Но было бы ошибкою полагать, что достаточно выучить наизусть учебники, чтобы сдѣлаться истинно *образованнымъ человѣкомъ!* Можно знать многое, можно накопить въ своей памяти много голыхъ фактовъ, правилъ, знаній, и все же это одно не даетъ истиннаго научнаго образованія! Много ли пользы принесетъ человѣку вызубриваніе учебниковъ, если онъ не научился вмѣстѣ съ тѣмъ правильно, безпристрастно разсуждать, толково и серьезно обдумывать, критически, но справедливо относиться къ себѣ и къ другимъ?.. Развѣ можно назвать просвѣщеннымъ, образованнымъ человѣкомъ того, который при всѣхъ своихъ знаніяхъ не отрѣшился отъ глупыхъ предразсудковъ и суевѣрій, который слушается голоса не разума, а своихъ страстей и влеченій, который слѣпо подчиняется случайнымъ вліяніямъ и побужденіямъ и не желаетъ критически провѣрить самого себя? Истинное образованіе расширяетъ умственный горизонтъ человѣка, возбуждаетъ его пытливость и любознательность, заставляетъ его и *въ повседневной жизни слѣдовать строгимъ правиламъ просвѣщеннаго ума.* Теперь становится понятнымъ,

что человѣкъ, приступившій уже въ зрѣломъ возрастѣ къ самообразованію, тѣмъ не менѣе, можетъ сдѣлаться просвѣщеннымъ, умственно развитымъ, образованнымъ человѣкомъ, несмотря на то, что онъ, можетъ-быть, уже не успѣетъ выучить учебники, какъ какой-нибудь ученикъ помоложе. И все же онъ пріобщится научнаго просвѣщенія и умственнаго развитія, если будетъ относиться къ изучаемымъ книгамъ серьезно, вдумчиво, если будетъ старательно обдумывать читаемое, если усвоитъ тѣ умственные навыки и умѣнья, о которыхъ уже такъ много было сказано выше, если, наконецъ, онъ освободится отъ всякихъ вздорныхъ предразсудковъ и суевѣрій, которые не выдерживаютъ никакой критики и которые такъ живучи въ народной массѣ, благодаря лишь ея невѣжеству и легковѣрію.

Изъ всего вышесказаннаго становится понятнымъ также и то, что истинная образованность или просвѣщеніе, облагораживаетъ человѣка, удерживаетъ отъ проявленій дурныхъ инстинктовъ, пріучаетъ къ справедливости и порядку, заставляетъ сознательно подчиняться праву и закону, въ которыхъ должна отражаться „**правда жизни**“, заставляетъ уважать личное достоинство въ каждомъ человѣкѣ, и всѣмъ этимъ улучшаетъ бытъ, поведеніе человѣка и, стало-быть, благотворно отражается на нравахъ, обычаяхъ, на взаимныхъ отношеніяхъ людей между собою.

Благотворное вліяніе научнаго знанія упрочивается и отражается въ жизни человѣка лишь медленно и постепенно. Это легко объясняется сложностью чисто *умственной* работы, и трудностью воздѣйствія научнаго знанія черезъ *интеллектъ* человѣка на его убѣжденія, трудъ и поведеніе. Напротивъ, всякія внѣшнія вліянія, направленныя на тѣ или иныя его *чувствованія*, на его фантазію и настроенія, производятъ быстрыя, бурныя дѣйствія, легко и сильно видоизмѣняютъ весь обликъ человѣка, все его поведеніе, весь душевный его укладъ; такія вліянія легко и быстро вызываютъ состояніе угнетенія и пассивной подчиненности, воодушевленія и энтузіазма и т. п. Но само собою понятно, что такія воздѣйствія обыкновенно быстротечны, скоропреходящи; они могутъ оставить глубокій слѣдъ въ душѣ—именно въ настроеніи, въ чувственной сферѣ, а не въ интеллектѣ. Напротивъ, по мѣрѣ того, какъ въ жизни человѣка устанавливается все болѣе и болѣе *господство разума*, вліяніе знанія и значеніе его для всей дѣятельности человѣка, для всего внутренняго его уклада, конечно, становятся первенствующими, несмотря на сравнительно малую скорость проникновенія научныхъ благъ въ сознаніе народа, въ его трудъ и поведеніе. Если, говоря вообще, культурное вліяніе книжнаго чтенія осуществляется

весьма медленно и постепенно, то при извѣстномъ довѣріи къ книгѣ оно тѣмъ болѣе оказывается прочнымъ и устойчивымъ. Вѣдь такая книга замѣняетъ собою живое слово, живой примѣръ, которые такъ легко вызываютъ подражаніе!

Было бы, однако, большою ошибкой полагать, что народъ ищетъ только прикладныхъ утилитарныхъ (практически-полезныхъ) знаній, необходимыхъ для разрѣшенія тѣхъ или иныхъ житейскихъ или трудовыхъ задачъ.

Для лицъ, близко стоящихъ къ дѣлу народнаго образованія, давно уже стало несомнѣнной истиной, что народъ стремится ко *всестороннему знанію*, что въ немъ *пробудились* **общіе умственные запросы**, что въ образованіи онъ цѣнитъ не только значеніе практически-полезнаго свѣдѣнія, но и значеніе могучаго орудія для пріобрѣтенія и развитія вообще *умственныхъ навыковъ*. Эти послѣдніе гораздо важнѣе, чѣмъ спеціальныя свѣдѣнія, приспособленныя для практическихъ задачъ жизни. Народъ все болѣе и болѣе убѣждается въ томъ, что таковымъ орудіемъ умственнаго развитія можетъ служить не простая грамотность, но извѣстная степень *образованности*, безъ которой разнаго рода пережитки и заблужденія, суевѣрія и предразсудки, косность мысли и невѣжество будутъ попрежнему заглушать и искажать всякое живое стремленіе къ исканію правды и истины, къ возвышенію достоинства человѣка и цѣнности его труда, къ расширенію умственнаго кругозора. Можно ли требовать отъ человѣка темнаго, невѣжественнаго, чтобы онъ правильно разумѣлъ свои права и обязанности гражданина, чтобы сознательно къ нимъ относился? А вѣдь безъ этого пониманія такой гражданинъ становится въ концѣ-концовъ лишь въ тягость и обществу, и всему государству! Развитіе любознательности, стремленіе къ сознательности и къ самодѣятельности въ жизни и трудѣ возбуждаютъ живой интересъ къ знанію вообще и къ улучшенію школьнаго дѣла въ частности. Къ этому надо еще прибавить, что чтеніе серьезныхъ книгъ пріучаетъ слушаться голоса разсудка, его логическихъ доводовъ, развиваетъ вдумчивое отношеніе къ себѣ и ко всему окружающему и тѣмъ *дисциплинируетъ развивающійся интеллектъ*.

Человѣкъ, не только взрослый, но даже еще въ дѣтскомъ возрастѣ, всегда стремится «объяснить» себѣ все то, что онъ видитъ, слышитъ, чувствуетъ; онъ ищетъ «объясненія», проситъ его, удовлетворяя этимъ *естественной потребности*, которая проявляется то инстинктивно, то сознательно. Поиски за причинами явленій и событій, за ихъ объясненіемъ, есть прямое естественное выраженіе пробуждающейся работы мозга. Если умъ не удовлетворенъ, если недостаетъ положительныхъ знаній, то на этой почвѣ

пытливости легко могутъ возобладать невѣжественное воображеніе и суевѣріе (мистицизмъ), которые легко возбуждаютъ сильныя чувствованія и даже душевныя потрясенія и тѣмъ столь вредно могутъ вліять на весь душевный укладъ человѣка, а отсюда на его трудъ, на всю его жизнь. Противъ столь пагубныхъ вліяній вздорнаго мистицизма можетъ успѣшно бороться только разумъ, вооруженный научнымъ знаніемъ, стало-быть, только *образованіе!* Простая же грамотность не въ силахъ помочь въ этомъ человѣку...

На ряду съ такими общими интеллектуальными запросами, несомнѣнно, растетъ въ народной массѣ потребность и въ практически-полезныхъ научныхъ и прикладныхъ знаніяхъ по вопросамъ сельскаго хозяйства, техники, естествознанія и др. Въ этомъ отношеніи книжный рынокъ предлагаетъ довольно много разныхъ общедоступныхъ изданій для народа; но нужно сознаться, что практическая ихъ польза сильно тормазится слабымъ ихъ проникновеніемъ въ народную массу, особенно въ деревнѣ. Всѣ стремленія къ подъему производительности народнаго труда, въ частности — земледѣльческаго, останутся безплодными до тѣхъ поръ, пока *искренно* не пожелаютъ поднять общій уровень народнаго просвѣщенія, пока не перейдутъ отъ словъ къ дѣлу... Боязнь образовательныхъ стремленій и просвѣтительныхъ начинаній въ народной массѣ, представляющая собою воистину опаснѣйшую болѣзненную форму «свѣто-боязни», всегда и вездѣ оказывается гибельною въ соціальномъ и государственномъ отношеніяхъ; она дѣлаетъ лицемѣрными, неискренними всѣ заботы объ умственномъ развитіи народа, о народномъ благѣ, объ улучшеніи его экономическаго и гражданскаго состоянія и т. д., поскольку эта «свѣто-боязнь» преобладаетъ надъ всѣми иными соображеніями и побужденіями «народно-просвѣтительной политики».

Слабое проникновеніе хорошей, полезной книжки въ народную среду, въ частности — въ деревню, представляетъ собою одно изъ самыхъ печальныхъ явленій нашей жизни. Указанная «свѣто-боязнь», боязнь широкаго народнаго «просвѣщенія», оказывается сильнымъ тормазомъ, противъ котораго безуспѣшно борются и мірскіе сходы, и частная общественная иниціатива, и удешевленіе книгъ... А между тѣмъ сознательное, серьезное книжное чтеніе является однимъ изъ важнѣйшихъ способовъ, такъ сказать, *соціальнаго накопленія знаній и свѣдѣній* въ народной массѣ, которыя содѣйствуютъ выработкѣ мнѣній, убѣжденій и вообще выработкѣ *общественнаго сознанія*. Вотъ здѣсь-то и важна помощь научнаго знанія, которое развиваетъ пытливость ума и

вмѣстѣ съ тѣмъ борется противъ наивнаго легковѣрія и суемыслія, противъ всякихъ вліяній на чувства и инстинкты, на фантазію и настроеніе. *Накопленіе въ народной массѣ знаній и ея просвѣщеніе представляютъ собою истинныя народныя богатство и силу, неоцѣнимыя по своей благотворности для всѣхъ сторонъ народной и государственной жизни.*

Вышеуказанные просвѣтительные запросы широкихъ слоевъ населенія должны быть удовлетворяемы возможно полнѣе, а не отрывочно и случайно, напр., путемъ распространенія дешевыхъ брошюрокъ и книжекъ на отдѣльные темы и вопросы. Такой способъ примѣнимъ тамъ, гдѣ уже есть достаточный уровень общаго образованія и умственнаго развитія. Въ противномъ случаѣ необходимо сначала дополнить наше начальное школьное обученіе путемъ общаго ознакомленія съ широкимъ горизонтомъ научнаго образованія, съ основными его задачами и успѣхами, по главнѣйшимъ вопросамъ научнаго и прикладного знанія. При этомъ должна быть дана возможность достаточно полнаго и систематическаго ознакомленія съ научными предметами безъ помощи учителя, *путемъ лишь самообразованія*. Конечно, здѣсь идетъ рѣчь не о той цѣльности и полнотѣ изложенія, которыя требуются отъ учебниковъ, предназначенныхъ для *школьнаго изученія* отдѣльныхъ «предметовъ». Было бы вполнѣ достаточно, если бы умственные запросы удовлетворялись на первое время хотя бы отдѣльными научными очерками по каждой наукѣ, достаточно характеризующими и основныя ея проблемы (задачи, вопросы) и главнѣйшіе ея успѣхи.

Такое общее расширеніе образовательнаго горизонта (кругозора) дастъ возможность вдумчивому читателю лучше оріентироваться, разобраться, и въ области примѣненія науки къ запросамъ и задачамъ *практической* жизни. Впрочемъ, не слѣдуетъ при этомъ забывать, что хотя *хорошая книга есть «лучшій другъ человѣка»*, хотя она умѣетъ обучать, пояснять, убѣждать, но все же живого слова и взаимообщенія людей замѣнить вполнѣ она не въ состояніи. Жизнь съ ея политическими, просвѣтительными, соціальными воздѣйствіями, съ ея толчками и волненіями, съ увлеченіями и отрезвленіями,—такая жизнь слишкомъ сложна и многообразна, слишкомъ поучительна, чтобы ея уроки, ея «наглядное обученіе» могли бы быть замѣнены книжнымъ самообразованіемъ по практически-житейскимъ вопросамъ права, труда, занятій, соціальныхъ взаимоотношеній и т. п.

Тѣмъ не менѣе и въ этой области знакомство съ пріобрѣтеніями и успѣхами науки, съ исторіей ея завоеваній и борьбы

съ невѣжествомъ и грубостью нравовъ, окажетъ пытливому и вдумчивому читателю огромныя услуги. Для этого вовсе нѣтъ обязательной надобности сразу углубиться въ подробное изученіе той или иной науки. Прежде всего необходимо общее расширеніе умственнаго горизонта. Здѣсь нечего опасаться «полузнанія», «верхоглядства», «самомнѣнія всезнайства»; въ этихъ столь громко высказываемыхъ опасеніяхъ сквозитъ не столько недостаточная оцѣнка общаго образованія, сколько обидное недовѣріе къ умственному укладу читателя, къ его характеру, душевной зрѣлости. Если читатель уже ознакомился съ главными чертами и результатами научнаго и прикладного знанія въ общедоступныхъ очеркахъ, ему уже не трудно будетъ выйти изъ этого концентра, т.-е. изъ этого круга обученія, и углубиться въ болѣе полное и систематическое изученіе той или иной отрасли знанія, пользуясь какимъ-либо рекомендательнымъ библіографическимъ указателемъ (см. ниже).

Для удовлетворенія указанной потребности, для содѣйствія общему подъему просвѣщенія въ народной массѣ и должна служить наша «**Народная Энциклопедія» научныхъ и прикладныхъ знаній**», *предназначаемая для широкихъ круговъ населенія и главнымъ образомъ для взрослаго читателя, прошедшаго только курсъ низшей школы и сознательно стремящагося къ самообразованію.*

Это изданіе представляетъ собою *не* справочный, объяснительный словарь, съ короткими статьями въ алфавитномъ порядкѣ, и *не* серію самостоятельныхъ отдѣльныхъ учебниковъ по разнымъ предметамъ, механически связанныхъ въ одно общее цѣлое. Наша «Энциклопедія» состоитъ изъ *систематически сгруппированныхъ (распредѣленныхъ) отдѣльныхъ краткихъ очерковъ научнаго и прикладного знанія, объединенныхъ однимъ общимъ міровоззрѣніемъ и общими образовательными задачами.* Послѣднія сводятся къ начальному *научному образованію* и вообще къ *расширенію умственнаго кругозора* читателя путемъ *общаго ознакомленія съ содержаніемъ и успѣхами науки и ея примѣненій* и путемъ выясненія *великаго значенія научнаго знанія и метода для всѣхъ сторонъ человѣческой жизни.*

Представляя собою «Науку въ отдѣльныхъ очеркахъ» и «Приложеніе ея для различныхъ областей человѣческой жизни», «Энциклопедія» не преслѣдуетъ чисто-утилитарныхъ цѣлей, въ узкомъ смыслѣ слова; наоборотъ, основныя задачи изданія — *общеобразовательныя.* Пробуждая умственные запросы и расширяя общій кругозоръ интеллекта, она должна, по мѣрѣ возможности, удовлетворять потребности въ положительномъ знаніи, необходимомъ для пониманія явленій природы и человѣческой жизни, а также

для выработки общаго міровоззрѣнія. «Энциклопедія» должна, между прочимъ, показать благотворное вліяніе науки на самую жизнь человѣка, на его бытъ, нравы, обычаи, на успѣшность борьбы съ природою, далѣе вліяніе науки на упроченіе права и закона въ человѣческихъ взаимоотношеніяхъ, на поднятіе производительности труда, на прогрессъ матеріальной и духовной культуры и т. д.

Одной изъ задачъ «Энциклопедіи» должно быть ознакомленіе читателя съ *идеей прогресса или прогрессивной эволюціи*, т.-е. съ идеей развитія и совершенствованія въ различныхъ областяхъ науки о природѣ и человѣкѣ, въ самихъ явленіяхъ матеріальнаго міра и духовнаго. Выясняя огромное значеніе этой общенаучной идеи, тѣмъ самымъ изданіе дастъ ему возможность, между прочимъ, пользоваться ею, какъ надежнымъ критеріемъ или мѣриломъ для уясненія смысла и для оцѣнки различныхъ явленій и личной жизни, и общественной, и государственной.

Далѣе крайне важно проводить послѣдовательно *идею закономѣрности во всѣхъ явленіяхъ окружающей природы и въ самой жизни человѣка, даже въ тайникахъ его души*. Эта научная идея имѣетъ громадное воспитательное вліяніе на развивающійся интеллектъ, и въ связи съ могучимъ вліяніемъ *научнаго метода* мышленія и изслѣдованія она, несомнѣнно, въ состояніи вызвать уваженіе и довѣріе къ наукѣ, къ ея мощи и безпристрастію. Безъ этого же умственнаго оружія едва ли можетъ быть цѣлесообразна и успѣшна борьба съ нелѣпыми обычаями и навыками, съ предразсудками, суевѣріями и иными заблужденіями, укоренившимися въ теченіе многихъ вѣковъ на почвѣ косности и невѣжества. Вспомнимъ при этомъ, что просвѣщеніе уже само по себѣ упрочиваетъ уваженіе къ закону и разумному порядку также и въ области *практической* жизни.

Ознакомленіе съ идейной стороной науки, съ ея широкими обобщеніями и съ ея успѣхами должно пробуждать высшіе умственные интересы и въ то же время дѣлать жизнь человѣка болѣе сознательною, пріучая его болѣе идейно и осмысленно относиться къ окружающему его міру.

«Всякое добро происходитъ отъ просвѣщеннаго разума, а, напротивъ того, зло искореняется» (изъ Высочайшаго указа 12 января 1755 г. объ основаніи Московскаго Университета). По тому же поводу гр. Шуваловъ представилъ тогда докладъ, гдѣ, между прочимъ, говорится: «Наукамъ обязаны просвѣщенные народы тѣмъ, что они превознесены и прославлены надъ людьми, живущими во тьмѣ невѣдѣнія»...

Объединенная общимъ прогрессивно-эволюціоннымъ міровоззрѣніемъ, «Энциклопедія» должна служить проводникомъ научныхъ истинъ и гуманитарныхъ принциповъ въ народное сознаніе и тѣмъ содѣйствовать развитію просвѣщенія въ широкомъ смыслѣ этого слова.

Составителямъ «Энциклопедіи» предложено строго держаться правилъ научнаго безпристрастія и правдивости, не позволяя себѣ какъ-либо видоизмѣнять факты или ихъ толкованіе, ради большей удобопонятности и занимательности изложенія. Никакое стремленіе упростить и облегчить усвоеніе научныхъ знаній не можетъ оправдывать нарушенія требованій научности и серьезности изложенія, въ особенности въ изданіи, предназначенномъ для взрослаго читателя, сознательно стремящагося къ самообразованію. Служа дѣлу просвѣщенія на основахъ научнаго знанія и общечеловѣческихъ идеаловъ, «Энциклопедія» должна поучать безпристрастно, преслѣдуя исключительно *общія культурно-просвѣтительныя цѣли, равно важныя и обязательныя для всѣхъ читателей, безъ различія состояній, занятій, убѣжденій.* Всякая нетерпимость, схоластическая догматика и узкая тенденціозность считаются недопустимыми въ нашемъ изданіи. Только при указанныхъ условіяхъ *общедоступности, содержательности и безпристрастія* книга можетъ сдѣлаться «**лучшимъ другомъ человѣка**» и полезнымъ пособникомъ для проведенія въ народную жизнь духовныхъ и матеріальныхъ благъ цивилизаціи.

«Энциклопедія», какъ чисто-образовательное пособіе, не должна задаваться никакими спеціально *воспитательными* цѣлями, никакими воздѣйствіями на впечатлѣнія, чувствованія, настроенія читателя. Но едва ли можно сомнѣваться, что такое изданіе, какъ сказано выше, можетъ благотворно вліять на развитіе серьезнаго мышленія и сознательнаго отношенія къ себѣ и ко всему окружающему, на развитіе уваженія и довѣрія къ научному знанію вообще, на упроченіе идеи права и закона, какъ главныхъ основъ человѣческаго сообщества, согласованныхъ съ требованіями разума и морали и т. д. Если такое вліяніе на умственный складъ читателя вообще окажетъ книга, то въ этомъ и будетъ заключаться ея *благотворное воспитательное* значеніе, поскольку она въ состояніи оставить слѣды болѣе глубокіе, чѣмъ обычное поверхностное чтеніе.

Указанное интеллектуальное вліяніе книги, помимо накопленія знаній и знакомства съ методами научнаго мышленія и изслѣдованія, уже само по себѣ представляетъ громадную заслугу книжнаго самообразованія.

Но есть, однако, еще другая сторона дѣла, которая для многихъ читателей представляется еще болѣе важною, а именно для тѣхъ, которые прежде всего ищутъ въ книгѣ рѣшенія такихъ важнѣйшихъ вопросовъ, какъ, напр.: Какова цѣль жизни человѣка? Что такое счастье? Въ чемъ оно заключается? Каковы пути, ведущіе къ достиженію идеаловъ? Каковы должны быть нормы и строй жизни для осуществленія высшаго блага личности и общества? и т. д. На всѣ эти задачи или проблемы «Энциклопедія» должна отвѣтить, въ предѣлахъ своей программы, только изложеніемъ научно установленныхъ фактовъ изъ исторіи человѣчества и изъ «природы» самого человѣка (томы 8, 9 и др.).

Что же касается до правилъ житейской морали, до этическихъ (нравственныхъ) нормъ и идеаловъ, до соціальныхъ и личныхъ принциповъ поведенія человѣка и т. д.,—то въ *научной «Энциклопедіи»* все это можетъ быть разсматриваемо лишь съ точки зрѣнія *исторіи* таковыхъ воззрѣній (см. тамъ же); практическая же сторона, именно рѣшенія упомянутыхъ вопросовъ въ томъ или иномъ направленіи, указаніе формулъ и рецептовъ для осуществленія моральныхъ проблемъ жизни совершенно исключаются изъ нашей «Энциклопедіи». Всѣ эти задачи о цѣли жизни, о ея смыслѣ, о высшемъ благѣ личности и общества, о счастьи и т. п., всѣ разсужденія о нихъ и ихъ рѣшенія всегда и вездѣ заключаютъ въ себѣ много личнаго, субъективнаго; каждый судитъ по-своему, больше по чувству, по сердцу, смотря по тому, кто что видѣлъ, слышалъ, самъ пережилъ; здѣсь обыкновенно нѣтъ и рѣчи о какихъ-либо научныхъ логическихъ доказательствахъ. Но все же можно надѣяться, что въ будущемъ, по мѣрѣ накопленія фактическаго матеріала, научно провѣреннаго и освѣщеннаго (исторія, соціологія, статистика и др.), рѣшеніе многихъ этическихъ проблемъ, правильно и научно-формулированныхъ (составленныхъ), сдѣлается болѣе возможнымъ, чѣмъ теперь; можно надѣяться, что и въ этой области научныя изысканія приведутъ къ заключеніямъ, равно убѣдительнымъ для всѣхъ, стало-быть, общепріемлемымъ, независимо отъ личныхъ свойствъ, склонностей, настроеній, переживаній... Впрочемъ, все это—дѣло отдаленнаго будущаго! Пока же будемъ помнить, что истинная положительная наука имѣетъ право отказываться отъ рѣшенія тѣхъ вопросовъ и задачъ, которые по самому своему содержанію, по своему существу выходятъ изъ предѣловъ научнаго метода и знанія, которые относятся не къ ней, но къ области или фантазіи и мистики, или же къ религіи, или къ умозрительной философіи, или къ области личныхъ мнѣній, склонностей, къ области впечатлѣній и характера.

Какъ было указано выше, «Народная Энциклопедія» не представляетъ собою ни какой-либо хрестоматіи, ни серіи учебниковъ—въ обычномъ смыслѣ этого слова. Эта послѣдняя цѣль заставила бы значительно расширить все изданіе и сдѣлать по цѣнѣ почти недоступнымъ для «нашего читателя», именно если бы преслѣдовалась полнота и цѣльность содержанія; а съ другой стороны, это могло бы понизить научность изложенія, которая такъ часто страдаетъ, стѣсняемая рамками и шаблономъ обычныхъ элементарныхъ учебниковъ. Въ нашемъ изданіи такого стѣсненія не должно быть въ томъ смыслѣ, что главное вниманіе должно быть обращено на *ясность и научность изложенія*, на широкія толкованія и обобщенія, а не на полноту конкретныхъ знаній и свѣдѣній и не на цѣльность излагаемаго предмета; лучше, ради сбереженія мѣста, опустить совсѣмъ нѣкоторые темы и вопросы, чѣмъ ради полноты пожертвовать *научностью и свободой изложенія*.

Само собой понятно, что при *выборѣ темъ* для статей по каждому предмету имѣлась въ виду степень ихъ важности и значенія не только самихъ по себѣ, но и по отношенію къ *задачамъ «Энциклопедіи»*, *къ интересамъ и подготовкѣ ея читателя*. Въ этихъ статьяхъ должны быть по возможности выяснены *важнѣйшіе успѣхи науки и техники во всестороннемъ ихъ освѣщеніи, наиболѣе ясно изображающіе всю мощь и значеніе научнаго знанія и вообще умственнаго прогресса, какъ для всего человѣчества, такъ и для каждаго въ отдѣльности*. Такимъ образомъ «Энциклопедія», объединенная общими научными началами и заключающая въ себѣ основныя свѣдѣнія изъ разныхъ областей науки и ея приложеній, можетъ въ извѣстной мѣрѣ содѣйствовать достиженію *цѣльности и единства научнаго образованія*.

Разъ будутъ выяснены смыслъ и значеніе науки вообще, для вдумчиваго читателя не составитъ уже труда уяснить себѣ отношеніе ея къ вопросамъ практической жизни, ея пользу и цѣнность и въ этомъ отношеніи.

Быть-можетъ, здѣсь будетъ нелишнимъ сравнить *научное* знаніе съ *обыденнымъ* и тѣмъ еще болѣе выяснить значеніе образованія вообще. Какъ показываетъ повседневная жизнь, *обыденное знаніе* или свѣдѣніе внушаетъ къ себѣ меньше довѣрія уже потому, что въ немъ такъ легко отражаются субъективныя черты человѣка, его чувства, фантазія, темпераментъ; обыденное знаніе отличается неустойчивостью, легко измѣняется подъ вліяніемъ и фактовъ, и личныхъ воздѣйствій и настроеній; люди часто довольствуются свѣдѣніями непровѣренными и даже недоказуемыми, принимаютъ многое на вѣру, передаютъ другимъ, не взирая на

неопредѣленность, малую вѣроятность и спутанность передаваемыхъ сообщеній, мнѣній, слуховъ; въ обыденныхъ знаніяхъ такъ часто проявляются склонность къ преувеличеніямъ, непозволительная поспѣшность заключеній, выводовъ, обобщеній. Напротивъ, чѣмъ люди *образованные*, *культурные*, тѣмъ яснѣе и опредѣленнѣе ихъ рѣчь, тѣмъ болѣе всесторонне и систематично ихъ мышленіе, тѣмъ менѣе они прибѣгаютъ къ пустымъ догадкамъ и предположеніямъ безъ достаточности доводовъ, тѣмъ болѣе они освобождаютъ свои знанія, свѣдѣнія и убѣжденія отъ личной окраски, тѣмъ большею убѣдительностью отличается ихъ аргументація (доказываніе правильности своихъ сужденій). Наконецъ, *научное знаніе* отличается не только логическою строгостью и систематичностью, но, какъ сказано выше, и объективною доказательностью и критицизмомъ; оно совершенно исключаетъ субъективныя черты чувства, характера, настроенія и т. п.

Отсутствіе научно-популярнаго изданія, которое удовлетворяло бы вышеуказаннымъ цѣлямъ и задачамъ, и неотложная необходимость таковой демократизаціи науки въ объединенной систематической формѣ и заставили меня внести, въ существенныхъ чертахъ, 11 декабря 1906 г., вышеизложенный проектъ составленія «Народной Энциклопедіи научныхъ и прикладныхъ знаній» въ *Школьно-Педагогическій Комитетъ Харьковскаго Общества Грамотности*. Послѣ всесторонняго обсужденія этого вопроса въ нѣсколькихъ засѣданіяхъ, подъ предсѣдательствомъ проф. Влад. Митр. Арнольди, при участіи многихъ профессоровъ и другихъ преподавателей, Комитетъ, принявъ мое предложеніе, приступилъ въ 1907 г. къ осуществленію этого проекта, имѣя въ виду содѣйствіе научному самообразованію широкихъ круговъ народа, а также и прохожденію курсовъ въ народныхъ университетахъ.

До настоящаго времени (1912 г.) постановка этого дѣла, согласно моему проекту, сводилась къ слѣдующему:

Избранная Редакціонная Комиссія приняла на себя полностью всю задачу осуществленія проекта «Народной Энциклопедіи» и самостоятельнаго завѣдыванія всѣмъ этимъ дѣломъ [1]). Для составленія программъ и статей, а также для редактированія ихъ приглашены многочисленные сотрудники, общее число которыхъ значительно перевысило 120 [2]). Издавать «Энциклопедію»

---

[1]) Съ конца 1909 г. Редакціонная Комиссія получила права самостоятельнаго филіала Общества Грамотности.

[2]) Главнымъ образомъ. преподаватели высшихъ учебныхъ заведеній въ Харьковѣ, Петербургѣ, Москвѣ, Томскѣ, Одессѣ и др.

согласилось извѣстное книгоиздательское Товарищество И. Д. Сытина (въ Москвѣ).

«*Общее собраніе*» членовъ Школьно-Педагогич. Комитета и всѣхъ участниковъ «Народ. Энциклопедіи» въ Харьковѣ утвердило число предметовъ и статей, темы и программы. Въ исключительныхъ случаяхъ, наприм., въ лѣтнее время, такія рѣшенія исходили отъ Редакціонной Комиссіи. Составленіе же статей по утвержденнымъ программамъ поручалось такъ называемымъ «Спеціальнымъ Комиссіямъ» (по каждому отдѣлу «Энциклопедіи), которыя составляются изъ спеціалистовъ и раздаютъ темы сотрудникамъ для составленія статей; послѣднія, по полученіи ихъ отъ авторовъ, должны быть редактируемы въ соотвѣтственной «Спеціальной Комиссіи» или же однимъ лицомъ.

Однако, кромѣ провѣрки правильности *содержанія* статей, необходимо еще имѣть въ виду правильность *изложенія* въ смыслѣ ясности и удобопонятности. Для этой послѣдней цѣли Редакціонная Комиссія организовала особую «провѣрку» путемъ прочтенія статей (еще въ рукописяхъ) въ кружкахъ, состоящихъ изъ будущихъ читателей «Энциклопедіи». Послѣ этого статьи подвергаются окончательному редактированію также и въ смыслѣ согласованности съ другими статьями и отдѣлами «Энциклопедіи» и съ общими началами, положенными въ ея основу. Ради этой цѣли каждый отдѣлъ «Энциклопедіи» имѣетъ особаго *отвѣтственнаго редактора* (одного или двоихъ) изъ числа членовъ Редакц. Комиссіи, къ которому въ извѣстныхъ случаяхъ переходятъ права и задачи «Спеціальн. Комиссіи».

Представленная мною въ 1907 г. программа «Энциклопедіи» подверглась впослѣдствіи значительному расширенію, повлекшему за собой увеличеніе числа статей, а отсюда увеличеніе и всего изданія.

Въ настоящее время общій планъ «Народной Энциклопедіи» заключаетъ въ себѣ 14 отдѣловъ (предметовъ же—свыше 80) въ слѣдующемъ составѣ:

I отдѣлъ—*Физико-Математическій.*

Предметы: Математика, Механика, Астрономія, Физика, Химія, Біохимія.

II отдѣлъ—*Природовѣдѣніе.*

Зоологія, Ботаника, Минералогія, Геологія, Палеонтологія.

III отдѣлъ—*Техническій.*

Прикладная Механика, Механическая Технологія, Химическая Технологія, Электротехника, Строительное и Инженерное искусства, Горное дѣло.

IV отдѣлъ—*Сельское хозяйство.*

Земледѣліе, луговодство, лѣсоводство и др., Земская Агрономія, Животноводство, Ветеринарія.

V отдѣлъ—*Медицина.*

Исторія Медицины, Анатомія и Физіологія человѣка, Внутреннія и др. болѣзни, Бактеріологія и Заразныя болѣзни, Хирургія, Поданіе первой помощи, Гигіена, Судебная Медицина, Алкоголизмъ.

VI отдѣлъ—*Антропологo-географическій.*

Физическая Географія, Метеорологія, Страновѣдѣніе, Исторія географическихъ открытій, Географія Россіи, Антропологія, Этнографія.

VII отдѣлъ—*Языкознаніе и Исторія Литературы.*

Общее языкознаніе, Индо-европейская семья языковъ, Славянское языкознаніе, Исторія русскаго языка, Исторія русской литературы, Исторія иностранной литературы.

VIII отдѣлъ—*Историческій.*

Исторія Россіи съ Исторіей русскаго права, Всеобщая исторія съ Исторіей культуры, Археологія[1]), Исторія изящныхъ искусствъ.

IX отдѣлъ—*Философскій.*

Философія, Логика, Психологія, Этика, Основы гражданской этики, Педагогика.

X отдѣлъ—*Народное образованіе въ Россіи.*

Исторія образованности, настоящее положеніе народнаго образованія (начальнаго, средняго, высшаго, профессіональнаго), Всеобщее обученіе, Внѣшкольное образованіе.

XI отдѣлъ—*Общественно-юридическія науки.*

Общее правовѣдѣніе, Гражданское и Торговое право и судопроизводство, Уголовное право и судопроизводство, Соціологія, Государственный строй, Государственная Дума, Церковь и Государство, Административное право (Общественное благоустройство), Международное право.

XII отдѣлъ—*Экономическій.*

Введеніе въ экономику, Политическая экономія, Сельско-хозяйств. экономика, Статистика, Народонаселеніе Россіи, Земская статистика, Сельско-хозяйственная статистика, Финансовое право. *Приложенія.* Статистическія справочныя таблицы, Счетоводство[2]).

[1]) Свѣдѣнія по Археологіи введены въ статьи по другимъ предметамъ этого же тома.

[2]) Счетоводство за недостаткомъ мѣста было впослѣдствіи исключено.

XIII и XIV отдѣлы—*Народное хозяйство.*

Горнозаводская промышленность, Сельско-хозяйственная политика, Аграрный вопросъ, Фабрично-заводская промышленность, Торговля, Рабочій вопросъ, Кустарная промышленность, Ссудо-сберегательныя кассы, Мелкій сельскій кредитъ. Кооперація, Потребительныя общества, Пути сообщенія. Переселенія, Колонизація.

Каждый отдѣлъ «Энциклопедіи» выпускается въ свѣтъ въ видѣ отдѣльнаго самостоятельнаго тома (примѣрно, въ 25—40 печатн. листовъ), заключающаго въ себѣ, стало-быть, цѣльную группу предметовъ. Изданіе снабжено многочисленными рисунками, таблицами, картами и т. п. Въ каждомъ томѣ статьи расположены не по алфавиту, а систематически по программѣ «предметовъ».

Таковъ общій планъ изданія, который по мѣрѣ надобности будетъ, конечно, подвергаться исправленію и расширенію. Въ общемъ вся «Энциклопедія» будетъ, предположительно, заключать въ себѣ не менѣе 700 статей (отъ 350 до 400 печатн. листовъ [1]).

Какъ во всякомъ *коллективномъ* (совмѣстномъ) *литературномъ трудѣ*, такъ и въ нашей «Энциклопедіи», при выше указанныхъ особенностяхъ ея состава и содержанія, всегда неизбѣжны нѣкоторыя частныя уклоненія отъ принятаго плана, нѣкоторыя несоотвѣтствія между ея отдѣльными статьями и даже частями. Въ задачу Редакціонной Комиссіи входитъ, между прочимъ, по возможности, сглаживать и устранять эти разногласія какъ по внѣшней структурѣ «Энциклопедіи», такъ и по содержанію статей.

Само собою понятно, что такое согласованіе представляетъ какъ для всей Редакціонной Комиссіи, такъ въ частности и для «отвѣтственныхъ редакторовъ», немалыя затрудненія во многихъ отношеніяхъ, въ особенности въ такомъ изданіи, какъ наша «Энциклопедія» съ ея широкими разносторонними задачами и съ большимъ числомъ сотрудниковъ. Достаточно, напр., указать на то, что далеко не всѣ сотрудники одинаковымъ образомъ представляютъ себѣ «нашего читателя», степень его образовательной подготовки и навыка въ книжномъ чтеніи; одни считаютъ полезнымъ повторенія, подробныя разъясненія, другіе же предпочитаютъ точность и сжатость изложенія; для однихъ живая образность, наглядность изложенія, широкое пользованіе частными примѣрами являются обязательными, другіе же авторы ограничиваются болѣе отвлеченнымъ изложеніемъ, надѣясь на вдум-

[1] Въ настоящее время размѣръ «Народной Энциклопедіи» разросся, примѣрно, до 490 печатныхъ листовъ текста.

чивое отношеніе взрослаго читателя къ читаемому и т. д. Не меньше разномыслія бываетъ и по вопросу: что важно и что нужно изложить въ статьѣ, а что можно исключить или о чемъ ограничиться только краткимъ указаніемъ. Если принять въ соображеніе, что разныя статьи по *одному и тому же предмету* составлялись разными сотрудниками, то станетъ понятнымъ, насколько неблагопріятно можетъ отразиться такая совмѣстная литературная работа на однородности изложенія даннаго предмета. Наконецъ, будетъ не лишнимъ припомнить, что даже превосходные знатоки своего предмета нерѣдко приспособляются къ степени подготовки своего читателя, къ его пониманію, весьма неумѣло, далеко не удачно.

Вмѣсто общей единоличной отвѣтственной редакціи, объединяющимъ факторомъ редактированія является у насъ строго опредѣленный планъ изданія, его цѣли и задачи, его принципы и стремленія.

Если принять во вниманіе новизну этого дѣла, сложность плана и организаціи, одновременность составленія и печатанія сразу нѣсколькихъ томовъ, иногороднее мѣстожительство многихъ сотрудниковъ, неизбѣжныя разногласія во взглядахъ участниковъ и въ способахъ осуществленія задачъ изданія, а также цѣлый рядъ практическихъ трудностей и шероховатостей, неизбѣжно связанныхъ съ такимъ большимъ дѣломъ,—если принять все это во вниманіе, то станетъ понятнымъ, какъ трудно устранить изъ такого изданія недочеты, просмотры и пробѣлы редакціоннаго характера.

Чтобы придать нашему изданію, по возможности, извѣстную стройность и равномѣрность въ отдѣльныхъ его частяхъ, съ точки зрѣнія, такъ сказать, литературной архитектоники, было первоначально постановлено, согласно моему проекту, чтобы число статей по каждому предмету не превышало, въ среднемъ, 15, и чтобы каждая статья не превышала 8 печатныхъ страницъ текста; стало-быть, на каждый предметъ вообще приходится 120 печатныхъ страницъ. При этомъ имѣлось въ виду, что въ означенномъ числѣ статей можно вмѣстить важнѣйшіе темы и вопросы предмета, которые достаточно выясняютъ его въ вышеуказанныхъ отношеніяхъ. Вытекающая изъ этого нѣкоторая *эпизодичность* (отрывочность) изложенія оказывается, конечно, неизбѣжною; этотъ недочетъ въ извѣстномъ смыслѣ можетъ быть сглаживаемъ библіографическими указаніями, для болѣе полнаго систематическаго ознакомленія съ предметомъ. Что же касается до установленія наибольшаго раз-

мѣра каждой статьи (именно, всего лишь 8 печатныхъ страницъ), то мотивомъ этому служитъ недостаточный навыкъ «нашего читателя» въ книжномъ чтеніи. Само собою понятно, что въ отдѣльныхъ, болѣе или менѣе исключительныхъ случаяхъ указанные числа и размѣры подлежатъ соотвѣтственнымъ измѣненіямъ.

Критеріемъ распредѣленія статей по числу и объему должны служить не только *содержаніе, объемъ и значеніе каждой науки самой по себѣ, но и интересы нашего читателя*, какъ городского, такъ и сельскаго жителя, а также вообще *цѣли и задачи самой «Народной Энциклопедіи»*.

Всѣмъ извѣстно, насколько трудно удается хорошая популяризація науки; для этого, несомнѣнно, требуется особенный талантъ! Эти трудности еще болѣе возрастаютъ для «Народн. Энциклопедіи»: какъ уже сказано, вѣдь это — не учебники, предназначаемые для школьнаго изученія, это — и не сборникъ отдѣльныхъ разрозненныхъ очерковъ; возможно, и даже весьма вѣроятно, что статьи ея по инымъ предметамъ будутъ читаться вовсе не въ послѣдовательномъ порядкѣ, а въ раздробь... И тѣмъ не менѣе редакція стремилась, насколько возможно и необходимо по данному предмету, сохранить извѣстную послѣдовательность и связность отдѣльныхъ статей между собой. Въ такомъ видѣ «Энциклопедія», надѣемся, успѣшно послужитъ дѣлу общаго начальнаго ознакомленія съ главными успѣхами и завоеваніями научнаго и прикладного знанія [1]).

Въ дополненіе къ вышеуказанному считаю нелишнимъ привести нѣкоторыя мѣста изъ «*Инструкція для гг. сотрудниковъ «Народной Энциклопедіи»*.

«Статьи для «Народной Энциклопедіи», какъ по содержанію своему, такъ и по языку и по способу изложенія, должны быть приспособлены къ потребностямъ и степени подготовки *нашего читателя*, каковымъ мы представляемъ себѣ *взрослаго, прошедшаго только курсъ низшей школы и стремящагося къ дальнѣйшему самообразованію*. Для такого читателя, главнымъ образомъ, и предназначается наше изданіе. Желательно, чтобы популярный способъ изложенія не наносилъ ущерба научности и серьезности содержанія; не слѣдуетъ смѣшивать этого способа изложенія съ тѣмъ, которымъ пользуются, напр., при школьномъ обученіи и

[1]) Для болѣе подробнаго изученія читатель можетъ воспользоваться нашими библіографическими указателями, а въ особенности «Программами» Московской Комиссіи по организаціи домашняго чтенія; впрочемъ, при этомъ надо имѣть въ виду, что эти «Программы» предназначены для читателя, обладающаго бо́льшею образовательною подготовкой, бо́льшимъ досугомъ и задающагося гораздо болѣе широкими образовательными цѣлями, чѣмъ нашъ читатель «Народ. Энциклопедіи» (см. выше).

который, ради удобопонятности и наглядности, такъ часто переходитъ въ многословное живописаніе, въ подражаніе живой рѣчи, не стѣсняемой условіями времени и мѣста. Слѣдуетъ избѣгать поддѣлки подъ народный языкъ».

«Статьи, размѣромъ каждая не болѣе 8 печатныхъ страницъ текста, принимаются только оригинальныя и за подписью автора. Всякаго же рода позаимствованія изъ другихъ источниковъ въ видѣ перевода, передѣлки и т. п. допускаются лишь по предварительному соглашенію съ Редакціонной Комиссіей».

«Кромѣ того, при каждой статьѣ или при цѣлой серіи однородныхъ статей необходимо приложить краткій библіографическій указатель для читателя, желающаго ознакомиться съ излагаемымъ предметомъ болѣе полно и систематично, съ краткимъ отзывомъ о наиболѣе рекомендуемыхъ сочиненіяхъ».—«Редакціонная Комиссія имѣетъ право сокращать, измѣнять и дополнять статьи, главнымъ образомъ, ради согласованія съ общимъ планомъ, направленіемъ и содержаніемъ «Народной Энциклопедіи». Эти измѣненія могутъ касаться какъ существеннаго содержанія статей, такъ и ихъ слога, способа и порядка изложенія, примѣчаній, рисунковъ, библіографическихъ указаній и т. д.»—«Всѣ статьи печатаются безъ подписи автора, но въ предисловіи перечислены всѣ участники въ составленіи программъ и статей, ихъ редактированіи и провѣркѣ (по каждому тому отдѣльно)».

Мнѣ осталось еще лишь указать на желательность извѣстнаго общенія между читателями «Энциклопедіи» и ея Редакціонной Комиссіей въ смыслѣ выясненія основного вопроса о пригодности этого изданія, удобопонятности, о необходимыхъ его улучшеніяхъ и т. д. Редакціонная Комиссія [1]) будетъ съ готовностью отвѣчать на запросы и съ благодарностью принимать совѣты и указанія.

Нашу «Энциклопедію» мы выпускаемъ въ твердой увѣренности, что она идетъ навстрѣчу назрѣвшей потребности въ такомъ научно-популярномъ пособіи, и съ теплой надеждой на то, что наше изданіе принесетъ посильную помощь великому дѣлу народнаго просвѣщенія.

Профессоръ *В. Я. Данилевскій*,
Предсѣдатель Редакціонной Комиссіи.

---

[1]) Адресъ Ред. Комиссіи: Харьковъ, Ветеринарная ул., д. Общества Грамотности № 26.

Предисловіе къ математическому отдѣлу Народной Энциклопедіи.

Каждый простой счетъ, съ которымъ намъ приходится постоянно встрѣчаться въ жизни, самый простой чертежъ или рисунокъ, который намъ кажется самъ по себѣ понятнымъ, представляютъ приложенія понятій о числѣ и линіи. Съ этими основными математическими понятіями человѣкъ знакомится одновременно съ развитіемъ его способностей рѣчи и мысли. Въ постоянныхъ столкновеніяхъ и борьбѣ человѣка съ природой и благодаря его стремленіямъ къ знаніямъ, математическія науки достигли значительнаго развитія. Ихъ отличительной чертой является опредѣленность и точность исходныхъ положеній и получаемыхъ результатовъ. Вотъ почему установилось воззрѣніе, что та наука наиболѣе совершенна, которая болѣе всего пользуется математикой для своихъ выводовъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ встрѣчается мнѣніе, что математическія науки трудны для пониманія и изученія. Пусть эта мысль, однако, не смущаетъ читателя. Какой бы вопросъ ни приходилось изучать, всегда для этого нужно затратить и трудъ и время. Что бы вы ни пожелали сдѣлать, всегда для этого необходимо потрудиться. А если кто-либо и говоритъ, что математическія науки требуютъ особеннаго напряженія умственныхъ способностей, то происходитъ это отъ того, что среди математиковъ находятся любители—предлагать и разрѣшать особенно трудные вопросы, которые требуютъ, чтобы изученіе математики состояло въ умственныхъ упражненіяхъ надъ рѣшеніемъ трудныхъ отвлеченныхъ задачъ. Но нельзя выводить еще отсюда, что все содержаніе математическихъ наукъ заключается въ головоломныхъ умственныхъ упражненіяхъ. Не изъ-за нихъ прославились Галилей и Ньютонъ, имена которыхъ вызываютъ всеобщее уваженіе къ ихъ памяти. Не изъ-за рѣшенія математическихъ задачъ подвергся гоненію и ссылкѣ пользовавшійся всеобщимъ уваженіемъ Галилей и пошелъ на костеръ Джіордано Бруно, сожженный въ 1600 году католическимъ духовенствомъ за горячую защиту ученія Коперника о круговомъ движеніи земли и планетъ вокругъ солнца. Не ради упражненій Іоганнъ Кеплеръ затратилъ 17 лѣтъ упорнаго труда для доказательства, что земля и планеты движутся по эллипсамъ.

Жажда знанія, поиски истины и сознаніе, что только они могутъ создать лучшія условія для человѣческой жизни, руководили этими великими тружениками науки. И если читатель углубится въ изученіе математическихъ наукъ, онъ найдетъ тамъ много поразительно интереснаго; ему станетъ ясно, почему великіе

ученые и геніальные мыслители, Галилей, Кеплеръ, Ньютонъ и многіе другіе, посвятили себя работѣ надъ разрѣшеніемъ математическихъ вопросовъ. И не счастливъ ли читатель имѣть своими учителями такихъ колоссовъ мысли, ученіе которыхъ влечетъ къ себѣ пытливые умы и заставляетъ ихъ задумываться надъ тѣмъ научнымъ богатствомъ, которое оставили намъ для дальнѣйшаго развитія эти геніи? Они ясно сознавали, что эта область науки, доставлявшая имъ самимъ глубокое наслажденіе въ занятіяхъ, сниметъ также съ глазъ человѣчества пелену многовѣковыхъ заблужденій и представитъ его удивленному и восхищенному взору красоту и гармонію мірозданія. Благодаря математическимъ изслѣдованіямъ раскрылась поразительная картина строенія и жизни мірового пространства.

Выражая въ краткой и опредѣленной формѣ зависимости между различными величинами, встрѣчающимися въ природѣ, математическія науки представляютъ удобный способъ изученія явленій природы и использованія ихъ на благо человѣку. Съ математическими науками тѣсно связано использованіе открытій и изобрѣтеній въ области прикладныхъ и техническихъ наукъ для созданія и усовершенствованія культурнаго благоустройства нашей жизни.

Составители математическаго отдѣла энциклопедіи имѣли въ виду дать читателю возможно доступное изложеніе основныхъ математическихъ знаній. Съ этой цѣлью изложеніе начинается съ наиболѣе доступныхъ каждому человѣку понятій, и изъ нихъ выводятся доказательства и всѣ необходимыя заключенія, при помощи разсужденій наиболѣе понятныхъ читателю. Въ концѣ книги приложенъ алфавитный указатель словъ и названій изъ области математическихъ наукъ, съ указаніемъ страницъ, гдѣ находится ихъ объясненіе. Въ виду того, что математическіе выводы большею частью тѣсно связаны между собой и вытекаютъ непосредственно одно изъ другого, то мы рекомендуемъ читателю постепенное, послѣдовательное чтеніе и изученіе книги съ карандашомъ въ рукахъ и бумагой, на которой слѣдуетъ продѣлывать всѣ вычисленія и построенія, о которыхъ говорится въ книгѣ. Въ математическихъ книгахъ установился обычай всѣ обозначенія на чертежахъ и при вычисленіяхъ дѣлать при помощи буквъ латинскаго алфавита. Поэтому этотъ алфавитъ, для ознакомленія съ нимъ, помѣщенъ въ концѣ книги (см. стр. 355).

Редакторъ математическаго отдѣла
Профессоръ *Н. Н. Салтыковъ.*

Математика.

I. АРИФМЕТИКА.

1. О счетѣ.

Врядъ ли нужно говорить о значеніи счета въ обыденной жизни. Нужно ли что-либо продать или купить, требуется ли опредѣлить прибыль или убытокъ—всегда необходимо прибѣгать къ счету. Заказываете ли вы портному что-либо сшить, онъ долженъ прежде всего снять мѣрку заказываемаго платья и только послѣ этого можетъ сосчитать и сказать, сколько аршинъ матеріи необходимо купить. Задумали ли вы что-либо смастерить, вы должны прежде всего сосчитать, сколько нужно матеріала, и хватитъ ли у васъ денегъ его купить. Особенно важно подсчитать, когда вы задумали возвести какую-либо постройку или открыть предпріятіе. Безъ предварительнаго подсчета вы рискуете, въ концѣ-концовъ, не довести задуманное дѣло до конца.

Безъ вычисленій не могли бы возникнуть различныя пенсіонныя кассы и всевозможные виды страхованія, напримѣръ: страхованіе отъ огня, страхованіе жизни, трудоспособности. Всѣ эти послѣднія учрежденія основаны на выводахъ статистики,—науки, примѣняющей вычисленія къ изученію законовъ развитія человѣческаго общества и законовъ природы.—Изъ этихъ краткихъ указаній видно, что наука о счетѣ, которую называютъ *математикой*, является мощнымъ орудіемъ въ рукахъ человѣка. Чтобы успѣшно имъ пользоваться, необходимо каждый разъ давать себѣ отчетъ, возможно ли въ данномъ случаѣ примѣнить математику или нѣтъ, и, если можно, то какъ ее примѣнить. Очень часто неумѣнье примѣнить математику приводило къ совершенно невѣрнымъ заключеніямъ. Поэтому важно установить, прежде всего, понятіе о счетѣ и числѣ, на которыхъ основываются всѣ математическія вычисленія.

Знакомство съ жизнью дикихъ людей, сохранившихся еще до сихъ поръ въ отдаленныхъ мало посѣщаемыхъ мѣстностяхъ, показываетъ, что они ограничиваются въ своей несложной жизни словами, соотвѣтствующими только понятіямъ: одинъ, два, три, четыре. Если же имъ приходится имѣть дѣло съ большимъ числомъ предметовъ, то они называютъ ихъ однимъ словомъ— много.

Это заставляетъ предполагать, что и всѣ отдаленные предки современныхъ культурныхъ народовъ находились нѣкогда также на такой ступени развитія.

Однако подъ вліяніемъ потребностей жизни необходимость счета заставляла людей пользоваться записями, къ которымъ и теперь еще прибѣгаютъ неграмотные люди, отмѣчая однимъ и тѣмъ же знакомъ или чертой каждый считаемый предметъ, будетъ ли то животное изъ его стада или опредѣленный періодъ жизни, прожитый человѣкомъ.

Производя счетъ, первобытный человѣкъ или показывалъ на своихъ пальцахъ число сосчитанныхъ предметовъ, или повторялъ одно и то же слово, выражавшее понятіе *одинъ*, столько разъ, сколько считаемыхъ предметовъ.

Неудобство такого счета заставило замѣнять повторяемыя нѣсколько разъ слова однимъ словомъ; такимъ образомъ, мы вмѣсто

одинъ и еще одинъ говоримъ *два*,

вмѣсто

одинъ, еще одинъ и еще одинъ—три

и т. д.

Точно такъ же вмѣсто того, чтобы письменно изображать число при помощи повторенія одного и того же знака, условливаются изображать опредѣленное число черточекъ однимъ какимъ-либо знакомъ, напримѣръ,

I I знакомъ 2,

I I I знакомъ 3

и т. д.

Пока число чиселъ, необходимыхъ въ жизненномъ обиходѣ, невелико, до тѣхъ поръ подобное изображеніе чиселъ помощью различныхъ знаковъ и словъ допустимо. Но какъ только пришлось имѣть дѣло все съ бо̀льшими и бо̀льшими числами, подобный способъ изображенія чиселъ сталъ неудобнымъ, и человѣкъ долженъ былъ прійти къ болѣе совершенному способу изображенія чиселъ.

Въ основѣ этого способа лежитъ слѣдующая весьма простая мысль, которой часто пользуются въ жизни. Если намъ нужно

сосчитать много предметовъ, положимъ, яблокъ, то быстрѣе всего и удобнѣе считать ихъ по два, по три, по пяти или по десяти.

Мы можемъ при этомъ составлять кучки яблокъ, положимъ по десяти яблокъ, пока у насъ не останется яблокъ меньше, чѣмъ десять. Тогда, сосчитавъ число кучекъ и присчитавъ оставшіеся яблоки, не составляющіе полной кучки, мы найдемъ число всѣхъ яблокъ. Очевидно, что при подобномъ счетѣ мы каждый десятокъ яблокъ принимаемъ за нѣчто единое, за новую вещь, *за новую единицу*, состоящую изъ десяти прежнихъ единицъ. Такую новую единицу, состоящую изъ нѣсколькихъ прежнихъ единицъ, назовемъ *единицей высшаго разряда*. Этой единицѣ высшаго разряда дадимъ новое названіе, напримѣръ, пара, пятокъ, десятокъ и т. п. При счетѣ нашихъ кучекъ мы можемъ поступить опять такъ же, т.-е. соединять эти кучки по двѣ, пять или десять, до тѣхъ поръ, пока у насъ не останется кучекъ соотвѣтственно меньше, нежели двѣ, пять или десять. Эти новыя еще большія кучки мы примемъ за единицы новаго высшаго разряда и опять дадимъ имъ новыя названія. Весь счетъ сведется теперь къ счету большихъ кучъ, оставшихся меньшихъ кучъ, не составляющихъ никакой единицы высшаго разряда и, наконецъ, къ счету яблокъ, не составившихъ цѣлой кучки.

Какъ мы видѣли, отъ насъ зависитъ, сколько единицъ низшаго разряда принять за одну единицу высшаго разряда. Напримѣръ, китайцы за единицу высшаго разряда считаютъ пару. Древніе Вавилоняне принимали 60 единицъ низшаго разряда за одну единицу высшаго разряда [1]). Наконецъ древніе индусы за единицу высшаго разряда принимаютъ десять единицъ низшаго разряда; послѣднее условіе принято и у насъ. Число, показывающее сколько единицъ низшаго разряда заключается въ одной единицѣ высшаго разряда, носитъ названіе *основанія системы счисленія*.

Посмотримъ теперь, какъ изображать *письменно*, при помощи небольшого числа знаковъ, какія угодно числа. Покажемъ, что въ нашей десятичной системѣ достаточно имѣть десять знаковъ или цифръ. Будемъ обозначать простыя единицы, отъ одной до девяти, цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Кромѣ того, условимся считать, *что каждая цифра, поставленная справа отъ другой, представляетъ число единицъ высшаго разряда*.

---

[1]) До сихъ поръ удержалось такое условіе при счетѣ времени, гдѣ 60 секундъ принимаются за новую единицу—минуту, а 60 минутъ за новую единицу—часъ.

Такимъ образомъ каждый значокъ или цифра въ зависимости отъ того, какое мѣсто, считая справо налѣво, она занимаетъ, будетъ представлять единицы различныхъ разрядовъ. Это условіе относительно значенія цифры, въ зависимости отъ ея мѣста, представляетъ изобрѣтеніе индусовъ. Но, кромѣ того, необходимо ввести еще одинъ (десятый) знакъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что намъ нужно изобразить число, состоящее изъ пяти сотенъ и трехъ единицъ, т.-е. число пятьсотъ три. Помня, что каждая цифра, стоящая влѣво отъ другой, представляетъ единицы непосредственно слѣдующаго разряда, мы должны установить знакъ, который, будучи поставленъ на мѣстѣ единицъ какого-либо разряда, указывалъ бы, что единицъ этого разряда нѣтъ. Для этого индусы ввели цифру, названную нулемъ, и изображающуюся такъ 0. Вводя нуль, мы напишемъ число пятьсотъ три въ слѣдующемъ видѣ 503. Такимъ образомъ задача, объ изображеніи любого числа при помощи небольшого числа словъ и знаковъ, была рѣшена вполнѣ. Часть математики, занимающаяся рѣшеніемъ этой задачи, носитъ названіе *счисленія* или *нумераціи*.

Укажемъ еще на одно свойство чиселъ. *Расположимъ всѣ числа въ слѣдующемъ порядкѣ*. Начнемъ нашъ рядъ чиселъ съ числа *одинъ;* за слѣдующее число примемъ то, которое соотвѣтствуетъ одному и еще одному предмету, т.-е. число *два* и т. д. Тогда за каждымъ числомъ будетъ слѣдовать число, отличающееся отъ предыдущаго на одну единицу. Располагая такимъ образомъ числа, мы получимъ такъ называемый *натуральный рядъ чиселъ*: 1, 2, 3, 4, 5, 6... [1]).

Назовемъ начальное число этого ряда, т.-е. число одинъ—*первымъ* числомъ, число два—*вторымъ*, три — *третьимъ* и т. д. Слова первый, второй, третій и т. д. указываютъ на мѣсто разсматриваемаго числа въ натуральномъ ряду. Вмѣстѣ съ тѣмъ ясно, что *каждое число этого ряда будетъ соотвѣтствовать столькимъ единицамъ, сколько имѣется чиселъ этого ряда, начиная съ единицы и кончая разематриваемымъ числомъ*. Напримѣръ, «пятое» число этого ряда будетъ соотвѣтствовать пяти единицамъ, «десятое»—десяти и т. д. Нетрудно теперь видѣть, что числами можно пользоваться для опредѣленія мѣста какихъ-либо явленій или предметовъ, слѣдующихъ другъ за другомъ. Для этого назовемъ начальное явленіе *первымъ* и обозначимъ его знакомъ «1», слѣдующее — *вторымъ* и обозначить знакомъ «2» и т. д. Тогда словами «первое явленіе», «второе явленіе» и т. д. вполнѣ

[1]) Здѣсь точки поставлены вмѣсто словъ: «и такъ далѣе».

опредѣлится мѣсто каждаго явленія въ ихъ ряду. Точно такъ же, положимъ, что я имѣю рядъ предметовъ, расположенныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ. Назовемъ начальный предметъ «первымъ», слѣдующій—«вторымъ» и т. д.; тогда мѣсто каждаго предмета въ ряду опредѣлится соотвѣтствующимъ ему числомъ или *номеромъ*. Какъ извѣстно, такимъ образомъ въ городахъ опредѣляются номерами дома, въ библіотекахъ — книги. Итакъ, *числа служатъ не только для счета предметовъ или явленій, но и для опредѣленія порядка, въ которомъ они слѣдуютъ другъ за другомъ.*

Посмотримъ теперь, *къ чему сводится счетъ, т.-е. опредѣленіе числа какихъ-либо предметовъ.* Начнемъ съ того, что перенумеруемъ всѣ предметы. Для этого понадобится столько чиселъ натуральнаго ряда, сколько всего имѣется предметовъ. Но такъ какъ въ натуральномъ ряду всякое число показываетъ, сколько имѣется чиселъ этого ряда, начиная съ единицы и кончая этимъ числомъ, то отсюда слѣдуетъ, что номеръ послѣдняго предмета представитъ число всѣхъ разсматриваемыхъ предметовъ. *Итакъ, чтобы сосчитать данные предметы, достаточно ихъ перенумеровать; номеръ послѣдняго предмета представляетъ число всѣхъ данныхъ предметовъ.*

Совокупность предметовъ, которые мы должны пересчитать, условимся, для простоты рѣчи, называть *группой*. Предположимъ, что мы пересчитали двѣ какихъ-либо группы предметовъ, напримѣръ, группу учениковъ и группу карандашей. Если изъ одной группы можно выдѣлить часть, имѣющую одно и то же число предметовъ, что и вся другая группа, то число, соотвѣтствующее первой группѣ, *больше* числа, которое соотвѣтствуетъ второй; наоборотъ, число предметовъ второй группы *меньше* соотвѣтствующаго числа первой. Въ нашемъ примѣрѣ число учениковъ будетъ больше числа карандашей, если при раздачѣ ученикамъ, каждому по одному карандашу, по крайней мѣрѣ, одинъ ученикъ останется безъ карандаша. Такимъ образомъ если имѣемъ два какихъ-либо числа, то эти числа или одинаковы, либо одно изъ нихъ больше другого. Въ первомъ случаѣ назовемъ ихъ *равными;* равенство двухъ чиселъ обозначается знакомъ = (носитъ названіе *знака равенства*), который ставится между двумя равными числами, напримѣръ, 2=2. Послѣднее выраженіе 2=2 называется *равенствомъ.* Число, стоящее влѣво отъ знака =, представляетъ *первую часть* равенства, а число, которое стоитъ справа отъ него—*вторую часть равенства.*

Если какое-либо число больше другого числа, то это обозначаютъ знакомъ $>$ *(больше)*, который носитъ названіе *знака не-*

равенства. Такъ, напримѣръ, пишутъ $3 > 2$, $4 > 1$. Число, стоящее слѣва отъ знака неравенства, носитъ названіе *первой части неравенства*, а число, стоящее справа отъ него—второй *части неравенства*. Вмѣсто того, чтобы говорить, что число 3 *больше* числа 2, часто говорятъ иначе, что число 2 *меньше* числа 3. Это условіе обозначаютъ такимъ образомъ: $2 < 3$, $1 < 4$. Здѣсь знакъ $<$ *(меньше)* есть также *знакъ неравенства*, а самое выраженіе называется *неравенствомъ*, въ которомъ 2 или 1 — первыя части, а 3 и 4—вторыя части.

2. Арифметическія дѣйствія.

1. Сложеніе. Пусть имѣемъ нѣсколько группъ предметовъ; каждой изъ этихъ группъ, какъ мы знаемъ, соотвѣтствуетъ нѣкоторое число. Соединимъ всѣ данныя группы въ одну группу; полученной новой группѣ будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое число. Это число носитъ названіе *суммы* чиселъ данныхъ группъ; числа, соотвѣтствующія даннымъ группамъ, называются *слагаемыми* этой суммы. Пусть имѣемъ три какихъ-либо числа 2, 3, 7; ихъ сумму обозначаютъ такъ $(2+3+7)$, при чемъ знакъ $+$ называется плюсомъ (отъ латинскаго слова *плюсъ*—больше), или знакомъ сложенія, а скобки ( ) показываютъ, что все выраженіе, стоящее въ нихъ, разсматривается какъ одно число 12. Дѣйствіе, при помощи котораго по даннымъ слагаемымъ находится, ихъ сумма, называется *сложеніемъ*. Сложеніе всегда выполнимо; въ самомъ дѣлѣ, какъ это видно изъ предыдущаго, нахожденіе суммы сводится къ счету предметовъ нѣкоторой группы; а счетъ всегда возможно выполнить. Такъ какъ число предметовъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ ихъ считаютъ, то отсюда вытекаетъ первый основной законъ сложенія, такъ называемый *законъ перемѣстительный*. Этотъ законъ можетъ быть выраженъ словами слѣдующимъ образомъ: *сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ*. Изъ самаго опредѣленія сложенія вытекаетъ и второй основной законъ сложенія—*законъ сочетательный;* его можно выразить словами слѣдующимъ образомъ: *при составленіи суммы нѣсколькихъ чиселъ можно нѣсколько слагаемыхъ замѣнить ихъ суммой, и каждое слагаемое, въ свою очередь, разбить на нѣсколько слагаемыхъ.*

Далѣе, изъ самаго опредѣленія суммы видно, что *сумма больше всякаго слагаемаго.*

Какъ сказано выше, нахожденіе суммы нѣсколькихъ чиселъ приводится къ счету; но если слагаемыя велики, то находить такимъ образомъ сумму неудобно. Но, основываясь на томъ, что сумма не измѣняется, если слагаемыя разбить на новыя

слагаемыя и измѣнить ихъ порядокъ, мы можемъ каждое слагаемое представить въ видѣ суммы его единицъ, десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. Затѣмъ, измѣняя порядокъ слагаемыхъ, сложимъ между собою единицы всѣхъ первоначальныхъ слагаемыхъ, затѣмъ десятки ихъ, сотни, тысячи и т. д. Чтобы найти сумму остается составить одно только число изъ всѣхъ полученныхъ единицъ различныхъ разрядовъ.

2. **Умноженіе.** Пусть намъ требуется найти суммы нѣсколькихъ равныхъ между собою слагаемыхъ. Очевидно, такую сумму мы можемъ найти по правиламъ сложенія. Но если число слагаемыхъ велико, то нахожденіе суммы представляетъ большія нéудобства. Положимъ, напримѣръ, требуется найти цѣну 258 машинъ, каждая изъ которыхъ стоитъ 187564 руб. Очевидно, для рѣшенія этого вопроса пришлось бы складывать 258 чиселъ, изъ которыхъ каждое равно числу 187564; ясно, что нахожденіе такой суммы затруднительно. Въ подобныхъ случаяхъ и приходитъ на помощь дѣйствіе *умноженія*, дающее правило для удобнаго вычисленія суммы нѣсколькихъ равныхъ между собою слагаемыхъ. При умноженіи то число, которое берется нѣсколько разъ слагаемымъ, носитъ названіе *множимаго*, число, показывающее, сколько разъ повторяется это слагаемое, называется *множителемъ;* наконецъ сумма нѣсколькихъ равныхъ слагаемыхъ носитъ названіе *произведенія множимаго на множитель*. Такъ какъ произведеніе представляетъ, въ сущности говоря, сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, то отсюда вытекаетъ, что найти произведеніе всегда возможно. Если множимое равно, положимъ, числу 4, а множитель—числу 5, то произведеніе обозначается такъ: 4×5 или 4.5; здѣсь знакъ $\times$ или . представляютъ знакъ умноженія. Подобно сложенію, умноженіе подчиняется двумъ основнымъ законамъ: *перемѣстительному и сочетательному*. Первый изъ нихъ выражается слѣдующимъ образомъ: *произведеніе не измѣняется, если мы множимое сдѣлаемъ множителемъ, а множитель—множимымъ*. Такъ легко убѣдиться, что $4.5 = 5.4$. Итакъ, при составленіи произведенія множимое и множитель играютъ одну и ту же роль; вотъ почему имъ можно и не давать различныхъ названій; это такъ и дѣлаютъ и сохраняютъ для обоихъ чиселъ названіе *множителей*. Тогда перемѣстительный законъ для умноженія можно выразить такъ: *произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей*.

Необходимо замѣтить, что мы всегда предполагали, что оба множителя не равны 0; если же одинъ изъ множителей будетъ равенъ нулю, то и произведеніе будетъ равно нулю.

Переходимъ *къ закону сочетательному для умноженія*. Замѣтимъ прежде всего, что подъ произведеніемъ нѣсколькихъ чиселъ,

напримѣръ, чиселъ 2, 5, 4, подразумѣваютъ число, составленное слѣдующимъ образомъ: составимъ произведеніе чиселъ 2 и 5, т.-е. найдемъ число 2 . 5; и это число умножимъ на 4. Полученное такимъ образомъ число называется произведеніемъ чиселъ 2, 5, 4 и обозначается такъ: $2\times5\times4$, или 2 . 5 . 4. Числа 2, 5, 4 назовемъ множителями этого произведенія. Законъ сочетательный для умноженія заключается въ томъ, что при составленіи произведенія нѣсколькихъ множителей возможно замѣнять два послѣдовательныхъ множителя ихъ произведеніемъ. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, мы можемъ при вычисленіи произведенія 2 . 5 . 4 замѣнить, напримѣръ, множители 5 и 4 ихъ произведеніемъ 5 . 4 = 20, и произведеніе 2 . 5 . 4 будетъ равно произведенію 2 . 20. Такимъ образомъ изъ закона сочетательнаго вытекаетъ, что при составленіи произведенія можно каждый множитель замѣнить, въ свою очередь, произведеніемъ нѣсколькихъ множителей. Напримѣръ, произведеніе 8 . 9 равно произведенію 2 . 2 . 2 . 3 . 3, которое отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что множители 8 и 9 замѣнены, первый произведеніемъ 2 . 2 . 2, а второй произведеніемъ 3 . 3. Изъ закона сочетательнаго вытекаетъ еще одно важное слѣдствіе: *произведеніе нѣсколькихъ множителей не зависитъ отъ порядка этихъ множителей.* Замѣтимъ, что изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что *если одинъ изъ множителей равенъ нулю, то произведеніе равно нулю* и, наоборотъ, *если произведеніе равно нулю, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей равенъ нулю.* Къ разсмотрѣннымъ основнымъ законамъ умноженія необходимо прибавить такъ называемый законъ *распредѣлительный для умноженія относительно сложенія.* Этотъ законъ заключается въ слѣдующемъ: *При умноженіи суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ на какое-либо число, на него умножается каждое изъ слагаемыхъ, а затѣмъ полученныя произведенія складываются.* Умножимъ, напримѣръ, сумму чиселъ (5+3+2) на число 3. Основываясь на опредѣленіи умноженія и на законахъ сочетательномъ и перемѣстительномъ для сложенія легко показать, что (5+3+2) . 3= (5+3+2)+(5+3+2)+(5+3+2) = (5+5+5)+(3+3+3)+(2+2+2)=5 . 3+3 . 3+2 . 3.

Чтобы научиться умноженію чиселъ, необходимо прежде всего знать таблицу умноженія или такъ называемую Пифагорову таблицу, названную по имени знаменитаго греческаго философа и математика Пифагора, впервые ее составившаго. Таблица эта пишется слѣдующимъ образомъ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Найдемъ, напримѣръ, произведеніе 6×8. Отмѣтимъ пальцемъ строку, начинающуюся числомъ 6 и ведемъ по ней пальцемъ, пока не дойдемъ до столбца, который начинается числомъ 8. Въ клѣткѣ, гдѣ пересѣкаются наша строка и столбецъ, заключается искомое произведеніе 48.

Кромѣ таблицы умноженія, необходимо умѣть умножить число, состоящее изъ единицы съ нѣсколькими нулями на какое-либо число. Послѣднее правило выводится чрезвычайно просто изъ самаго опредѣленія умноженія. Помножимъ, напримѣръ, 10 на 11. Одиннадцать десятковъ равняются 110. Умножить 100 на 7 значитъ взять семь сотенъ. Поэтому $100\times7=700$. Такимъ образомъ, чтобы умножить число на другое число, состоящее изъ единицы съ нулями, *слѣдуетъ къ умножаемому приписать столько нулей, сколько ихъ находится въ множителѣ.* Зная это правило, легко множить числа, состоящія изъ одной цифры съ нѣсколькими нулями. На основаніи законовъ сочетательнаго и перемѣстительнаго можемъ написать, напримѣръ, что $300\,.\,2000=3\,.\,100\,.\,2.1000=3.2.100.1000=6\,.\,100000=600000$. Отсюда вытекаетъ правило: *перемножь значныя числа* 3×2 *и къ произведенію 6 припиши столько нулей, сколько ихъ находится въ обоихъ множителяхъ.* Зная это правило и принимая во вниманіе еще законъ распредѣлительный, можемъ вывести правило умноженія любого

числа на число, состоящее изъ одной цифры съ нѣсколькими нулями. Напримѣръ, при умноженіи 379 на 200, на основаніи распредѣлительнаго закона имѣемъ, что $379 \cdot 200 = (9+70+300) \cdot 200 = 9 \cdot 200 + 70 \cdot 200 + 300 \cdot 200 = 1800 + 14000 + 60000 = 75800$. Какъ видитъ читатель, мы опять пришли къ правилу, которое гласитъ, что *нужно умножить единицы десятки и сотни даннаго числа на значащую цифру множителя, къ каждому произведенію приписать столько нулей, сколько ихъ имѣется во множителѣ, и, наконецъ, сложить полученныя такимъ образомъ произведенія.* Рекомендуемъ читателю для упражненія вывести, основываясь на законахъ умноженія, правило умноженія двухъ какихъ-либо чиселъ.

3. **Возвышеніе въ степень.** Если имѣемъ произведеніе нѣсколькихъ равныхъ между собою множителей, напримѣръ, произведеніе $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, то такое произведеніе обозначаютъ сокращенно черезъ 9^4; здѣсь число 4, показываетъ, сколько разъ число 9 взято множителемъ. Это число 4 называется *показателемъ степени*, число 9 называется *основаніемъ*, само же число 9^4 называется *четвертой степенью числа* 9. Ясно, что при указанныхъ обозначеніяхъ число 9^3 или, какъ говорятъ, девять въ третьей степени, или третья степень девяти, равно $9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 = 729$.

Дѣйствіе, помощью котораго находятся различныя степени чиселъ, носитъ названіе *возвышенія въ степень*. Такъ какъ возвышеніе въ степень представляетъ нахожденіе произведенія нѣсколькихъ множителей, то оно всегда выполнимо.

4. **Вычитаніе.** Пусть имѣемъ группу предметовъ, число которыхъ обозначимъ, напримѣръ, черезъ 7; *выдѣлимъ* изъ этой группы нѣкоторые предметы, число которыхъ пусть будетъ 3. Дѣйствіе, помощью котораго находится число оставшихся послѣ этого предметовъ, называется *вычитаніемъ*. Число оставшихся предметовъ называется *разностью* чиселъ 7 и 3 и обозначается черезъ (7—3); число 7 называется *уменьшаемымъ*, число 3 *вычитаемымъ*. Знакъ вычитанія — называется *минусомъ*, который въ латинскомъ языкѣ означало *менье*. Ясно, что опредѣленное такимъ образомъ вычитаніе всегда возможно. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ мы здѣсь выдѣляемъ часть предметовъ нѣкоторой группы, то подразумѣваемъ, что выдѣляемая группа заключаетъ не больше предметовъ, чѣмъ данная, то-есть, что уменьшаемое больше вычитаемаго или равно ему. Въ случаѣ, если вычитаемое равно уменьшаемому, то у насъ не останется ни одного предмета, то-есть разность равна 0.

Задачу вычитанія можно опредѣлить нѣсколько иначе. Обозначимъ черезъ 7 число предметовъ первоначальной группы,

черезъ 3 число предметовъ выдѣляемой группы, а слѣдовательно, черезъ (7—3) число остающихся предметовъ. Очевидно, если къ числу выдѣляемыхъ предметовъ придать число оставшихся предметовъ, то должны получить число предметовъ данной группы, то-есть 3+(7—3)=7. Послѣднее равенство показываетъ, что *сумма вычитаемаго 3 и разности (7—3) равна уменьшаемому 7*. Слѣдовательно, (7—3) и 3 представляютъ два слагаемыхъ, сумма которыхъ равна 7, т.-е. *разность есть такое число, которое, будучи прибавлено къ вычитаемому, даетъ въ суммѣ съ нимъ уменьшаемое*. Другими словами, *вычитаніе есть дѣйствіе, помощью котораго по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ находится другое слагаемое*. Вотъ почему *вычитаніе называютъ дѣйствіемъ обратнымъ сложенію*.

Весьма важнымъ является слѣдующее свойство сложенія и вычитанія, которое выводится изъ разсмотрѣнія слѣдующей задачи. Предпріятіе приноситъ прибыли 800, 350 и 470 рублей, а убытку 250 и 360 руб. Спрашивается, сколько чистой прибыли принесло предпріятіе?

Чтобы найти чистую прибыль, найдемъ сперва всю прибыль и изъ нея вычтемъ весь убытокъ, т.-е. найдемъ разность (800+ + 350 + 470) — (250 + 360) = 800 + 350 + 470 — 250 — 360.

Можно вычислить прибыль иначе; напримѣръ, изъ первой прибыли вычесть первый убытокъ, къ полученному числу прибавить вторую и третью прибыль и, наконецъ, изъ полученной суммы вычесть второй убытокъ.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующему выводу: *если нужно произвести рядъ послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній, то эти дѣйствія можно производить въ какомъ угодно порядкѣ, лишь бы только при этомъ всѣ встрѣчающіяся вычитанія были возможны*.

Изъ сказаннаго непосредственно вытекаетъ *законъ распредѣлительный для умноженія относительно вычитанія*. Чтобы умножить разность на нѣкоторое число, то для этого достаточно умножить на это число уменьшаемое, а затѣмъ вычитаемое и изъ перваго произведенія вычесть второе. Напримѣръ, (10 — 7) . 3 = = 10 — 7 + 10 — 7 + 10 — 7 = 10. 3 — 7. 3.

Наконецъ, нетрудно убѣдиться, что разность не измѣняется, если къ уменьшаемому и вычитаемому прибавимъ или изъ нихъ вычтемъ одно и то же число. Основываясь на всемъ сказанномъ, легко вывести *правило вычитанія*. Напримѣръ, разность 2719—1518, на основаніи предыдущаго, вычисляется такъ: 2719— — 1518 = (2000 + 700 + 10 + 9) — (1000 + 500 + 10 + 8) = 2000 — — 1000 + 700 — 500 + 10 — 10 + 9 — 8 = 1000 + 200 + 0 + 1=1201.

Итакъ, при вычитаніи единицы вычитаемаго вычитаются изъ единицъ уменьшаемаго, десятки изъ десятковъ и т. д. Какъ воспользоваться всѣми законами вычитанія для вывода правила вычитанія въ томъ случаѣ, когда въ вычитаемомъ единицъ какого-либо разряда больше, нежели въ уменьшаемомъ (напр., 256 — 189), предоставимъ подумать читателю.

5. **Дѣленіе.** Раздѣлить какое-либо число, положимъ 45 на 5, значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на 5, даетъ въ произведеніи число 45.

Другими словами, задача дѣленія заключается въ томъ, *чтобы по данному произведенію и одному изъ множителей найти другой множитель.* Поэтому дѣленіе называютъ дѣйствіемъ, обратнымъ умноженію. Данное произведеніе носитъ названіе *дѣлимаго,* данный множитель—*дѣлителя,* а искомый множитель—*частнаго.* Чтобы найти частное, будемъ поступать слѣдующимъ образомъ: умножаемъ дѣлителя послѣдовательно на числа натуральнаго ряда 1, 2, 3 и т. д. Тогда мы или дойдемъ до произведенія, равнаго дѣлимому, либо получимъ произведеніе, меньше дѣлимаго, за которымъ будутъ слѣдовать произведенія, больше дѣлимаго. Такъ, составляя произведенія $5 . 1$, $5 . 2$, $5 . 3$ и т. д., найдемъ, что $5 . 9 = 45$. Отсюда заключаемъ, что искомое частное отъ дѣленія 45 на 5 равно 9.

Раздѣляя число 48 на 5, мы придемъ къ произведенію $5 . 9 = 45$, меньшему сравнительно съ 48; слѣдующее произведеніе будетъ $5 . 10 = 50$, т.-е. больше 48; всѣ слѣдующія произведенія будутъ еще больше 48. Такимъ образомъ, видимъ, что искомаго частнаго въ этомъ случаѣ нѣтъ.

Итакъ, дѣленіе не всегда выполнимо. Когда оно выполнимо, тогда говорятъ, что дѣлимое представляетъ число, *кратное* дѣлителя. Такъ, 45 кратное 5.

Двоеточіе : служитъ знакомъ дѣленія. Поэтому можемъ написать $45 : 5 = 9$. Если дѣленіе невыполнимо, то условились называть частнымъ то наибольшее число, произведеніе котораго на дѣлитель меньше дѣлимаго. Такъ, при дѣленіи 48 на 5, частнымъ будетъ число 9, такъ какъ число 9 наибольшее изъ всѣхъ чиселъ, произведенія которыхъ на 5 менѣе числа 48.

Разность между дѣлимымъ и произведеніемъ дѣлителя на частное называется *остаткомъ.* Ясно, что въ случаѣ, когда дѣленіе выполнимо, остатокъ равенъ 0.

При дѣленіи 48 на 5, остатокъ равенъ $48 - 9 . 5 = 48 - 45 = 3$. Изъ опредѣленія частнаго и остатка вытекаетъ, что *дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ.* Такъ, $48 = 9 . 5 + 3$.

Изъ нахожденія частнаго легко заключить, что *остатокъ всегда меньше дѣлителя.*

До сихъ поръ мы предполагали, что дѣлимое и дѣлитель не равны нулю. Положимъ теперь, что дѣлимое равно нулю, а дѣлитель отъ нуля отличенъ. Такъ какъ произведеніе только тогда равно нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, то отсюда заключаемъ, что частное равно нулю. Если и дѣлимое и дѣлитель равны нулю, то, очевидно, за частное можно принять какое угодно число.

Въ самомъ дѣлѣ, умножая дѣлитель (нуль) на какое-либо число, получимъ въ результатѣ всегда нуль, т.-е. наше дѣлимое. Итакъ, $0:0=$ какому угодно числу. Вотъ почему $0:0$ называютъ иногда *символомъ* (знакомъ) *неопредѣленности*. Наконецъ, положимъ, что дѣлимое отлично отъ нуля, а дѣлитель нуль. Мы не знаемъ числа, которое, будучи умножено на нуль, давало бы въ произведеніи число, отличное отъ нуля.

6. **Извлеченіе корня. Логарифмъ.** При возвышеніи въ степень разсматриваются показатель степени и основаніе. Соотвѣтственно этому существуютъ *двѣ* задачи, обратныхъ возвышенію въ степень:

1) *По данной степени и показателю степени найти основаніе.* и 2) *по данной степени и основанію найти показатель степени.* Первая задача называется *извлеченіемъ корня*, вторая—*нахожденіемъ логарифма.*

Оба эти дѣйствія не всегда выполнимы.

Пусть требуется, напримѣръ, найти число, третья степень котораго равна 64; мы сразу видимъ, что искомое число равно 4, такъ какъ $4^3=64$. Число 4 называется корнемъ 3-й степени числа 64 и обозначается такъ: $4=\sqrt[3]{64}$, гдѣ $\sqrt{\ }$ представляетъ знакъ *извлеченія корня*, а 3 называется *показателемъ корня*. Для краткости условились не писать *показателя корня 2*, и пишутъ $2=\sqrt{4}$. Естественнѣе всего, чтобы найти, существуетъ ли корень, напримѣръ, корень 2-й степени изъ числа 36, поступать слѣдующимъ образомъ. Возводимъ послѣдовательно числа натуральнаго ряда 1, 2, 3,... во 2-ую степень до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ либо до даннаго числа, либо до числа, которое больше даннаго. Такъ, составляя 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2,... находимъ, что $6^2=36$. Отсюда заключаемъ, что $\sqrt{36}=6$. Если бы требовалось найти $\sqrt{45}$,то изъ предыдущаго ряда квадратовъ находимъ, что $6^2=36$, $7^2=49$. Слѣдовательно, $\sqrt{45}$ не существуетъ.

Намѣченный путь вычисленія корней слишкомъ длинный. Для изученія правилъ извлеченія корней отсылаемъ къ книгѣ Бореля «Ариѳметика». Изд. Сытина. Москва, 1910 г.

Дадимъ понятіе о логарифмѣ.

Замѣтимъ, что $5^4 = 625$; слѣдовательно, 625 есть 4-ая степень отъ 5; иначе говорятъ, что 4 есть логарифмъ 625 при основаніи 5, и обозначаютъ это слѣдующимъ образомъ $4 = log_5 625$. Ясно, что $log_{10} 100 = 2$, $log_3 27 = 3$.

Убѣдиться въ существованіи логарифма какого-либо числа при данномъ основаніи и найти его можно такъ. Если требуется найти $log_5 90$, то составляемъ послѣдовательныя степени числа 5, т.-е. степени $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$. Такъ какъ среди этихъ степеней числа 90 нѣтъ, то, слѣдовательно, $log_5 90$ найти нельзя.

Чтобы найти $log_2 64$, составляемъ числа $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 64$. Отсюда видно, что $5 = log_2 64$.

3. Дробныя числа.

1. **Опредѣленіе дробей.** Положимъ, что нужно раздѣлить кусокъ сукна длиною въ 5 арш. на 8 равныхъ частей. Сдѣлать это на самомъ дѣлѣ легко; но, если бы мы захотѣли выразить длину каждаго изъ полученныхъ кусковъ, въ цѣломъ числѣ аршинъ, то сдѣлать это невозможно. Если отбросить условіе, чтобы искомая длина выражалась непремѣнно въ аршинахъ, то наша задача рѣшается просто. Въ самомъ дѣлѣ, длина куска въ вершкахъ равна $5 \times 16 = 80$ вершкамъ; дѣля теперь 80 вершковъ на 8, получимъ, что длина каждаго отрѣзка равна 10 вершкамъ, т.-е. *выражается цѣлымъ числомъ вершковъ*. Но выражая длину, не въ аршинахъ, а въ вершкахъ, мы измѣнили только единицу длины, *предположивъ, что каждая прежняя единица (аршинъ) состоитъ изъ нѣсколькихъ новыхъ единицъ (вершковъ)*. Это предположеніе мы могли сдѣлать, такъ какъ длина обладаетъ *дѣлимостью*. Благодаря тому, что аршинъ состоитъ изъ 16 вершковъ, результатъ дѣленія на 8 длины въ 5 аршинъ, выраженной въ вершкахъ, можно было представить въ видѣ цѣлаго числа. Но, очевидно, это простая случайность. Въ самомъ дѣлѣ, если бы намъ нужно было раздѣлить 5 аршинъ не на 8, а на 7 равныхъ частей, то, выражая 5 аршинъ въ вершкахъ, мы все-таки не будетъ въ состояніи выразить длину каждой части цѣлымъ числомъ. Между тѣмъ какъ первая, такъ и вторая задача совершенно одного и того же рода. Вся разница заключается лишь въ томъ, что для опредѣленной части аршина, а именно для 16-й части введено особое наименованіе «вершокъ», а для 7-хъ частей такого наименованія не введено. Но вѣдь никто намъ не мѣшаетъ разсматривать каждый аршинъ состоящимъ изъ 7 равныхъ частей, тогда въ 5 арши-

нахъ такихъ частей будетъ 5.7=35. Дѣля теперь число 35 на 7, получимъ, что длина каждаго отрѣзка сукна равна 5 новымъ единицамъ, т.-е. 5 седьмымъ единицамъ аршина. Итакъ, благодаря введенію этой новой единицы, мы выразили длину въ цѣлыхъ числахъ. Вмѣсто того, чтобы писать «5 седьмыхъ частей аршина», что слишкомъ длинно, условились писать $\frac{5}{7}$ аршина. Здѣсь число 7, стоящее подъ чертой, показываетъ, изъ сколькихъ новыхъ единицъ состоитъ первоначальная единица или, другими словами, на сколько новыхъ единицъ мы разбили первоначальную. Это число носитъ названіе *знаменателя*. Число 5, стоящее надъ чертой, показываетъ, сколько новыхъ единицъ взято нами. Оно носитъ названіе *числителя*. Все выраженіе $\frac{5}{7}$ называется дробью и выговаривается «пять седьмыхъ». Очевидно, вмѣсто 1 вершка можемъ написать $\frac{1}{16}$ аршина, вмѣсто 10 минутъ $\frac{10}{60}$ часа и т. д. Замѣтимъ, что вмѣсто того, чтобы писать 5 *какихъ-либо единицъ*, можемъ написать $\frac{5}{1}$, ибо послѣдняя дробь показываетъ, что единицу мы повторили 5 разъ. Такимъ образомъ мы пришли къ выводу, что *всякое цѣлое число можетъ быть представлено въ видѣ дроби, числитель которой равенъ самому числу, а знаменатель 1*. Изъ предыдущаго видимъ, что для опредѣленія *дроби* или, какъ иногда говорятъ, *дробнаго числа* нужно знать два числа: *числитель и знаменатель*.

Изъ самаго опредѣленія дроби слѣдуетъ, что двѣ дроби равны, если ихъ числители и знаменатели равны между собою Далѣе не трудно видѣть, что *при одинаковыхъ знаменателяхъ, та дробь больше, у которой числитель больше*. Дѣйствительно, изъ дробей $\frac{8}{25}$ и $\frac{12}{25}$ вторую слѣдуетъ считать большей, ибо она состоитъ изъ 12 двадцатьпятыхъ частей единицы, въ то время, какъ первая состоитъ изъ 8 такихъ частей. Наоборотъ, при равныхъ числителяхъ *та дробь больше, у которой знаменатель меньше;* такъ дробь $\frac{14}{27}$ больше $\frac{14}{55}$. Дѣйствительно, первая состоитъ изъ 14 двадцатьседьмыхъ частей нѣкоторой единицы, въ то время, какъ вторая состоитъ изъ 14 пятьдесятпятыхъ частей той же единицы. Если мы представимъ теперь себѣ нѣкоторую единицу, положимъ единицу длины, состоящей изъ 27 равныхъ частей, а затѣмъ ту же единицу, состоящей изъ 55 равныхъ частей, то каждая изъ первыхъ частей, несомнѣнно, больше каждой изъ

вторыхъ. Слѣдовательно, 14 первыхъ частей будутъ представлять бо́льшую длину, нежели 14 вторыхъ. До сихъ поръ мы установили условія равенства или неравенства дробей, когда у нихъ либо числители, либо знаменатели равны. Какъ же теперь установить равенство или неравенство двухъ какихъ-либо дробей, у которыхъ ни числители, ни знаменатели не равны? Для этого обратимся опять къ нашей задачѣ о дѣленіи нѣкоторой длины на равныя части. Если длину въ 5 какихъ-либо единицъ раздѣлить на 8 частей, то длина каждой части выразится дробью $\frac{5}{8}$. Положимъ теперь, что мы каждую восьмую часть единицы, въ свою очередь, раздѣлимъ на 2 части, тогда вся единица будетъ заключать уже $8 . 2 = 16$ новыхъ частей, а наша длина въ $\frac{5}{8}$ частей единицы будетъ заключать $5 . 2 = 10$ новыхъ, т.-е. 16-хъ частей единицы. Такимъ образомъ одна и та же длина можетъ быть выражена и числомъ $\frac{5}{8}$, и числомъ $\frac{10}{16}$; $\frac{10}{16} = \frac{5 . 2}{8 . 2}$. Отсюда заключаемъ, что *двѣ дроби равны, если числитель и знаменатель одной изъ нихъ равенъ числителю и знаменателю другой, умноженнымъ на одно и то же число.* Другими словами, *дробь не измѣняется, если числителя и знаменателя ея умножить или раздѣлить на одно и то же число.* О возможности *дѣленія* и числителя, и знаменателя на одно и то же число заключаемъ изъ того, что дробь $\frac{10}{16}$ превращается въ дробь $\frac{5}{8}$, если мы ея числителя 10 и знаменателя 16 раздѣлимъ одновременно на число 2. Пользуясь послѣднимъ свойствомъ, можно *упрощать* дроби, дѣля и числителя и знаменателя на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя. Это упрощеніе носитъ названіе *сокращенія дробей.* Изъ предыдущаго слѣдуетъ тоже, что можно любыя дроби привести къ такому виду, чтобы ихъ знаменатели были равны, т.-е. *можно привести любыя дроби къ общему знаменателю.* Пусть имѣемъ двѣ дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{9}{14}$. Наименьшее число, дѣлящееся одновременно и на 8, и на 14 будетъ 56. Такое число называется ихъ *наименьшимъ кратнымъ*[1]). Умножая числителя и знаменателя первой дроби на

[1]) Какъ находить *наименьшее кратное* число данныхъ чиселъ, смотри въ книгѣ Борель, «Ариѳметика», стр. 83.

56 : 8=7, а числителя и знаменателя 2-й—на 56 : 14 = 4, получаемъ $\frac{5}{8}=\frac{5\,.\,7}{8\,.\,7}=\frac{35}{56}$ и $\frac{9}{14}=\frac{9\,.\,4}{14\,.\,4}=\frac{36}{56}$.

2. **Сложеніе и вычитаніе дробей.** Переходимъ къ дѣйствіямъ надъ дробями. Пусть требуется найти длину веревки, составленной изъ двухъ частей: первой—длиною въ $\frac{5}{7}$ аршинъ и второй—длиною въ $\frac{3}{11}$ аршинъ. Если бы объ длины выражались цѣлыми числами, то длину всей веревки мы получили бы, *складывая* длины ея частей. Вотъ почему дѣйствіе, помощью котораго въ разсматриваемой задачѣ по двумъ даннымъ длинамъ *безъ новаго измѣренія* находится длина всей веревки, называется *сложеніемъ* дробей $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{11}$. Легко показать что это сложеніе сводится къ сложенію цѣлыхъ чиселъ. Дѣйствительно, приведемъ наши дроби къ одному знаменателю, тогда получимъ $\frac{5}{7}=\frac{55}{77}$ и $\frac{3}{11}=\frac{21}{77}$. Итакъ, первая длина равна 55 семидесятиседьмымъ частямъ аршина, а вторая составляетъ 21 такую же часть. Поэтому вся веревка будетъ заключать 55+21=76 разсматриваемыхъ частей. Для обозначенія сложенія дробей пользуются тѣми же знаками, что и для сложенія цѣлыхъ чиселъ. Поэтому напишемъ $\frac{5}{7}+\frac{3}{11}=\frac{55}{77}+\frac{21}{77}=\frac{55+21}{77}=\frac{76}{77}$. Итакъ, получаемъ *правило сложенія дробей: для полученія суммы двухъ дробей приводимъ эти дроби къ общему знаменателю; сложивши полученные такимъ образомъ числители, найдемъ числитель суммы; знаменателемъ же ея будетъ общій знаменатель данныхъ дробей.*

Совершенно такъ же выводится правило вычитанія дробей, если подъ вычитаніемъ будемъ подразумѣвать, какъ и при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ, дѣйствіе, обратное сложенію. Такъ $\frac{8}{9}-\frac{5}{12}=\frac{32}{36}-\frac{15}{36}=\frac{32-15}{36}=\frac{17}{36}$. Замѣтимъ, что такъ какъ сложеніе и вычитаніе дробей сводится къ сложенію и вычитанію цѣлыхъ чиселъ, то *всѣ законы, выведенные для сложенія и вычитанія цѣлыхъ чиселъ, напримѣръ, законъ переместительный и сочетательный, имѣютъ мѣсто также при сложеніи и вычитаніи дробей.*

3. **Умноженіе дробей.** Мы уже знаемъ, что дробь не измѣняется, если мы числителя и знаменателя ея умножимъ на одно и то же число. Является вопросъ: что сдѣлается съ дробью,

если мы умножимъ на какое-либо цѣлое число одного ея числителя или одного ея знаменателя. Умножимъ, напримѣръ, числителя дроби $\frac{5}{9}$ на 4, т.-е. составимъ дробь $\frac{5 \cdot 4}{9}$. Такъ какъ $5 \cdot 4 = 5+5+5+5$, то послѣднюю дробь можно представить въ видѣ $\frac{5+5+5+5}{9}$. Подобная же дробь представляетъ сумму четырехъ дробей, равныхъ $\frac{5}{9}$, т.-е. $\frac{5 \cdot 4}{9} = \frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}$. Если дробь $\frac{5}{9}$ представляетъ нѣкоторую длину, то, очевидно, дробь $\frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}$ представляетъ длину, въ 4 раза большую. Поэтому дробь $\frac{5 \cdot 4}{9} = \frac{20}{9}$ въ четыре раза больше дроби $\frac{5}{9}$. Итакъ, *отъ умноженія числителя дроби на цѣлое число дробь увеличивается во столько разъ, сколько единицъ имѣетъ это число.*

Возьмемъ по прежнему нашу дробь $\frac{5}{9}$ и умножимъ ея знаменателя на 4; получаемъ дробь $\frac{5}{9 \cdot 4}$. Если теперь умножимъ числителя послѣдней дроби на 4, то получимъ дробь $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{5}{9}$. Но такъ какъ отъ умноженія числителя на 4 дробь увеличилась въ 4 раза, то отсюда заключаемъ, что дробь $\frac{5}{9}$ въ 4 раза больше дроби $\frac{5}{9 \cdot 4}$ или, наоборотъ, дробь $\frac{5}{9 \cdot 4}$ въ 4 раза меньше дроби $\frac{5}{9}$. Итакъ. *отъ умноженія знаменателя на цѣлое число дробь уменьшается во столько разъ, сколько единицъ имѣетъ это число.*

Разсмотримъ теперь слѣдующую задачу: фунтъ муки стоитъ $\frac{5}{4}$ копейки, сколько стоитъ $\frac{3}{8}$ фунта? Если бы цѣна фунта муки выражалась цѣлымъ числомъ и требовалось бы найти цѣну цѣлаго числа фунтовъ, то пришлось бы перемножить здѣсь два цѣлыхъ числа. *Поэтому дѣйствіе, помощью котораго мы вычислимъ стоимость $\frac{3}{8}$ ф. муки, стоющей $\frac{5}{4}$ коп. за фунтъ, мы назовемъ также умноженіемъ дроби $\frac{5}{4}$ на $\frac{3}{8}$.* Разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ: если фунтъ муки стоитъ $\frac{5}{4}$ коп., то $\frac{1}{8}$ его стоитъ въ 8 разъ менѣе; но, чтобы найти дробь въ 8 разъ меньшую $\frac{5}{4}$, нужно умножить знаменателя этой дроби на 8, т.-е. со-

ставить дробь $\frac{5}{4.8}$. Мы нашли стоимость $\frac{1}{8}$ фунта, а чтобы найти стоимость 3 восьмыхъ, увеличимъ стоимость одной восьмой въ 3 раза. На основаніи предыдущаго мы должны для этого умножить числителя послѣдней дроби на 3. Итакъ, искомая стоимость равна $\frac{5.3}{4.8}$. *Послѣднюю дробь мы назвали произведеніемъ дробей* $\frac{5}{4}$ и $\frac{3}{8}$. *Это произведеніе будемъ по прежнему обозначать черезъ* $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{8}$, или $\frac{5}{4} \times \frac{3}{8}$. *Поэтому имѣемъ* $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5.3}{4.8}$. Итакъ, *произведеніе двухъ дробей представляетъ дробь, составленную по такому правилу: числителемъ ея служитъ произведеніе числителей данныхъ дробей, а знаменателемъ—произведеніе знаменателей.* Такъ какъ умноженіе дробей сводится къ умноженію цѣлыхъ чиселъ, то оно подчиняется законамъ перемѣстительному, сочетательному и распредѣлительному. Распространяя правило умноженія дробей на тотъ случай, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, заключаемъ, что *произведеніе равно нулю только тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю.*

Если числитель равенъ знаменателю, то, очевидно, дробь равна единицѣ, ибо, взявши 7 седьмыхъ, 5 пятыхъ или 4 четверти какой-либо единицы, получимъ въ результатѣ самое единицу. Если числитель данной дроби меньше ея знаменателя, то такая дробь меньше единицы, и ее называютъ *правильной дробью.* Если числитель дроби больше ея знаменателя, то такую дробь называютъ *неправильной.* Каждую неправильную дробь можно представить въ видѣ суммы цѣлаго числа съ дробью или, какъ говорятъ, въ видѣ *смѣшаннаго числа.* Дѣйствительно, возьмемъ неправильную дробь $\frac{17}{3}$. Дѣля 17 на 3, получаемъ въ частномъ цѣлое число 5 и въ остаткѣ цѣлое число 2, меньшее 3. Какъ мы знаемъ $17=3.5+2$, а потому дробь $\frac{17}{3}$ представляется въ видѣ суммы $\frac{17}{3} = \frac{3.5+2}{3} = \frac{3.5}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$; здѣсь 5 цѣлое число, а $\frac{2}{3}$ правильная дробь. Наоборотъ, любое число вида $3+\frac{4}{5}$, гдѣ 3 цѣлое число, а $\frac{4}{5}$ правильная дробь, можетъ быть представлено въ видѣ неправильной дроби $\frac{3.5+4}{5}$, или $\frac{19}{5}$.

4. **Дѣленіе дробей.** Дѣленіе опредѣляется какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Поэтому раздѣлить дробь $\frac{3}{5}$ на дробь $\frac{2}{7}$ значитъ найти такую дробь, произведеніе которой на $\frac{2}{7}$ равно дроби $\frac{3}{5}$. Назовемъ *обратной* данной дроби дробь, у которой числитель равенъ знаменателю, а знаменатель равенъ числителю данной дроби. Напримѣръ, дробь $\frac{5}{6}$ обратна дроби $\frac{6}{5}$. Тогда, легко убѣдиться, что *частное отъ дѣленія* $\frac{3}{5}$ *на* $\frac{2}{7}$ *равно произведенію дѣлимаго* $\frac{3}{5}$ *на дробь, обратную дѣлителю, т.-е. на* $\frac{7}{2}$, *или* $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3.7}{5.2}$. Въ самомъ дѣлѣ, умножая дробь $\frac{3.7}{5.2}$ на дѣлителя $\frac{2}{7}$, получимъ $\frac{3.7}{5.2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3.7.2}{5.2.7}$, или, сокращая на $7 . 2$, найдемъ, что $\frac{3.7}{5.2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$.

Мы ввели дроби, разсматривая задачи, но до сихъ поръ не показали, что *дробь есть частное отъ дѣленія числителя на знаменателя*, т.-е. что дробь представляетъ такое число, которое, будучи умножено на знаменатель, даетъ въ результатѣ числитель. Чтобы доказать это, умножимъ, напримѣръ, дробь $\frac{3}{5}$ на дробь $\frac{5}{1}$, представляющую знаменатель; получаемъ $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3.5}{5.1} = \frac{3}{1}$, что и нужно было доказать. Отсюда заключаемъ, что, *вводя дроби, мы дѣлаемъ дѣйствіе дѣленіе всегда выполнимымъ*.

Вводя понятіе о дробяхъ, мы говорили, что дроби примѣняются къ счету предметовъ, обладающихъ свойствомъ *дѣлимости*.

Однако, вѣроятно, читателю приходилось встрѣчать выраженія, что въ такой-то губерніи на крестьянскій дворъ приходится $\frac{1}{2}$ лошади или $\frac{1}{4}$ коровы, или что въ такой-то области на квадратную версту приходится $125\frac{1}{20}$ жителей. Такимъ образомъ, здѣсь примѣняются дроби къ предметамъ недѣлимымъ, лошадямъ, коровамъ, людямъ. Но нетрудно видѣть, что дроби имѣютъ здѣсь

условный смыслъ для сокращеннаго и болѣе наглядnаго описанія фактовъ. Такъ, когда говорятъ, что на крестьянскій дворъ приходится $\frac{1}{4}$ коровы, то это значитъ, что въ общемъ на каждые четыре двора приходится по коровѣ. Когда говорятъ, что на квадратную версту приходится $125\frac{1}{20}$ жителей, то это значитъ, что на 20 квадратныхъ верстъ приходится 2501 жителей. Такое условное употребленіе дробей особенно удобно для сравненія различныхъ фактовъ, какъ зажиточность крестьянъ различныхъ деревень или какъ плотность населенія различныхъ губерній.

5. **Десятичныя дроби.** *Десятичными называются дроби*, знаменатель которыхъ представляетъ 1 съ нѣсколькими нулями, напримѣръ $\frac{3}{10}$, $\frac{57}{100}$, $\frac{4113}{1000}$. Число 4113 можно написать такъ $4000+100+10+3$. Поэтому послѣдняя дробь можетъ быть представлена слѣдующимъ образомъ $\frac{4113}{1000}=\frac{4000}{1000}+\frac{100}{1000}+\frac{10}{1000}+$ $+\frac{3}{1000}=4+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}$.

Вмѣсто такого сложнаго выраженія съ четырьмя слагаемыми *условимся* писать предыдущее число такъ: 4,113. Подъ этимъ обозначеніемъ мы понимаемъ, *что цифры влѣво отъ запятой обозначаютъ цѣлыя числа, первая цифра вправо отъ запятой обозначаетъ десятыя доли цѣлаго, вторая—сотыя доли, третья—тысячныя и такъ далѣе. Нулемъ обозначаютъ отсутствіе тѣхъ чиселъ или долей, которыхъ въ числѣ не заключается.* Такимъ образомъ напишемъ $\frac{3}{10}=0{,}3$, $\frac{57}{100}=0{,}57$, $\frac{5}{100}=0{,}05$.

Арифметическія дѣйствія надъ десятичными дробями производятся такъ, какъ надъ цѣлыми числами. Совершая арифметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами, мы дѣлаемъ эти дѣйствія надъ единицами, десятками, сотнями и такъ далѣе, при чемъ, когда получаются единицы высшаго разряда, мы приписываемъ ихъ къ единицамъ разряда, къ которымъ онѣ принадлежатъ. При дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями слѣдуетъ помнить, что, кромѣ единицъ, ихъ десятковъ, сотенъ и такъ далѣе, у насъ есть еще десятыя ихъ доли, сотыя и такъ далѣе. Напримѣръ, $0{,}2+0{,}3=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=0{,}5$; $0{,}7+0{,}6=\frac{7}{10}+$ $+\frac{6}{10}=\frac{13}{10}=1{,}3$; $0{,}5-0{,}4=0{,}1$; $0{,}7-0{,}3=0{,}4$.

Умножая $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, мы получаемъ $\frac{1}{100}$. Поэтому $0,2 \times 0,3 = 0,06$; $0,3 \times 0,7 = 0,21$; $0,1 \times 2,35 = 0,235$. При дѣленіи $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} = 1$, поэтому легко видѣть, что $0,3 : 0,4 = \frac{3}{10} : \frac{4}{10} = \frac{3}{4}$.

Очень легко простыя дроби обращать въ десятичныя, производя дѣленіе числителя на знаменателя, умноживши предварительно числитель на единицу съ нѣсколькими нулями, но поставивъ передъ ними запятую, чтобы не получить число больше даннаго. Напримѣръ, $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$; $\frac{3}{5} = \frac{3,0}{5} = 0,6$; $\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0,75$. Но иногда дѣленія нельзя произвести нацѣло; тогда получается такъ называемая *періодическая дробь*. Напримѣръ, $\frac{1}{3} = \frac{1,0000}{3} = 0,33333...$ Сколько бы нулей мы ни приписали послѣ запятой въ числителѣ и сколько бы мы ни продолжали дѣленіе, всегда въ частномъ будетъ получаться еще 3, а въ остаткѣ 1 [1]).

Благодаря простотѣ дѣйствій надъ десятичными дробями очень удобно пользоваться ими при вычисленіяхъ. Всѣ таблицы различныхъ чиселъ обыкновенно составляются съ десятичными дробями.

4. Приближенныя вычисленія.

Приближеннымъ значеніемъ даннаго числа называется число, которое отличается достаточно мало отъ даннаго числа. Такъ напримѣръ, величины, которыя мы опредѣляемъ при помощи измѣреній, получаются всегда съ нѣкоторою погрѣшностью, вслѣдствіе неточности инструментовъ.

Разность между истиннымъ значеніемъ какой-либо величины и ея приближеннымъ значеніемъ называется *абсолютной погрѣшностью* послѣдняго. Если, измѣряя какую-либо длину въ цѣлыхъ аршинахъ и вершкахъ, будемъ пренебрегать остаткомъ, не составляющимъ цѣлаго вершка или, наоборотъ, прибавимъ къ остатку недостающее до цѣлаго вершка, то будемъ говорить, что длина измѣрена съ точностью до 1 вершка. Поэтому погрѣшность нашего измѣренія не превосходитъ 1 вершка. Подобнымъ же образомъ, если при обращеніи дроби $\frac{13}{7}$ въ десятичную, мы вы-

[1]) Отсылаемъ читателя для болѣе подробнаго ознакомленія съ десятичными дробями къ сочиненію Эмиль Борель. «Ариѳметика». Переводъ А. Долгова. Подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва 1910 г., глава VIII, страница 131.

числимъ цѣлыя единицы, десятыя и сотыя доли и отбросимъ меньшія доли, то получимъ приближенное значеніе 1,85; погрѣшность которую мы при этомъ сдѣлаемъ не будетъ превосходить 1,01.

Обратно, если намъ дано значеніе какой-либо величины, напримѣръ, 234 съ точностью до единицы, то это значитъ, что истинное значеніе разсматриваемой величины заключается между 235 и 233.

Производя арифметическія дѣйствія съ неточными данными мы, конечно, и результаты получимъ неточные, при чемъ всегда важно опредѣлить совершаемую при этомъ погрѣшность.

Если мы вычисляемъ сумму слагаемыхъ, данныхъ съ извѣстной погрѣшностью, то, очевидно, *погрѣшность суммы равна суммѣ погрѣшностей слагаемыхъ.* Если извѣстны, напримѣръ, разстоянія между двумя станціями въ 40 верстъ и между второй и третьей станціей въ 60 верстъ, каждое съ точностью до 1 сажени, то разстояніе между первой и третьей станціями, равное 100 верстамъ, можетъ имѣть погрѣшность въ 2 сажени.

Подобнымъ же образомъ *погрѣшность разности равна суммѣ погрѣшностей уменьшаемаго и вычитаемаго.* Такъ, напримѣръ, принимая для разности двухъ отрѣзковъ веревки въ 6 сажень и 4 сажени значеніе въ 2 сажени, мы можемъ сдѣлать погрѣшность въ 2 вершка, если каждый изъ кусковъ веревки измѣренъ съ точностью до одного вершка. Поэтому если бы мы желали получить сумму двухъ слагаемыхъ съ точностью до 0,1, то должны были бы опредѣлить каждое слагаемое съ точностью до 0,05. Не трудно убѣдиться, что *при умноженіи приближеннаго числа на точное число погрѣшность умножается, а при дѣленіи дѣлится на это число.*

Равнымъ образомъ можно опредѣлить погрѣшность при умноженіи двухъ приближенныхъ чиселъ (что часто приходится дѣлать на практикѣ). Взявъ, положимъ, два числа 30 (съ точностью до 1) и 40 (съ точностью до 2) получимъ въ произведеніи 1200. Истинная же величина произведенія можетъ заключаться между произведеніями 31×42 и 29×38. Представляя первое произведеніе 31×42 слѣдующимъ образомъ $(30+1)\ (40+2)$, видимъ, что къ произведенію 30.40 придется прибавить сумму произведеній $1\times40+2\times30+1\times2$, что составитъ 102. Слѣдовательно, наше произведеніе можетъ имѣть погрѣшность въ 102 единицы. Итакъ, *погрѣшность произведенія двухъ приближенныхъ чиселъ равна суммѣ произведеній погрѣшности перваго числа на второе, погрѣшности второго числа на первое и погрѣшностей обоихъ чиселъ.*

Указаніе на абсолютную погрѣшность не вполнѣ опредѣляетъ достоинство полученнаго приближеннаго результата. Понятно, что погрѣшность въ 5 саженъ при измѣреніи какого-либо разстоянія въ 300 верстъ менѣе значительна, чѣмъ погрѣшность въ 1 аршинъ при измѣреніи балки въ 2 сажени длиною. Достоинство результата лучше всего характеризуется указаніемъ на *относительную погрѣшность*, которая представляетъ собою *отношеніе* абсолютной погрѣшности къ самому значенію величины, т.-е. частное отъ дѣленія абсолютной погрѣшности на самое значеніе величины. Такъ, напримѣръ, погрѣшность въ 5 саженъ при разстояніи въ 300 верстъ представляетъ относительную погрѣшность, равную $\frac{5}{300.500} = \frac{1}{30000}$.

Но погрѣшность въ 1 аршинъ при длинѣ въ 2 сажени, т.-е. въ 6 аршинъ, представляетъ относительную погрѣшность въ $\frac{1}{6}$.

5. Числа ирраціональныя.

Числа цѣлыя и дробныя называются числами раціональными. Кромѣ этихъ чиселъ существуютъ еще такъ называемыя *ирраціональныя* (или *несоизмѣримыя*). Эти числа можно представить какъ десятичныя дроби, допускающія безчисленное множество десятичныхъ знаковъ, подобныя дробямъ, которыя получаются при обращеніи простой дроби въ десятичную, когда дѣленіе не можетъ быть закончено [1]). Предположимъ, требуется узнать сколько цѣлыхъ вершковъ и его частей содержитъ длина данной доски. Пусть наибольшее число вершковъ, которое уложилось будетъ 43. Откладываемъ на оставшейся части десятыя доли вершка, на оставшейся послѣ этого части сотыя и т. д. Предположимъ мы нашли, что десятыхъ долей отложилось 7, сотыхъ 5, тысячныхъ 2 и т. д.

Напишемъ послѣдовательные полученные результаты

43; 43,7; 43,75; 43,752.

Напишемъ второй рядъ чиселъ, прибавляя по 1 къ послѣдней цифрѣ соотвѣтствующаго числа верхняго ряда

44; 43,8; 43,76; 43,753;...

Числа послѣдняго ряда всѣ больше искомой длины доски. Такимъ образомъ числа перваго столбца будутъ приближенными значеніями даннаго числа съ точностью до 1, числа 2-го столбца съ точностью до 0,1 и т. д.

Пока какой-либо изъ частей вершка не уложится цѣлое число разъ въ полученномъ остаткѣ длины доски, до тѣхъ поръ мы

[1]) См. стр. 22.

не получимъ точнаго измѣренія требуемой длины и можемъ говорить только о ея приближенномъ значеніи, точность котораго опредѣляется указанными двумя рядами чиселъ.

Но если бы мы могли быть увѣрены, что измѣренія не могутъ быть закончены, то тогда измѣряемая длина доски представляла бы ирраціональное число, и наши оба ряда чиселъ могли бы быть продолжены сколь угодно далеко.

Эти два ряда и опредѣляютъ собою искомое ирраціональное число.

Очевидно, во-первыхъ, что каждое изъ чиселъ перваго ряда меньше каждаго изъ чиселъ второго ряда, во-вторыхъ, что всѣ числа перваго ряда, оставаясь меньше ирраціональнаго числа, постепенно возрастаютъ, а всѣ числа второго ряда, оставаясь больше ирраціональныхъ чиселъ, постепенно убываютъ. Вслѣдствіе этого всегда возможно найти числа, которыя бы отличались отъ искомаго не болѣе, чѣмъ на какую угодно малую наперед заданную величину.

Для произведенія дѣйствій надъ ирраціональными числами послѣднія могутъ быть замѣнены ихъ приближенными значеніями, надъ которыми указанныя дѣйствія и производятся, при чемъ результатъ можетъ быть полученъ съ желаемою точностью.

Примѣромъ ирраціональныхъ чиселъ могутъ служить числа вида $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{6}$ и т. п., называемыя радикалами. Возьмемъ, напримѣръ, $\sqrt{2}$. Нельзя найти ни цѣлаго числа, ни дробнаго, которое будучи возвышено во вторую степень давало бы 2. Но мы знаемъ, что 1^2 меньше 2 и 2^2 больше 2. Слѣдовательно, $\sqrt{2}$ заключается между 1 и 2, которыя представляютъ собой приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ точностью до 1. Беремъ далѣе рядъ чиселъ

1; 1,1; 1,2; 1,3;... 1,9; 2.

Возвышая ихъ во вторую степень, заключаемъ, что: $(1,4)^2$ меньше 2, а $(1,5)^2$ больше 2. Слѣдовательно $\sqrt{2}$ заключается между 1,4 и 1,5, которыя представляютъ собой приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ точностью до 0,1. Продолжая поступать такимъ же образомъ дальше, мы составимъ два ряда чиселъ

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142...
2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143...

которыя и опредѣляютъ собою $\sqrt{2}$.

Указанный способъ вычисленія приближенныхъ значеній корней слишкомъ длинный. Желающихъ ознакомиться съ другими правилами отсылаемъ къ книгѣ Бореля «Ариѳметика».

При изученіи цѣлыхъ чиселъ [1]) было указано, что, если требуется вычислить, положимъ, $\sqrt{45}$, то возводя во вторую степень рядъ натуральныхъ чиселъ, мы заключаемъ, что $\sqrt{45}$ не существуетъ. Теперь мы видимъ что $\sqrt{45}$ представляетъ ирраціональное число, которое опредѣляется вышеуказанными рядами раціональныхъ чиселъ.

Существуетъ еще другой способъ изображенія радикаловъ въ видѣ чиселъ съ дробными показателями, а именно условились показателя корня приписывать въ видѣ знаменателя къ показателю степени числа. Такъ, напримѣръ, вмѣсто $\sqrt[3]{5}$ пишутъ $5^{\frac{1}{3}}$ и, наоборотъ, $2^{\frac{1}{2}}$ представляетъ собой $\sqrt{2}$; $7^{3,0}=\sqrt[10]{7^3}$ и т. п.

Введя понятіе о дробныхъ показателяхъ, мы можемъ распространить и понятіе о логарифмахъ, подразумѣвая подъ log дробный показатель степени. Желающихъ ознакомиться подробнѣе съ теоріей логарифмовъ, а также и съ примѣненіемъ этой теоріи къ производству вычисленій, отсылаемъ къ книгѣ *Бореля* «Ариѳметика и Алгебра».

6. Отрицательныя числа.

1. **Опредѣленіе.** Каждый знаетъ, что тепло и холодъ измѣряютъ градусами. Обыкновенно говорятъ: тепла столько-то градусовъ, напримѣръ, 10°, или холода, напримѣръ, 15°. Вмѣсто того, чтобы говорить 10° тепла, часто говорятъ 10° *выше нуля*, или $+10°$, а вмѣсто 15° мороза говорятъ 15° *ниже* нуля, или $-15°$. Такимъ образомъ знаки $+$ и $-$, стоящіе передъ числомъ, которое обозначаетъ число градусовъ, замѣняютъ слова «тепла» или «мороза», «выше нуля» или «ниже нуля».

Назовемъ числа, передъ которыми стоитъ знакъ $+$, *положительными*, а тѣ, передъ которыми стоитъ знакъ $-$, *отрицательными*. Въ видахъ сокращенія условились иногда знака $+$ не ставить, такъ что подъ знакомъ 20 всегда подразумѣваютъ число $+20$, подъ знакомъ 5 подразумѣваютъ число $+5$ и т. д. Число, разсматриваемое независимо отъ знака, носитъ названіе *абсолютнаго значенія* числа со знакомъ. Абсолютное значеніе $+5$ есть число 5, а абсолютное значеніе -19 есть 19.

Положительными и отрицательными числами можно пользоваться во всѣхъ случаяхъ, когда приходится производить отсчетъ въ двухъ направленіяхъ. Такъ, напримѣръ, при помощи положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ можно опредѣлять раз-

[1]) См. стр. 13.

стоянія, откладываемыя отъ опредѣленной какой-либо точки въ одномъ или другомъ направленіи. Далѣе можно обозначать положительными числами время, протекшее отъ Р. Х., и отрицательными—время до Рождества. Можно обозначать наличный капиталъ положительнымъ числомъ, а долгъ—отрицательнымъ. Вообще, *если какое-либо явленіе можетъ быть какъ-либо измѣрено, т.-е. явленію соотвѣтствуетъ число, и если оно можетъ измѣняться въ двухъ различныхъ направленіяхъ, то измѣненія въ одномъ направленіи можно обозначать положительными числами, а измѣненія въ другомъ—отрицательными.* Такъ, на градусникѣ всякое повышеніе ртутнаго столбика обозначается положительнымъ числомъ, показывающимъ, на сколько дѣленій поднялся ртутный столбикъ; пониженіе ртутнаго столбика обозначается соотвѣтственнымъ отрицательнымъ числомъ. Такимъ образомъ, если температура съ нѣкотораго числа градусовъ поднялась на 5°, то скажемъ, что температура измѣнилась на $+5°$. Если температура понизилась на 4°, будемъ говорить, что температура измѣнилась на $-4°$.

Если приращеніе населенія въ данной мѣстности условимся обозначать положительными числами, то въ такомъ случаѣ убыль населенія будетъ выражаться отрицательными числами.

2. **Сложеніе.** Пусть въ 8 часовъ утра термометръ показываетъ $+10°$ и затѣмъ къ 12 час. температура измѣнилась на $+5°$. Чтобы узнать, какова будетъ конечная температура, мы должны, очевидно, *сложить* показаніе термометра въ 8 час. съ измѣненіемъ его показанія; въ результатѣ находимъ, что $+10° + (+5°) = +15°$. Замѣтимъ, что знакъ $+$, стоящій въ скобкахъ передъ 5°, показываетъ направленіе измѣненія температуры. Положимъ теперь, что первоначальная температура была $-10°$ и затѣмъ измѣнилась на $-5°$. Опять-таки, чтобы найти окончательную температуру, *сложимъ* первоначальное показаніе термометра и соотвѣтствующее измѣненіе; въ результатѣ получимъ $-15°$. Это обстоятельство мы запишемъ такъ: $-10° + (-5°) = -15°$.

Здѣсь знакъ $-$, стоящій передъ 5° въ скобкахъ, показываетъ также направленіе измѣненія температуры. Итакъ, если первоначальное показаніе термометра и измѣненіе температуры обозначены числами одного и того же знака, то окончательная температура будетъ числомъ съ тѣмъ же знакомъ, и абсолютное ея значеніе равно суммѣ абсолютныхъ значеній первоначальной температуры и ея измѣненія. Дѣйствіе, при помощи котораго найдена окончательная температура, мы назовемъ *сложеніемъ*, а результатъ его—*суммой*.

Условимся называть сложеніемъ дѣйствіе, при помощи котораго по начальной температурѣ и ея измѣненію находится окончательная температура, будетъ ли при этомъ начальная температура и ея измѣненія выражаться числами одного и того же или различныхъ знаковъ. Посмотримъ, какъ изъ этого *опредѣленія* сложенія вывести *правило* сложенія чиселъ съ различными знаками. Разсмотримъ 4 слѣдующихъ случая:

1) начальная температура $+10°$ измѣненіе $-5°$
2) » » $-10°$ » $+5°$
3) » » $+4°$ » $-6°$
5) » » $-3°$ » $+7°$.

Очевидно, что въ первомъ случаѣ окончательная температура будетъ $+5°$, во второмъ $-5°$, въ третьемъ $-2°$ и въ четвертомъ $+4°$. Поэтому, согласно съ *нашимъ опредѣленіемъ сложенія*, находимъ, что

$$+10°+(-5°)=+5°; \qquad -10°+(+5°)=-5°;$$
$$+4°+(-6°)=-2°; \qquad -3°+(+7°)=+4°.$$

Если разсмотрѣть эти *суммы*, то увидимъ, что, во-первыхъ, *знакъ суммы тотъ же что и знакъ слагаемаго, абсолютное значеніе котораго больше*. Такъ, въ первомъ случаѣ, абсолютное значеніе положительнаго слагаемаго 10 больше абсолютнаго значенія отрицательнаго слагаемаго ($-5°$), поэтому сумма имѣетъ знакъ $+$. То же имѣетъ мѣсто и въ четвертомъ случаѣ; наоборотъ, во 2-мъ и 3-мъ случаѣ абсолютное значеніе отрицательнаго слагаемаго больше, поэтому и сумма имѣетъ знакъ $-$.

Во-вторыхъ, замѣчаемъ, что *абсолютное значеніе суммы равно разности большаго и меньшаго абсолютнаго значенія слагаемыхъ*. Въ самомъ дѣлѣ, абсолютное значеніе разсматриваемыхъ суммъ опредѣляется слѣдующими равенствами:

$$5=10-5, \quad 5=10-5, \quad 2=6-4, \quad 4=7-3.$$

Замѣтимъ еще слѣдующее; допустимъ, что первоначальная температура была $+5°$ и измѣненіе ея было $-5°$ или первоначальная температура $-9°$ и измѣненіе ея $+9°$; въ обоихъ случаяхъ конечная температура $=0$, т.-е. $+5°+(-5°)=0$, $(-9°)+(+9°)=0$. Вообще *сумма двухъ чиселъ съ различными знаками, равныхъ по абсолютному значенію, всегда равна нулю*. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему *правилу сложенія: если*

оба слагаемыхъ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, то сумма ихъ имѣетъ тотъ же знакъ, и абсолютное значеніе суммы равно суммѣ абсолютныхъ значеній слагаемыхъ. Если слагаемыя имѣютъ различные знаки, то сумма ихъ имѣетъ знакъ того слагаемаго, котораго абсолютное значеніе больше; что касается абсолютнаго значенія суммы, то оно равно разности большаго и меньшаго абсолютнаго значенія слагаемыхъ. Наконецъ, сумма равныхъ по абсолютному значенію и противоположныхъ по знаку чиселъ равна нулю. Нетрудно видѣть, что опредѣленная нами *сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ (законъ переместительный).* Подъ суммой нѣсколькихъ слагаемыхъ будемъ подразумѣвать сумму, которую получимъ, когда къ суммѣ первыхъ двухъ слагаемыхъ прибавимъ третье, полученную сумму сложимъ съ четвертымъ и т. д. Мы имѣемъ, напримѣръ, $(+4)+(-7)+(-6)+(+5)=$ $=(-3)+(-6)+(+5)=(-9)+(+5)=-4$. Легко видѣть, что ту же сумму получимъ, сложивши между собой всѣ положительныя, а затѣмъ всѣ отрицательныя слагаемыя и найдя затѣмъ сумму полученныхъ чиселъ. Дѣйствительно, $(+4)+(-7)+$ $+(-6)+(+5)=(+9)+(-13)=-4$, или $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+$ $+\left(+\frac{1}{8}\right)+\left(-1\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{5}{8}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)=-1\frac{7}{8}$. Вообще, при вычисленіи суммы можно замѣнять какое угодно число слагаемыхъ ихъ суммой (*законъ сочетательный*).

3. **Вычитаніе.** Мы опредѣляли выше[1]) вычитаніе, какъ дѣйствіе обратное сложенію, т.-е. дѣйствіе, при помощи котораго по суммѣ и одному слагаемому находится второе слагаемое. То же *опредѣленіе вычитанія* остается и теперь, но при этомъ будемъ помнить, что подъ сложеніемъ мы теперь подразумѣваемъ то дѣйствіе, о которомъ только что говорили. Такъ какъ наше сложеніе подчиняется закону перемѣстительному, то правило для отысканія любого изъ слагаемыхъ по суммѣ и другому слагаемому будетъ одно и то же.

Данную сумму, какъ и прежде, назовемъ *уменьшаемымъ*, данное слагаемое—*вычитаемымъ*, а искомое—*разностью. Назовемъ два числа противоположными, если ихъ знаки различны, а абсолютныя значенія одинаковы.* Напримѣръ, $+27$ и -27, -19 и $+19$ представляютъ противоположныя числа.

Возвращаемся къ примѣрамъ на опредѣленіе температуры, которыми мы пользовались при выводѣ правилъ сложенія отрицательныхъ чиселъ.

---

[1]) См. стр. 11.

Пусть теперь намъ извѣстна конечная температура и ея измѣненіе; требуется найти начальную температуру. Такъ какъ конечная температура представляетъ сумму начальной температуры и ея измѣненія, то, *по опредѣленію вычитанія*, начальная температура есть разность между конечной температурой и ея измѣненіемъ. Для перехода отъ начальной къ конечной температура должна была измѣниться на опредѣленное число градусовъ *въ опредѣленномъ направленіи*. Предположимъ, что температура будетъ измѣняться дальше такъ, чтобы опять дойти до начальнаго состоянія. Ясно, что она должна будетъ въ послѣднемъ случаѣ измѣниться на то же число градусовъ, что и раньше, но только *въ обратномъ направленіи*. Другими словами, это послѣднее измѣненіе температуры будетъ выражаться числомъ, *противоположнымъ прежнему* измѣненію. Но такъ какъ полученная теперь температура, равная начальной, представляетъ сумму температуры, бывшей до этого измѣненія и соотвѣтствующаго измѣненія температуры, то мы можемъ сказать, что *начальная температура равна конечной, сложенной съ числомъ, противоположнымъ измѣненію температуры отъ начальной до конечной*. Напримѣръ, температура съ нѣкотораго числа градусовъ понизилась на 5°, т.-е. измѣнилось на $-5°$ и дошла до $-2°$. Чтобы найти начальную температуру, мы должны повысить конечную на 5°, т.-е. измѣнить ее на $+5°$. Такимъ образомъ разность $-2°-(-5°)$ равна суммѣ $-2°+(+5°)=+3°$, или $-2°-(-5°)=-2°+(+5°)=+3°$. Сумму $-2°+(+5°)$ мы условились писать сокращенно въ видѣ $-2°+5°$. Предоставляемъ читателю убѣдиться, что если конечная температура будетъ $-3°$, а измѣненіе $+4°$, то начальная температура опредѣлится слѣдующимъ образомъ: $(-3°)-(+4°)=(-3°)+(-4°)=-3°--4°=-7°$.

Разсматривая разности $-2°-(-5°)=-2°+5°$, $(-3°)-(+4°)=-3°-4°$, видимъ, что *вычитаніе представляетъ сложеніе уменьшаемаго съ числомъ противоположнымъ вычитаемому*. Такъ какъ сложеніе наше всегда возможно, то *всегда возможно здѣсь и вычитаніе*. Далѣе нетрудно вывести изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ слѣдующее *правило вычитанія: чтобы найти разность, нужно къ уменьшаемому приписать вычитаемое съ обратнымъ знакомъ и вычислить полученную такимъ образомъ сумму*. Такъ, $-457-(+678)=-457-678=-1135$; $(+2)-(+4)=+2-4=-2$.

Выраженіе $(-4)+(+6)-(-3)+(-2)-(+5)$ представляетъ число, которое получается, если къ -4 придадимъ $+6$, изъ найденной суммы вычтемъ -3, къ полученному результату придадимъ -2 и, наконецъ, изъ найденнаго числа

вычтемъ $+5$. Такъ какъ вычитаніе какого-либо числа можетъ быть замѣнено сложеніемъ съ числомъ противоположнымъ, то наше выраженіе можно написать

$$(-4)+(+6)+(+3)+(-2)+(-5).$$

или сокращенно $-4+6+3-2-5=-2$. Сравнивая оба написанныхъ выраженія видимъ, что второе получается изъ перваго, если напишемъ, одинъ за другимъ всѣ числа, стоящія въ скобкахъ, съ ихъ знакомъ, если передъ скобкой стоитъ знакъ $+$ и съ обратнымъ знакомъ, если передъ скобкой стоитъ знакъ $-$. Такъ, напримѣръ, $(+8)-(+2)-(-10)+(-4)-(+3)=+8-2+10-4-3=+9$.

Возьмемъ сумму $-3+6-4=-1$. Очевидно, число противоположное этой суммѣ найдется, если замѣнить каждое слагаемое числомъ ему противоположнымъ, т.-е. получимъ число $+3-6+4=+1$.

Вычтемъ изъ суммы $-2+6-3$ сумму $+6-10$; другими словами, найдемъ разность $-2+6-3-(+6-10)$. Но вычесть какое-либо число значитъ къ уменьшаемому придать число противоположное вычитаемому, а число, противоположное нашему вычитаемому, будетъ, на основаніи предыдущаго, $-6+10$. Слѣдовательно, $-2+6-3-(+6-10)=-2+6-3+(-6+10)=-2+6-3-6+10=5$. Изъ сравненія написанныхъ выраженій видимъ, *чтобы вычесть какую-либо сумму положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, нужно приписать къ уменьшаемому всѣ слагаемыя вычитаемаго съ обратными знаками.*

Всякая сумма положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ называется *алгебраической суммой.*

4. **Умноженіе.** Пусть въ нѣкоторый моментъ термометръ показываетъ 0° и затѣмъ подымается на $\frac{3^\circ}{4}$ въ часъ; какова будетъ температура спустя $1\frac{1}{2}$ часа? Отвѣтъ получается сразу путемъ умноженія часового измѣненія температуры $\frac{3^\circ}{4}$ на число, выражающее время измѣненія $1\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2}$[1]).

Въ результатѣ получимъ $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$ градуса тепла.

Условія задачи мы могли выразить иначе словами, часовое измѣненіе температуры было $+\frac{3^\circ}{4}$ и это измѣненіе происходило въ теченіе $+\frac{3}{2}$ часа. Тогда все измѣненіе будетъ $+\frac{9^\circ}{8}$.

[1]) См. статью объ умноженіи дробей, стр. 18.

Число $+\frac{9}{8}$ назовемъ *произведеніемъ положительнаго числа* $+\frac{3}{4}$ *на положительное число* $+\frac{3}{2}$ и обозначимъ

$$\left(+\frac{3}{4}\right).\left(+\frac{3}{2}\right)=+\frac{9}{8}.$$

Измѣнимъ нѣсколько нашу задачу; допустимъ, что температура начала съ даннаго момента не увеличиваться, а уменьшаться на $\frac{3^\circ}{4}$ въ часъ; иначе говоря, предположимъ, что часовое измѣненіе температуры будетъ $-\frac{3^\circ}{4}$. Ясно, что за $1\frac{1}{2}$ часа прошедшихъ *отъ* даннаго момента, т.-е. за $+\frac{3}{2}$ часа, температура упадетъ на $\frac{3}{4}.\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$ градуса, т.-е. станетъ равной $-\frac{9^\circ}{8}$. Итакъ, при часовомъ измѣненіи въ $-\frac{3^\circ}{4}$, температура за $+\frac{3}{2}$ часа упадетъ на $-\frac{9^\circ}{8}$.

По сходству съ предыдущимъ, число $-\frac{9}{8}$ *назовемъ произведеніемъ отрицательнаго числа* $-\frac{3}{4}$ *на положителеное число* $+\frac{3}{4}$ и соотвѣтствующее дѣйствіе обозначимъ такъ: $\left(-\frac{3}{4}\right).\left(+\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}$.

Мы *ввели новое понятіе,* произведеніе отрицательнаго числа на положительное. По нашему *опредѣленію, полученное произведеніе представляетъ отрицательное число, абсолютное значеніе котораго равно произведенію абсолютныхъ значеній данныхъ чиселъ* $-\frac{3}{4}$ и $+\frac{3}{2}$.

Пусть въ данный моментъ температура равна 0°, и въ каждый часъ, *предшествовавшій* этому моменту, она *поднималась* на $\frac{3^\circ}{4}$; какая температура была $1\frac{1}{2}$ *часа тому назадъ?* Отвѣтъ: температура была *меньше* на $\frac{3}{4}.\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$ градуса, т.-е. равнялась $-\frac{9^\circ}{8}$. Если часовое измѣненіе температуры обозначимъ $+\frac{3^\circ}{4}$, а время протекшее *до* даннаго момента, какъ отчитываемое въ сторону

противоположную времени, протекающему *послѣ* него, мы можемъ обозначить черезъ $-\frac{3}{2}$ часа, то $-\frac{9^\circ}{8}$ представитъ искомое измѣненіе температуры. Подобно предыдущему, назовемъ число $-\frac{9}{8}$ *произведеніемъ положительнаго числа* $+\frac{3}{4}$ *на отрицательное* $-\frac{3}{2}$, и обозначимъ его такъ: $\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}$.

Такимъ образомъ по данному опредѣленію *произведеніе положительнаго числа на отрицательное представляетъ отрицательное число, абсолютное значеніе котораго равно произведенію абсолютныхъ значеній данныхъ чиселъ.*

Наконецъ, разсмотримъ задачу: въ данный моментъ температура равна 0°, *до* этого момента она *падала* на $\frac{3^\circ}{4}$ въ часъ; какая температура была $1\frac{1}{2}$ *часа тому назадъ?* Ясно, что она была *выше нуля* на $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$ градуса, т.-е. была равна $+\frac{9^\circ}{8}$. Обозначимъ часовое измѣненіе температуры черезъ $-\frac{3^\circ}{4}$, а время ея измѣненія черезъ $-\frac{3}{2}$ часа. Вполнѣ *естественно и въ этомъ случаѣ полученное число* $+\frac{9}{8}$ *назвать произведеніемъ отрицательнаго числа* $-\frac{3}{4}$ *на отрицательное* $-\frac{3}{2}$ и обозначить такъ: $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=+\frac{9}{8}$.

Итакъ, *по нашему опредѣленію произведеніе отрицательнаго числа на отрицательное представляетъ положительное число, абсолютное значеніе котораго равняется произведенію абсолютныхъ значеній данныхъ чиселъ.*

Сопоставляя всѣ *данныя нами* опредѣленія произведенія, можемъ сказать, что *абсолютное значеніе произведенія во всѣхъ случаяхъ равно произведенію абсолютныхъ значеній данныхъ чиселъ: если оба данныхъ числа имѣютъ одинаковые знаки, то произведеніе ихъ положительное, если же знаки ихъ различны, то оно— отрицательное.*

Дѣйствіе, при помощи котораго находимъ наши произведенія, *называется умноженіемъ.* Оно состоитъ изъ перемноженія абсолютныхъ значеній чиселъ и опредѣленія знака. Изъ *опредѣленія* умноженія вытекаетъ, что оно *подчиняется закону перемѣстительному.* Дѣйствительно, *по опредѣленію умноженія*

$$(+2)\,.\,(-4)=-8=(-4)\,.\,(+2)$$
$$(-2)\,.\,(-4)=+8=(-4)\,.\,(-2)$$
$$(-2)\,.\,(+4)=-8=(+4)\,.\,(-2)$$
$$(+2)\,.\,(+4)=+8=(+4)\,.\,(+2).$$

Если данныя числа назовемъ множителями, то изъ написанныхъ выраженій заключаемъ, что *произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей.*

Подъ произведеніемъ нѣсколькихъ множителей подразумѣваемъ произведеніе, которое получимъ перемножая сперва два первыхъ множителя, произведеніе ихъ умножая на 3-й и т. д. Напримѣръ, $(+5)\,.\,(-3)\,.\,(-6)=(-15)\,.\,(-6)=(+90)$. Нетрудно убѣдиться, что это произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей и что вообще *произведеніе какого угодно числа множителей не измѣнится, если мы въ немъ любое число множителей замѣнимъ ихъ произведеніемъ или замѣнимъ какой-либо множитель произведеніемъ нѣсколькихъ множителей (законъ сочетательный).* Напримѣръ, $(+2)\,.\,(-6)\,.\,(-3)\,.\,(+4)=(-12)\,.\,(-12)=144=$ $=(+2)\,.\,(+2)\,.\,(-3)\,.\,(-3)\,.\,(-2)\,.\,(-2)$. Въ послѣднемъ выраженіи нѣкоторые множители получены путемъ представленія множителя (-6) въ видѣ $(+2)\,(-3)$, а множетеля $(+4)$ въ видѣ произведенія $(-2)\,.\,(-2)$.

Читатель легко выведетъ слѣдующее правило, вытекающее изъ правила знаковъ: *если въ произведеніи число отрицательныхъ множителей четное, то произведеніе ихъ представляетъ положительное число, если же число множителей нечетное, то произведеніе отрицательное.* Отсюда выводимъ слѣдующее чрезвычайно важное заключеніе: *при возвышеніи въ степень отрицательнаго числа получается отрицательное число, если показатель степени число нечетное, и—положительное число, если показатель представляетъ четное число.*

Напримѣръ, $\left(-\frac{3}{4}\right)^3=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3^3}{4^3}=-\frac{27}{64}\cdot$

$\left(-\frac{5}{7}\right)^2=\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{25}{49}\cdot$

5. **Дѣленіе.** Остается разсмотрѣть дѣленіе отрицательныхъ чиселъ. Дѣленіемъ назовемъ дѣйствіе, обратное умноженію, т.-е. дѣйствіе, при помощи котораго по данному произведенію и одному изъ множителей находится другой. Данное произведеніе назовемъ *дѣлимымъ*, данный множитель—*дѣлителемъ*, искомое—*частнымъ*. Предположимъ, требуется раздѣлить $\frac{4}{5}$ на $-\frac{2}{3}$, т.-е. ищется число, произведеніе котораго на $-\frac{2}{3}$ должно равняться

$+\frac{4}{5}$. Такъ какъ данное произведеніе положительное, то, слѣдовательно, оба множителя должны имѣть одинаковые знаки, и такъ какъ одинъ изъ нихъ $\left(-\frac{2}{3}\right)$ отрицательный, то и другой долженъ быть отрицательнымъ. Что касается абсолютнаго значенія искомаго множителя, то вспомнимъ, что абсолютное значеніе произведенія равно произведенію абсолютныхъ значеній множителей. Слѣдовательно, абсолютное значеніе нашего частнаго есть такое число, которое, будучи умножено на $\frac{2}{3}$, даетъ въ результатѣ $\frac{4}{5}$. Такимъ числомъ будетъ частное $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{6}{5}$. Итакъ, частное отъ дѣленія $\left(+\frac{4}{5}\right)$ на $\left(-\frac{2}{3}\right)$, которое мы обозначимъ черезъ $\left(+\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$ равно $-\frac{5}{6}$. Поэтому напишемъ

$$\left(+\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{6}{5}.$$

Путемъ такихъ же разсужденій получаемъ

$$\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{6}{5};$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{6}{5}; \qquad \left(+\frac{4}{5}\right) : \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{6}{5}.$$

Разсматривая полученные результаты приходимъ къ слѣдующему *правилу дѣленія: если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, то частное положительное; если же знаки дѣлимаго и дѣлителя различны, то частное отрицательное; абсолютное значеніе частнаго получается путемъ дѣленія абсолютнаго значенія дѣлимаго на абсолютное значеніе дѣлителя.*

II. АЛГЕБРА.

I. Алгебраическія выраженія и дѣйствія надъ ними.

Купцу, покупающему матерію кусками, приходится распродавать ихъ отрѣзками по аршинамъ. При этомъ купцу приходится рѣшать задачи слѣдующаго рода.

Если кусокъ матеріи въ столько-то аршинъ стоилъ опредѣленную сумму, то спрашивается, сколько стоитъ ему отрѣзокъ матеріи въ данное число аршинъ?

Напримѣръ, кусокъ сукна имѣетъ 25 аршинъ и стоитъ 50 рублей; сколько стоитъ 4 аршина сукна?

Очевидно, одинъ аршинъ сукна стоитъ $\frac{50}{25} = 2$ рубля, а 4 аршина въ 4 раза больше, т.-е. $2 \times 4 = 8$ рублей.

Чтобы опредѣлить стоимость второго отрѣзка отъ куска другой матеріи, пришлось бы повторить прежнія разсужденія, конечно, съ другими числами. Вмѣсто повторенія однихъ и тѣхъ же разсужденій въ каждомъ новомъ случаѣ, легко представить искомый результатъ въ такой условной формѣ, которая разъ навсегда избавляетъ отъ повторенія разсужденій.

Вмѣсто повторенія словъ, извѣстное число аршинъ, данное число рублей, условимся говорить, имѣемъ кусокъ матеріи въ a аршинъ цѣною въ b рублей. Спрашивается, сколько стоятъ c аршинъ этой матеріи?

Очевидно, одинъ аршинъ матеріи стоитъ $\frac{b}{a}$ рублей. Поэтому искомая цѣна x отрѣзка въ c аршинъ опредѣляется слѣдующимъ образомъ $x = \frac{b}{a} \cdot c$.

Полученный результатъ называется *алгебраической формулой*, опредѣляющей искомую цѣну x при помощи *алгебраическаго выраженія* $\frac{b}{a} \cdot c$.

Если въ послѣднемъ выраженіи замѣнить a, b и c ихъ численными значеніями въ каждомъ частномъ случаѣ (какъ говорятъ, *подставить численныя значенія алгебраическихъ обозначеній въ полученное выраженіе*), то мы, безъ повторенія разсужденій, получаемъ стоимость соотвѣтствующаго куска матеріи.

Такимъ образомъ *алгебраическое выраженіе представляетъ числа и буквы, соединенныя между собой знаками ариѳметическихъ дѣйствій.*

Поставивъ опредѣленныя числа вмѣсто буквъ и произведя надъ ними всѣ указанныя дѣйствія, мы получаемъ *числовую величину алгебраическаго выраженія* для данныхъ частныхъ значеній входящихъ въ него буквъ.

Выбирая алгебраическія обозначенія, мы должны одной буквой обозначать всегда одну и ту же величину. Обыкновенно данныя величины обозначаются начальными буквами латинской азбуки a, b, c, d..., искомыя неизвѣстныя величины обыкновенно обозначаются послѣдними буквами латинской азбуки x, y, z...

Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ и буквъ, подъ которыми мы всегда будемъ подразумѣвать какія угодно числа, носитъ названіе *одночлена*. Напримѣръ, $\frac{5}{8}.\ a.\ b.\ -\frac{3}{7}.\ b.$ представляетъ одночленъ.

Пользуясь основными законами умноженія (произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей, и въ произведеніи можно замѣнить нѣсколько множителей ихъ произведеніемъ), мы можемъ написать всякій одночленъ въ болѣе простомъ видѣ, перемножая между собою числовые множители и представляя произведеніе одинаковыхъ буквъ въ видѣ степени. Поэтому нашъ одночленъ можно представить такъ: $\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)\ a\ .\ b\ .\ b\ .\ =$

$$=-\frac{5.3}{8.7}\,a\,b^2=-\frac{15}{56}\,a\,b^2.$$

Въ послѣднемъ выраженіи мы не поставили точекъ между множителями, какъ это вообще принято. Числовой множитель, со знакомъ $-\frac{15}{16}$, называется *коэффиціентомъ* одночлена, произведеніе остальныхъ множителей ab^2 называется *буквеннымъ множителемъ*. Если абсолютное значеніе коэффиціента равно 1, то коэффиціентъ не пишется, а пишется только его знакъ; такъ, коэффиціентъ одночлена $b\,x^2$ равенъ $+1$, а въ одночленѣ $-x^3\,y^2$ коэффиціентъ равенъ -1. Изъ самаго опредѣленія одночлена легко вывести *правило умноженія* ихъ.

Составляемъ, напримѣръ, произведеніе $a^2.a^3$. Вспомнимъ, что a^2 обозначаетъ $a.\ a$ и a^3 представляетъ произведеніе $a.\ a.\ a$. Поэтому $a^2.a^3=(a.\ a)\ (a.\ a.\ a)=a.\ a.\ a.\ a.\ a=a^5=a^{2+3}$. Точно такъ же имѣетъ $x^8.\ x^{11}=x^{19}=x^{11+8}$, т.-е. *показатель степени произведенія двухъ степеней одного и того же числа равенъ суммѣ показателей степеней множителей*. Поэтому, если черезъ m и n обозначимъ какія-либо числа, то получаемъ $a^m.\ a^n=a^{m+n}$. Нетрудно убѣдиться въ томъ, что этотъ законъ справедливъ для произведенія какого угодно числа степеней одной и той же *буквы* или числа. Поэтому говоримъ, что *при перемноженіи нѣсколькихъ степеней одного и того же числа (или буквы) показатели степеней складываются.*

Переходимъ къ *правилу умноженія одночленовъ*. Пусть требуется умножить $-\frac{2}{5}\ ax^3$ на $4\,a^3z^5$, т.-е. найти произведеніе $\left(-\frac{2}{5}\ ax^{\ 3}\right).(4\ \ a^3z^5)$. Такъ какъ произведеніе не зависитъ отъ порядка множителей, то, написавъ наше произведеніе

$-\frac{2}{5}.\ 4\ .\ a\ .\ a^3.\ x^3\ .\ z^5$, находимъ, на основаніи только что сказаннаго, что $(-\frac{2}{5}ax^3)\ .\ (4\ a^3z^5) = -\frac{8}{5}\ a^4x^3\ z^5$.

Такимъ образомъ *при перемноженіи двухъ одночленовъ коэффиціенты ихъ перемножаются, а показатели у буквъ, одинаковыхъ въ обоихъ множителяхъ, складываются, показатели же буквъ, входящихъ только въ одинъ какой-либо множитель, остаются безъ перемѣны.*

Правило это нетрудно распространить на произведеніе какого угодно числа одночленовъ. Такъ

$$\left(-4a^2x\right).\left(-\frac{1}{2}b^3y\right).\left(+3axy\right) = \left(-4\right).\left(-\frac{1}{2}\right).\left(+3\right).$$

$$a^2.a.b^3.x.x.y.y = +6a^{2+1}b^3x^{1+1}y^{1+1} = 6\,a^3\,b^3\,x^2\,y^2.$$

Правило умноженія приводитъ также къ правилу возвышенія въ степень. Возводя, напримѣръ, $-\frac{1}{2}ax^2$ въ третью степень, получаемъ $\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3a^3x^6 =$

$$= -\frac{1}{8}\,a^3\,x^6.$$

Одночлены, которые отличаются только коэффиціентами, т.-е. въ которыхъ буквенные множители состоятъ изъ тѣхъ же буквъ съ одинаковыми показателями степеней, называются подобными; такъ, одночлены $-\frac{1}{5}a^2\,b$, $2\,a^2b$, $-\frac{2}{9}\,a^2b$ подобны.

Основываясь на законѣ распредѣлительномъ для умноженія, легко показать, что *алгебраическая сумма* [1]) *подобныхъ одночленовъ выражается алгебраической суммой ихъ коэффиціентовъ, умноженной на буквенный множитель нашихъ одночленовъ.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется найти алгебраическую сумму $\left(-\frac{1}{5}ax^2\right) +$

$$+\,(4\,ax^2) - (7\,ax^2) = -\frac{1}{5}\,ax^2 + 4ax^2 - 7ax^2.$$

Разсматривая послѣднее выраженіе, видимъ, что оно представляетъ алгебраическую сумму произведеній чиселъ $-\frac{1}{5}$, 4, -7 на одно и то же число ax^2. По закону распредѣлительному алгебраическая сумма такихъ произведеній равна произведенію изъ числа ax^2 на алгебраическую сумму чиселъ $-\frac{1}{5}$, 4 и -7,

---

[1]) Опредѣленіе алгебраической суммы было дано на стр. 31.

т.-е. на число $-\frac{1}{5}+4-7.=-3\frac{1}{5}$. Поэтому получаемъ $-\frac{1}{5}ax^2+$ $+4ax^2-7ax^2=\left(-\frac{1}{5}+4-7\right)ax^2=-3\frac{1}{5}ax^2$.

Такимъ образомъ алгебраическая сумма подобныхъ одночленовъ всегда приводится къ одночлену, подобному данному. Если же мы возьмемъ алгебраическую сумму одночленовъ, которые не всѣ подобны, то мы получимъ алгебраическое выраженіе, носящее названіе *многочлена*. Такъ, выраженіе $a^3x-4ax^3+6a^2x$ представляетъ многочленъ. Если въ многочленѣ есть подобные члены, то, на основаніи только что сказаннаго, ихъ алгебраическая сумма всегда замѣняется однимъ членомъ. Напримѣръ, $5x+$ $+4ay-3x-\frac{7}{8}ay=2x+3\frac{1}{8}ay$.

Замѣна подобныхъ членовъ однимъ членомъ носитъ названіе *приведенія подобныхъ членовъ*. Этимъ дѣйствіемъ слѣдуетъ всегда пользоваться для упрощенія выраженія многочленовъ. Правила сложенія и вычитанія многочленовъ вытекаютъ изъ правилъ сложенія и вычитанія алгебраическихъ суммъ чиселъ [1]). *Чтобы прибавить какой-либо многочленъ, приписываютъ всѣ его члены съ ихъ знаками, а чтобы вычесть многочленъ, приписываютъ всѣ его члены съ обратными знаками.* Въ результатѣ получается всегда многочленъ, для упрощенія котораго слѣдуетъ сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ.

Правила умноженія многочлена на одночленъ и на многочленъ выводятся тоже изъ правила умноженія алгебраической суммы чиселъ на какое-либо число [2]). Эти правила таковы: *чтобы умножить многочленъ на одночленъ, на него умножается каждый членъ многочлена и затѣмъ составляется алгебраическая сумма полученныхъ произведеній. Чтобы перемножить два многочлена, каждый членъ одного многочлена умножается на всѣ члены другого и составляется алгебраическая сумма полученныхъ такимъ образомъ одночленовъ.*

Примѣнимъ правило умноженія многочленовъ къ слѣдующимъ примѣрамъ, представляющимъ часто встрѣчающіяся формулы: $(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+b^2+2ab$; $(a-b)^2=$ $(a-b)(a-b)=a^2+b^2-2ab$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Первыя два равенства выражаются словами: *квадратъ алгебраической суммы двухъ чиселъ равенъ суммѣ квадратовъ каждаго изъ нихъ, сложенной съ ихъ удвоеннымъ произведеніемъ;* третье равенство по-

---

[1]) См. стр. 29.

[2]) См. стр. 8, 29.

казываетъ, что *произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ чиселъ послѣдней разности.*

Подъ дѣленіемъ алгебраическихъ выраженій подразумѣвается дѣйствіе, обратное умноженію. Исходя изъ этого опредѣленія, легко дать правила дѣленія. Замѣтимъ, что въ произведеніи двухъ какихъ-либо одночленовъ обязательно входятъ *всѣ* буквы, которыя входятъ въ каждый изъ множителей; кромѣ того, показатели степеней у буквъ въ произведеніи либо больше, либо, въ крайнемъ случаѣ, равны показателямъ степеней у тѣхъ же буквъ въ каждомъ множителѣ. Поэтому частное двухъ одночленовъ опредѣляется правиломъ: *коэффиціентъ частнаго равенъ частному отъ дѣленія коэффиціента дѣлимаго на коэффиціентъ дѣлителя, показатели же степеней у любой буквы въ частномъ равны разности показателей у той же буквы въ дѣлимомъ и дѣлитель. Если въ дѣлимое входитъ буква съ тѣмъ же показателемъ степени, что и въ дѣлитель, то въ частное она совсѣмъ не входитъ; если какая-либо буква входитъ только въ дѣлимое и не входитъ въ дѣлитель, то ея показатель въ частномъ остается тотъ же, что и въ дѣлимомъ. Наконецъ, если въ дѣлитель входитъ буква, не заключающаяся въ дѣлимомъ, то частное представляется въ видѣ дроби.* Такъ, напримѣръ, $2p^2xy^2 : 3pxy = \frac{2}{3}py$.

Для второго примѣра раздѣлимъ одночленъ $3x^2y$ на одночленъ $5xy^2z$, заключающій букву z, которая не входитъ въ дѣлимое. Получаемъ частное $3x^2y : 5xy^2z = \frac{3x^2y}{5xy^2z} = \frac{3x}{5yz} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{yz}$.

Полученная дробь называется *одночленной* дробью. Такъ какъ въ одночленныхъ дробяхъ числитель и знаменатель при всевозможныхъ частныхъ значеніяхъ буквъ представляютъ числа, то все сказанное о числовыхъ дробяхъ, примѣняется и къ этимъ дробямъ. Напримѣръ, одночленныя дроби могутъ быть сокращаемы, приводимы къ одному знаменателю, складываемы и такъ далѣе. Напримѣръ, $\frac{5axy}{10axz} = \frac{1y}{2z}$.

Слагаемыя суммы $\frac{a}{3bx} + \frac{d}{2cy}$ имѣютъ общій знаменатель $6bcxy$. Поэтому для приведенія 1-й дроби къ этому знаменателю умножаемъ ея числитель и знаменатель на $2cy$, а для приведенія 2-й дроби—умножается ея числитель и знаменатель на $3bx$. Поэтому получаемъ $\frac{a}{3bx} + \frac{d}{2cy} = \frac{2acy}{6bcxy} + \frac{3bdx}{6bcxy} = \frac{2acy + 3bdx}{6bcxy}$.

Послѣднюю дробь, въ которой числитель многочленъ $2acy + 3bdx$, а знаменатель одночленъ $6bcxy$, можемъ разсматривать

какъ *частное отъ дѣленія многочлена на одночленъ*. Такъ какъ наша дробь $\frac{2acy+3bdx}{6bcxy}$ равна суммѣ дробей $\frac{2acy}{6bcxy}+\frac{3bdx}{6bcxy}$, въ которой каждое слагаемое представляетъ частное отъ дѣленія членовъ нашего многочлена на одночленъ, то отсюда заключаемъ, что *для дѣленія многочлена на одночленъ каждый членъ многочлена раздѣляется на этотъ одночленъ*. Можетъ случиться, что при этомъ дѣленіи всѣ частныя отъ дѣленія членовъ многочлена на одночленъ будутъ одночленами; тогда все частное отъ дѣленія многочлена на одночленъ представится въ видѣ многочлена. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что данный многочленъ раздѣляется на одночленъ нацѣло. Напримѣръ,

$$(2ax^2+5bx):3x=\frac{2ax^2}{3x}+\frac{5bx}{3x}=\frac{2}{3}ax+\frac{5}{3}b.$$

Если дѣлитель, т.-е. знаменатель представляетъ многочленъ, то тогда мы получимъ многочленную дробь. Напримѣръ, $\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{2y+z}{x^3+y^3+z^3-3}$ представляютъ многочленныя дроби. Если результатъ дѣленія можетъ быть представленъ въ видѣ многочлена или одночлена, то говорятъ, что дѣлимое нацѣло раздѣлилось на дѣлителя. Напримѣръ, $\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$.

Правила дѣйствій надъ многочленными дробями тѣ же, что и правила дѣйствій надъ обыкновенными дробями. Напримѣръ,

$$\frac{x+y}{x-y}:\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x-y)}=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}.$$

2. Равенства и уравненія.

Если два числа или два алгебраическихъ выраженія равны, то мы соединяемъ ихъ знакомъ равенства и полученную алгебраическую формулу называемъ *равенствомъ*. Напримѣръ,

$$2=2,\quad 3x=1,\quad x+2=\frac{1}{3}(3x+6).$$

Эти равенства мы можемъ представлять себѣ, какъ вѣсы съ двумя уравновѣшенными чашками, въ каждой изъ которыхъ находится по равной величинѣ, представленной частями нашего равенства.

Понятно, если мы на каждую чашку уравновѣшенныхъ вѣсовъ подложимъ по равной гирѣ или отнимемъ по равной гирѣ, то ни одна изъ чашекъ не можетъ перетянуть, т.-е. и при новой нагрузкѣ чашки вѣсовъ будутъ уравновѣшены. Мы можемъ подложить на каждую изъ чашекъ по грузу, равному тому, ко-

торый тамъ находится, т.-е. можемъ удвоить эти грузы, можемъ ихъ утроить или вообще увеличить въ нѣсколько разъ, и всегда чашки вѣсовъ будутъ въ равновѣсіи. Можемъ также, не нарушая равновѣсія чашекъ, уменьшить въ нѣсколько разъ грузъ, находящійся въ каждой изъ нихъ. Напримѣръ, если на каждой изъ чашекъ вѣсовъ находится по 1 фунту, то, оставивъ въ нихъ по полуфунту или по $\frac{1}{10}$ фунта, мы не нарушимъ равновѣсія вѣсовъ.

Эти соображенія позволяютъ прилагать алгебраическія дѣйствія къ обѣимъ частямъ равенствъ слѣдующимъ образомъ. Если имѣемъ равенство

$$A = B,$$

то мы можемъ прибавить или отнять по равной величинѣ или по равному числу отъ обѣихъ частей нашего равенства. Такъ, напримѣръ, имѣемъ новыя равенства

$$A + a = B + a, \quad A - b = B - b,$$
$$A - B = B - B, \text{ или } A - B = 0.$$

Такимъ же образомъ можемъ умножить или раздѣлить обѣ части нашего равенства на какую угодно величину и получить равенства $2A = 2B$, $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}B$, $A.a = B.a$, $\frac{A}{b} = \frac{B}{b}$.

Такъ какъ возвышеніе въ степень представляетъ повторныя умноженія, то обѣ части равенства можно возвышать въ одну и ту же степень. Поэтому изъ даннаго равенства получаются новыя равенства

$$A^2 = B^2, \quad A^k = B^k,$$

гдѣ k представляетъ какую угодно степень.

Сравнивая послѣднія равенства съ исходнымъ, члены котораго представляютъ радикалы одинаковаго показателя изъ членовъ послѣднихъ равенствъ, заключаемъ, что изъ обѣихъ частей равенства можно извлекать радикалы одного и того же показателя.

Такъ, если мы имѣемъ $a = b$, то можемъ написать $\sqrt{a} = \pm\sqrt{b}$. Два знака, поставленные одновременно передъ однимъ изъ радикаловъ (вторымъ), показываютъ, что мы можемъ взять любой изъ этихъ знаковъ. Въ самомъ дѣлѣ, какой бы изъ двухъ знаковъ $\pm$ ни былъ, возвышая обѣ части равенства во вторую степень, получимъ исходное равенство.

Частное отъ дѣленія двухъ чиселъ $\frac{a}{b}$ мы называли дробью. Иначе это частное называется *отношеніемъ* числа a къ числу b. Отношенія встрѣчаются при сравненіи величинъ одного рода. Пусть, напримѣръ, имѣемъ двѣ линейки, одну въ 12 вершковъ

и другую въ 8 вершковъ. Число $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ показываетъ во сколько разъ первая линейка длиннѣе второй и представляетъ *отношеніе* длины линеекъ.

Отношеніе $\frac{b}{a}$ называется обратнымъ отношеніемъ $\frac{a}{b}$. Свойство обратнаго отношенія заключается въ томъ, что произведеніе его на прямое отношеніе равно единицѣ, такъ какъ очевидно, что $\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1$.

Если мы имѣемъ два равныхъ отношенія $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$, то равенство, выражающее послѣднее условіе $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, называется *пропорціей*.

Пропорціи выражаютъ свойство такъ называемыхъ пропорціональныхъ величинъ. Мы говоримъ, что двѣ величины *пропорціональны*, если съ увеличеніемъ одной въ нѣсколько разъ вторая увеличивается во столько же разъ. Такъ, напримѣръ, вѣсъ воды или какого-либо другого тѣла пропорціоналенъ его объему. Если мы назовемъ черезъ a вѣсъ объема a_1 воды и черезъ b вѣсъ объема b_1, то $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$. Въ этомъ читатель можетъ легко убѣдиться, давая нашимъ буквамъ нѣсколько различныхъ частныхъ значеній.

Слѣдуетъ обратить вниманіе, что равенства различаются между собой слѣдующимъ существеннымъ образомъ. Въ то время, какъ равенство $2=2$ всегда имѣетъ мѣсто, легко замѣтить, что равенство $3x=1$ перестаетъ быть равенствомъ, если мы положимъ, напримѣръ, x равнымъ 1, такъ какъ въ первой части равенства получимъ число 3, которое не равно 1. Точно такъ же, давая x значенія 2, 3, 4, 5 и т. д., замѣтимъ, что для этихъ значеній x наше равенство перестаетъ существовать. Но оно остается справедливымъ, если x дать значеніе $\frac{1}{3}$.

Наоборотъ, равенство $x+2=\frac{1}{3}(3x+6)$ всегда остается справедливымъ для какихъ угодно значеній x, такъ какъ вторая часть равенства, послѣ приведенія, становится $x+2$.

Равенства $2=2$, $x+2=\frac{1}{3}(x+6)$, обѣ части которыхъ остаются всегда равными другъ другу, для какихъ угодно значеній, входящихъ въ нихъ буквенныхъ обозначеній, называются *тождествами*.

Равенства, которыя обращаются въ тождества только для опредѣленныхъ значеній входящихъ въ нихъ буквъ, называются *уравненіями*. Значеніе неизвѣстной величины x, при которомъ уравненіе обращается въ тождество, называется *корнемъ уравненія*.

Напримѣръ, уравненіе $2x - 3 = x$ имѣетъ корень $x = 3$. Равенство $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ [1]) представляетъ тождество.

Одна изъ важныхъ и интересныхъ задачъ алгебры заключается въ разысканіи корней уравненій или, какъ говорятъ, *въ рѣшеніи уравненій*.

Возьмемъ общій видъ уравненія *первой степени*, т.-е. уравненій, заключающихъ неизвѣстную x въ первой степени,

$$ax + b = a_1x + b_1.$$

На основаніи указанныхъ выше свойствъ равенствъ всегда можно сдѣлать такъ, чтобы члены съ x находились въ первой части равенства, а члены, не заключающіе x, — во второй части равенства. Въ самомъ дѣлѣ, вычтемъ изъ обѣихъ частей равенства b и a_1x. Мы получаемъ, сдѣлавъ сперва вычитанія, а затѣмъ приведенія

$$ax + b - b - a_1x = a_1x + b_1 - b - a_1x, \text{ или } (a - a_1)x = b_1 - b.$$

Дѣля обѣ части равенства на $a - a_1$, находимъ искомое значеніе x, представляющее корень даннаго уравненія,

$$x = \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

Читатель можетъ убѣдиться непосредственной подстановкой полученнаго значенія x въ данное уравненіе, что оно, дѣйствительно, обращается въ тождество.

Прилагая изложенныя разсужденія къ уравненію $2x - 3 = x$, получаемъ $2x - x = 3$, или $x = 3$.

Если неизвѣстная величина x входитъ въ члены уравненія во второй степени, то такое уравненіе называется *второй степени, или квадратнымъ*. Читатель, приложивъ тѣ преобразованія, которыя мы дѣлали съ уравненіями первой степени, въ общемъ видѣ, докажетъ самостоятельно, что всегда квадратное уравненіе приводится къ слѣдующему виду

$$x^2 + ax + b = o.$$

Если замѣтимъ, что $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ [2]), то напишемъ наше квадратное уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

---

[1]) См. стр. 39.
[2]) См. стр. 39.

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b=0, \quad \text{или} \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b.$$

Извлекая квадратные корни изъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, получаемъ

$$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}, \text{ или } x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Два знака при радикалѣ показываютъ, что существуютъ два различныхъ корня нашего квадратнаго уравненія, которые будемъ обозначать черезъ x_1 и x_2, при чемъ положимъ

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}, \quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе $x^2+4x-5=0$. Въ этомъ случаѣ $a=4$, $b=-5$. Вставляя эти значенія a и b въ выраженія x_1 и x_2, получаемъ для нихъ значенія $x_1=1$, $x_2=-5$. Если подставить каждое изъ этихъ значеній въ данное уравненіе, то увидимъ, что оно обращается въ тождество.

Уравненія имѣютъ важное значеніе въ математикѣ для рѣшенія различныхъ задачъ по такъ называемому *способу составленія уравненій*. Если задача состоитъ въ разысканіи нѣкотораго числа, то мы предполагаемъ, что искомое число должно быть x и, считая его за извѣстное, составимъ уравненіе, которому должно удовлетворять x по условію задачи. Тогда, чтобы найти значеніе x, остается рѣшить уравненіе.

Рѣшимъ, напримѣръ, задачу: *Двѣ деревни находятся на разстояніи 20 верстъ. По сколько верстъ нужно проходить въ часъ, чтобы прійти изъ одной деревни въ другую черезъ 5 часовъ?* Положимъ, слѣдуетъ проходить x верстъ въ 1 часъ. Тогда въ 5 часовъ придется пройти разстояніе въ $5x$ верстъ. Но это разстояніе, по условію задачи, равно 20. Слѣдовательно, $5x=20$. Полученное уравненіе первой степени даетъ $x=\frac{20}{5}=4$, т.-е. необходимо проходить по 4 версты въ 1 часъ.

Вторая задача: *Между двумя деревнями 20 верстъ. Изъ одной деревни въ другую вышли въ одно время двое пѣшеходовъ. Одинъ изъ нихъ проходитъ въ часъ времени на одну версту больше, чѣмъ второй пѣшеходъ, и приходитъ въ деревню раньше перваго на 1 часъ времени. Спрашивается, по сколько верстъ проходитъ каждый пѣшеходъ въ 1 часъ времени?*

Предположимъ, что первый пѣшеходъ проходитъ x верстъ въ часъ, тогда все разстояніе между деревнями онъ проходитъ въ

$\frac{20}{x}$ часовъ. Второй пѣшеходъ проходитъ въ 1 часъ на 1 версту меньше, т.-е. проходитъ всего $x-1$ верстъ въ часъ, и слѣдовательно, все разстояніе между деревнями пройдетъ въ $\frac{20}{x-1}$ часовъ. Но онъ приходитъ на 1 часъ позднѣе, т.-е. употребляетъ времени для ходьбы на 1 часъ больше перваго пѣшехода. Поэтому, если вычтемъ изъ числа часовъ $\frac{20}{x-1}$, которые онъ идетъ, 1 единицу, то должны получить $\frac{20}{x-1}-1$ часовъ. Полученное число часовъ равно числу часовъ $\frac{20}{x}$, которое употребилъ на ходьбу первый пѣшеходъ.

Написавъ, что оба числа часовъ равны, составляемъ требуемое уравненіе $\frac{20}{x-1}-1=\frac{20}{x}$. Умножая обѣ части уравненія на $x\ (x-1)$, получаемъ $20x-x(x-1)=20(x-1)$.

Выполняя приведеніе, находимъ $20x-x^2+x=20x-20$, или $20x-x^2+x-20x+20=0$. Послѣ сокращенія, находимъ $-x^2+x+20=0$, или $x^2-x-20=0$. Для полученнаго квадратнаго уравненія мы имѣемъ $a=-1$, $b=-20$.

Поэтому формулы корней квадратнаго уравненія даютъ $x_1=5$ $x_2=-4$. Но само собою разумѣется, что отвѣтъ на нашу задачу можетъ дать только первое рѣшеніе $x=5$, такъ какъ число верстъ, проходимыхъ въ часъ пѣшеходомъ, не можетъ быть отрицательнымъ числомъ.

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій можетъ привести иногда къ новымъ числамъ, которыя нами еще не разсматривались. Рѣшимъ, напримѣръ, квадратное уравненіе $x^2+2x+5=0$. Корни его имѣютъ значенія

$$x_1=-1+\sqrt{-4},\quad x_2=-1-\sqrt{-4},$$

которыя мы можемъ написать слѣдующимъ образомъ

$$x_1=-1+2\sqrt{-1},\quad x_2=-1-2\sqrt{-1}.$$

Выраженіе $\sqrt{-1}$ представляетъ новое число, которое называется *мнимой* величиной; оно обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что его вторая степень представляетъ отрицательное число -1.

Найденные корни нашего уравненія называются также *мнимыми*, или *комплексными*. Первые ихъ члены -1 представляютъ такъ, называемую *дѣйствительную* часть въ отличіе отъ вторыхъ членовъ, представляющихъ *мнимую* часть.

Корни x_1 и x_2 обладаютъ замѣчательными свойствами: сумма ихъ равна дѣйствительной величинѣ -2, а произведеніе равно также дѣйствительной величинѣ $+5$.

Комплексныя выраженія вида

$$a+b\sqrt{-1} \text{ и } a-b\sqrt{-1},$$

которыя различаются между собой только знакомъ мнимыхъ частей, называются *сопряженными* и обладаютъ указанными выше свойствами: *ихъ сумма и произведеніе представляютъ дѣйствительныя величины.*

До сихъ поръ мы разсматривали равенства и уравненія, заключающія только одну неизвѣстную величину. Возьмемъ, напримѣръ, равенство $x+y=1$, заключающее двѣ неизвѣстныхъ x и y Нетрудно видѣть, что оно представляетъ уравненіе съ безчисленнымъ числомъ рѣшеній $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$, $y_2=0$; $x_3=2$, $y_3=1$ и т. д. Мы можемъ составить сколько угодно рѣшеній, давая одной неизвѣстной произвольное значеніе, а соотвѣтствующее значеніе второй неизвѣстной опредѣляя затѣмъ изъ уравненія.

Но если бы мы имѣли два уравненія или, какъ говорятъ, систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, то вообще такая система имѣетъ опредѣленное число рѣшеній. Возьмемъ, напримѣръ, систему двухъ уравненій

$$x-y=0, \quad xy=1.$$

Чтобы найти рѣшеніе данной системы, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Первое уравненіе даетъ $y=x$; подставляя это значеніе y во второе уравненіе, получаемъ одно уравненіе $x^2=1$ съ одной неизвѣстной x. Это уравненіе опредѣляетъ для x два слѣдующихъ рѣшенія $x_1=1$, $x_2=-1$. Поэтому система данныхъ уравненій имѣетъ также два рѣшенія $x_1=1$, $y_1=1$ и $x_2=-1$, $y_2=-1$.

Теорія уравненій и приложеніе ея къ рѣшенію различныхъ задачъ представляетъ много интересныхъ вопросовъ, подробно познакомиться съ которыми читатель можетъ въ книгѣ Борель-Штекель. «Элементарная математика». Часть I. Одесса, 1911.

3. Прогрессіи.

Простѣйшую арифметическую прогрессію представляетъ натуральный рядъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5,...

Первая задача, которую мы рѣшимъ, состоитъ въ вычисленіи суммы натуральнаго ряда чиселъ отъ 1 до нѣкотораго цѣлаго числа n.

При небольшихъ значеніяхъ n, задача рѣшается очень просто съ помощью непосредственнаго сложенія, но если n представляетъ большое число, то такой способъ трудно выполнимъ, а иногда даже фактически невыполнимъ, если взять, напримѣръ, $n = 10.000.000$.

Обозначимъ черезъ s_n искомую сумму

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n.$$

(Точки... обозначаютъ всѣ промежуточные члены, которые мы не выписываемъ). Измѣняя порядокъ слагаемыхъ, напишемъ выраженіе s_n въ другомъ видѣ

$$s_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Въ каждомъ изъ написанныхъ выраженій находится по n членовъ, при этомъ замѣчательно, что сумма членовъ одинаковаго порядка въ обоихъ выраженіяхъ всегда равна одному и тому же числу $n+1$. Это ясно изъ того, что каждый членъ перваго выраженія s_n больше на 1 единицу своего предшествовавшаго члена, а во второмъ выраженіи s_n, наоборотъ, каждый членъ меньше на 1 единицу своего предшествовавшаго.

Но если сумма членовъ одинаковаго порядка равна $n+1$, а такихъ паръ членовъ всего n, то, очевидно, что сложивъ оба выраженія s_n, получаемъ $2s_n = (n+1)n$, или $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Напримѣръ, $s_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 55$, $s_{1000} = \frac{1000(1000+1)}{2} = 500500$.

Возьмемъ теперь рядъ такихъ чиселъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предыдущаго путемъ прибавленія одного и того же положительнаго или отрицательнаго числа. Такой рядъ чиселъ называется *ариѳметической прогрессіей*.

Примѣромъ ариѳметической прогрессіи служитъ рядъ $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, -2, послѣдовательныя числа или, какъ говорятъ, члены котораго получаются путемъ послѣдовательнаго прибавленія числа $-\frac{1}{2}$. Иначе ариѳметическую прогрессію можно опредѣлить какъ рядъ членовъ, въ которомъ разность каждаго члена съ непосредственно ему предшествующимъ представляетъ одно и то же число. Это число называется *разностью прогрессіи*. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_{n-1}, a_n$ представляютъ ариѳметическую прогрессію съ разностью p. Знаки

1, 2,... $(k-1)$, k,... $(n-1)$, n при буквѣ a указываютъ на номеръ или мѣсто соотвѣтствующаго числа въ прогрессіи. Знакъ ариѳметической прогрессіи $\div$ ставится передъ ея первымъ членомъ.

По опредѣленію прогрессіи, каждый членъ ея получается изъ предыдущаго путемъ прибавленія къ нему разности прогрессіи. Слѣдовательно, $a_2 = a_1 + p$, $a_3 = a_2 + p$, $a_4 = a_3 + p$, ...

$$a_k = a_{k-1} + p, \quad \ldots \quad a_n = a_{n-1} + p.$$

При помощи этихъ формулъ, зная первый членъ и разность прогрессіи, можно послѣдовательно найти любой членъ. Но такое *послѣдовательное* нахожденіе затруднительно, когда номеръ члена великъ. Легко вывести формулу, которая позволяетъ вычислить любой членъ прогрессіи, при помощи ея перваго члена, разности и числа предшествующихъ членовъ.

Для этого вставимъ въ третій членъ a_3 выраженіе второго члена прогрессіи.

Получаемъ $a_3 = a_1 + p + p = a_1 + 2p$. Подставляя найденное выраженіе a_3 въ выраженіе четвертаго члена, находимъ

$$a_4 = a_3 + p = a_1 + 2p + p = a_1 + 3p.$$

Легко замѣтить, что a_2, a_3, a_4 получаются изъ a_1 путемъ прибавленія къ нему разности прогрессіи, умноженной на число предшествующихъ членовъ. Это правило, какъ видимъ, справедливо для второго, третьяго и четвертаго членовъ прогрессіи.

Покажемъ, что это правило будетъ имѣть мѣсто для какого угодно k-аго члена. Для этого воспользуемся *способомъ перехода отъ k къ $k+1$*, или такъ называемымъ доказательствомъ по способу *математической индукціи*. Именно, положимъ, что наше выраженіе справедливо для какого-либо k-аго члена, который, сталобыть, выражается формулой, $a_k = a_1 + (k-1)p$. Слѣдующій членъ нашей прогрессіи a_{k+1} опредѣляется первоначальной формулой $a_{k+1} = a_k + p$. Подставляя сюда вмѣсто a_k его предыдущее значеніе, найдемъ $a_{k+1} = a_1 + (k-1)\,p + p = a_1 + kp$, т.-е. выраженіе члена a_{k+1} равняется первому члену прогрессіи, сложенному съ разностью, умноженной на число предшествующихъ членовъ. Мы показали, что наше правило справедливо для $k = 4$; значитъ, оно справедливо для $k = 5$; будучи справедливо для $k = 5$, оно становится справедливымъ для $k = 6$. Продолжая дальше наше разсужденіе, приходимъ къ заключенію, что выведенное правило, для составленія выраженій членовъ ариѳметической прогрессіи, справедливо для любого члена нашей прогрессіи.

Интересно рѣшить вопросъ, какъ найти сумму n послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи, которую назовемъ черезъ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Для этого выпишемъ

найденныя значенія членовъ нашей прогрессіи $a_1 = a_1$, $a_2 = a_1 + p_1$, $a_3 = a_1 + 2p, \ldots$, $a_n = a_1 + (n-1)\,p$. Складывая ихъ и замѣчая, что число всѣхъ складываемыхъ выраженій равно n, такъ что a_1 входитъ слагаемымъ n разъ, найдемъ

$$S_n = na_1 + p + 2p + 3p + \ldots + (n-1)\,p,$$

или

$$S_n = na_1 + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\;p.$$

Въ скобкахъ стоитъ сумма n—1 первыхъ членовъ натуральнаго ряда, которую мы уже вычислили выше (стр. 48). Въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіи $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$, стоитъ только вмѣсто n поставить $n-1$, тогда получимъ, что

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)\,[(n-1)+1]}{2} = \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

Поэтому искомая сумма S_n становится

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\;p = \frac{2na_1 + n(n-1)p}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)\,p]}{2} =$$

$$= \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)\,p]}{2}.$$

Но $a_1 + (n-1)p = a_n$, поэтому можемъ представить послѣднее выраженіе S_n въ слѣдующемъ видѣ $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$, т.-е. *сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равна половинѣ суммы перваго и послѣдняго члена, умноженной на число членовъ.*

Большій интересъ для практическихъ приложеній представляетъ *геометрическая прогрессія*. Знакъ геометрической прогрессіи ∴ ставится передъ ея первымъ членомъ. Геометрическая прогрессія представляетъ *рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предыдущаго при помощи умноженія его на одно и то же число.* Числа, составляющія прогрессію, называются ея членами, а то постоянное число, на которое умножается каждый членъ ея, для полученія слѣдующаго члена, называется *знаменателемъ прогрессіи.* Напримѣръ, числа $2, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, \ldots$ представляютъ геометрическую прогрессію со знаменателемъ $-\frac{1}{2}$; числа 3, 9, 27, 81,... представляютъ геометрическую прогрессію со знаменателемъ 3. Назовемъ въ общемъ случаѣ члены геометрической прогрессіи черезъ a_1, a_2, $a_3 \ldots$, а знаменатель ея—черезъ q. Согласно съ опредѣленіемъ, получаемъ

$$a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 \cdot q, \quad a_4 = a_3 \cdot q, \quad \ldots \quad a_n = a_{n-1} q, \quad \ldots,$$

каково бы ни было цѣлое число n. Поэтому, зная первый членъ и знаменатель прогрессіи, можемъ послѣдовательно найти любой ея членъ. Легко найти также выраженіе любого члена a_n черезъ a_1. Если значеніе $a_2 = a_1 \cdot q$ подставимъ въ выраженіе $a_3 = a_2 \cdot q$, то получимъ $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$. Подставляя это значеніе a_3 въ выраженіе $a_4 = a_3 \cdot q$, найдемъ $a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$. Полученныя выраженія показываютъ, что $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, для значенія n, равныхъ 2, 3, 4. Предоставляемъ читателю доказать, что послѣднее выраженіе a_n справедливо также для всякаго значенія n. Итакъ, мы имѣемъ

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_1 q^2, \quad \ldots \quad , a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Называя сумму n членовъ геометрической прогрессіи черезъ C_n, получаемъ

$$C_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Отсюда легко получить значеніе $C_n q$, умноживъ объ части послѣдняго равенства на q.

$$C_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n.$$

Вычитая объ части послѣдняго равенства изъ соотвѣтственныхъ членовъ предыдущаго равенства, мы находимъ

$$C_n - C_n q = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} - a_1 q - a_1 q^2 - \ldots - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n.$$

Совершая приведеніе подобныхъ членовъ, видимъ, что расположенные одинъ подъ другимъ члены взаимно уничтожаются. Остаются въ правой части равенства только первый и послѣдній члены.

Такимъ образомъ мы находимъ

$$C_n - C_n q = a_1 - a_1 q^n, \text{ или } C_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n).$$

Поэтому искомая сумма C_n имѣетъ слѣдующее значеніе

$$C_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

4. Вычисленіе процентовъ.

Если имѣемъ какое-либо число a, то *процентомъ* его называется одна *сотая часть* этого числа, т.-е. $\frac{a}{100}$. Слово процентъ происходитъ отъ латинскаго его названія. Изъ даннаго опредѣленія ясно что, 2 процента числа a составляютъ $\frac{2a}{100}$; 5 процентовъ какого-либо числа обозначаютъ $\frac{5}{100}$ его частей. Поэтому становится очевиднымъ, что 25 процентовъ числа a представляютъ

его четверть, такъ какъ $\frac{25a}{100}=\frac{1}{4}a$. Такимъ же образомъ 75 процентовъ даннаго числа представляютъ $\frac{4}{3}$ этого числа. Сокращенно слово процентъ обозначается знакомъ %. Поэтому, вмѣсто того, чтобы говорить *2 процента* мы пишемъ сокращенно 2%.

Очень часто въ процентахъ обозначаются измѣненія, которыя испытываетъ данное число. Такимъ образомъ говорятъ, что смертность жителей въ Петербургѣ равна $2\frac{1}{2}$%, а въ Берлинѣ всего $1\frac{1}{2}$% въ годъ. Это значитъ, что въ Петербургѣ каждый годъ вымираетъ $2\frac{1}{2}$ сотыхъ части всего населенія города, а въ Берлинѣ—$1\frac{1}{2}$ сотыхъ его населенія.

Особенно употребителенъ расчетъ процентовъ въ торговыхъ предпріятіяхъ. За пользованіе капиталомъ уплачиваются на него проценты. Чаще всего они бываютъ между 4% и 6% и обыкновенно пріурочиваются къ годичному сроку. Это значитъ, что лицо, взявшее взаймы деньги, обязывается уплачивать владѣльцу ихъ каждый годъ условный % за пользованіе деньгами, независимо отъ того, что по истеченіи опредѣленнаго срока должно возвратить занятый капиталъ. Такіе проценты называются *простыми*. Сумма денегъ, представляющихъ проценты съ даннаго капитала, называется *процентными деньгами*.

Такъ, напримѣръ, прибыль въ годъ съ капитала въ 2500 рублей, отданнаго въ ростъ по $4\frac{1}{2}$% годовыхъ, выражается числомъ $\frac{2500}{100}\times 4\frac{1}{2}=25\times 4\frac{1}{2}=112$ рублей 50 копѣекъ. Прибыль съ того же капитала, по тому же числу годовыхъ процентовъ, за одинъ мѣсяцъ выражается числомъ въ 12 разъ меньшимъ $112\frac{1}{2}:12=18$ р. 75 к.

При частыхъ расчетахъ процентныхъ денегъ съ различныхъ капиталовъ, по различнымъ процентамъ и на разные сроки, пользуются сокращенными пріемами вычисленія. Это особенно необходимо въ банкахъ и другихъ кредитныхъ учрежденіяхъ, гдѣ часто уплата и полученіе денегъ сопровождается приплатой или удержаніемъ на нихъ процентовъ. Существуютъ особыя таблицы, показывающія процентныя деньги на каждый капиталъ по опредѣленному проценту на любое число дней, мѣсяцевъ и лѣтъ. Читатель, который заинтересуется расчетомъ про-

стыхъ процентовъ, можетъ съ пользою прочитать XIII и XIV главы ариѳметики Бореля.

Большій интересъ представляютъ такъ называемые сложные проценты.

Сложными называются проценты, которые насчитываются не только на капиталъ, но и на нарослiе на него процентныя деньги, которыя, по истеченіи каждаго срока нарощенія процентовъ, не выдаются на руки владѣльцу капитала, но прибавляются къ капиталу. Если, напримѣръ, капиталъ въ 200 рублей отданъ на 3 года по $4^0/_0$ сложныхъ годовыхъ, то процентныя деньги за первый годъ составляютъ сумму равную $\frac{200}{100} \times 4 = 2 \times 4 = 8$ рублямъ. Поэтому проценты за второй годъ должны разсчитываться на капиталъ въ 208 рублей и образуютъ сумму въ $\frac{208}{100} \times 4 = 8$ руб. 32 коп. Слѣдовательно, за третій годъ проценты будутъ насчитываться съ капитала 216 руб. 32 коп. и образуютъ сумму въ $\frac{21632}{100.100} \times 4 = 8$ р. 65 $\frac{28}{100}$ к., или 8 р. 65 к., отбрасывая части копѣйки. Такимъ образомъ черезъ 3 года нашъ капиталъ обращается въ 224 р. 97 к. Тотъ же капиталъ, при начетѣ $4^0/_0$ простыхъ годовыхъ обратился бы въ 224 рубля.

Выведемъ формулу, которая показывала бы, во что обращается черезъ n лѣтъ капиталъ K, при наростаніи на него сложныхъ $p^0/_0$ годовыхъ. По истеченіи перваго года капиталъ K становится равнымъ $K + \frac{K.p}{100} = K(1 + \frac{p}{100})$. Итакъ, капиталъ, въ который обращается нашъ капиталъ K черезъ годъ, получается, если умножить K на число $(1 + \frac{p}{100})$, которое, ради сокращенія, обозначимъ черезъ q, т.-е. вводимъ обозначеніе $1 + \frac{p}{100} = q$. Это число q часто называется *годовымъ множителемъ учета*. Поэтому капиталъ K въ концѣ перваго года обращается въ капиталъ Kq. Чтобы получить, во что обращается этотъ капиталъ еще черезъ годъ, слѣдуетъ Kq умножить на q; такимъ образомъ получаемъ Kq^2. Это выраженіе представляетъ капиталъ, въ который обращается первоначальный капиталъ K въ концѣ второго года. Въ концѣ третьяго года нашъ капиталъ обращается въ Kq^3. Отсюда, очевидно, что капиталъ, который образуется въ концѣ каждаго года, получается если капиталъ, образовавшійся въ концѣ предыдущаго года умножить на годового множителя учета q. Поэтому, *по истеченіи n лѣтъ капиталъ K становится равнымъ капиталу Kq^n.*

Для расчета роста капитала, отданнаго на сложные проценты, приводимъ здѣсь нижеслѣдующую таблицу значеній годового множителя учета $(1+\frac{p}{100})^n$, вычисленныхъ для случаевъ $p=3$, 4, 5, 6 и для числа лѣтъ $n=2$, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40 и 50. Если $p=3$, то число $q=1+\frac{p}{100}$, представляется десятичной дробью [1]) 1,03. Если $p=4$, то $q=1+\frac{4}{100}=1{,}04$ и т. д. Въ каждомъ вертикальномъ столбцѣ таблицы находятся величины степеней чиселъ, показанныхъ въ той же строкѣ, но въ первомъ вертикальномъ столбцѣ таблицы; показатель степени находится въ первой горизонтальной строкѣ въ верху каждаго столбца.

n	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50
1,03	1,03	1,0609	1,09273	1,12551	1,15927	1,34392	1,80611	2,42726	3,26204	4,38391
1,04	1,04	1,0816	1,12486	1,16986	1,21665	1,48024	2,19112	3,24340	4,80102	7,10668
1,05	1,05	1,1025	1,15763	1,21551	1,27628	1,62890	2,65330	4,32194	7,03999	11,46740
1,06	1,06	1,1236	1,19102	1,26248	1,33823	1,79085	3,20714	5,74349	10,28572	18,42015

Вторая горизонтальная строка таблицы показываетъ, какъ растетъ 1 рубль, отданный на 3% сложныхъ годовыхъ по прошествіи числа лѣтъ, указанныхъ въ первой горизонтальной строкѣ значеній n. Черезъ 50 лѣтъ 1 рубль обращается въ 4 рубля 38 съ лишнимъ копѣекъ. Капиталъ въ 100 рублей, при тѣхъ же условіяхъ, обратится въ 438 рублей 39 копѣекъ съ лишнимъ. Послѣдняя горизонтальная строка показываетъ, что капиталъ, отданный по 6% сложнымъ годовымъ, черезъ 50 лѣтъ увеличится въ 18 разъ съ лишнимъ.

Если продолжить таблицу дальше, то, напримѣръ, окажется, что капиталъ, отданный по 2% сложнымъ годовымъ черезъ 1000 лѣтъ возрастаетъ въ 398.100.000 разъ, т.-е. обращается въ капиталъ около 400 милліоновъ рублей.

Мы говорили до сихъ поръ о *годовыхъ* процентахъ, которые насчитываются черезъ годовые промежутки времени.

Очень часто, напримѣръ, въ государственныхъ процентныхъ бумагахъ, проценты насчитываются черезъ каждые полгода. Очень

[1]) См. стр. 21.

легко доказать вышеприведенными разсужденіями, что при начетѣ, по полугодіямъ, годовыхъ сложныхъ $p^0/_0$, капиталъ K черезъ n лѣтъ обращается въ капиталъ Kq^{2n}, при чемъ q обозначаетъ *полугодовой множитель учета*, равный числу $1+\frac{p}{200}$.

Расчетъ срочныхъ ссудъ, займовъ и ихъ погашеній, а также пенсіонныхъ кассъ и страхованія основывается на рѣшеніи слѣдующихъ задачъ.

I. *Какой капиталъ образуется черезъ n лѣтъ изъ ежегодныхъ взносовъ по a рублей въ началѣ каждаго года, при наростаніи на нихъ $p^0/_0$ сложныхъ годовыхъ.*

Первый взносъ a въ концѣ n-аго года, на основаніи предыдущей формулы, обратится въ капиталъ aq^n, при чемъ q имѣетъ прежнее значеніе, равное $1+\frac{p}{100}$. Второй взносъ a пролежитъ $n-1$ лѣтъ и обратится въ концѣ n-го года въ aq^{n-1}; третій взносъ a дастъ капиталъ aq^{n-2} и т. д. Наконецъ послѣдній взносъ a пролежитъ 1 годъ и обратится въ капиталъ aq. Поэтому въ концѣ n-аго года изъ всѣхъ накопившихся, наросшихъ взносовъ образуется капиталъ C, равный суммѣ слѣдующихъ членовъ

$$C=aq+aq^2+\ldots+aq^{n-2}+aq^{n-1}+aq^n.$$

Полученная сумма представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, первый членъ которой равенъ aq, а знаменатель равенъ q. Поэтому (см. стр. 51) находимъ

$$C=\frac{aq\ (1-q^n)}{1-q}=\frac{aq\ (q^n-1)}{q-1}.$$

Если взносы a будутъ производиться *въ концѣ каждаго года*, то читатель легко вычислитъ самостоятельно, что въ концѣ n-аго года составится капиталъ

$$C=a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Примѣръ: *Какую сумму составятъ ежегодные взносы, въ концѣ года, по 50 рублей въ теченіе 30 лѣтъ, отданные по $4^0/_0$ сложнымъ годовымъ?* Послѣдняя формула даетъ

$$C=50.\frac{(1{,}04)^{30}-1}{0{,}04}.$$

Въ приведенной выше таблицѣ мы найдемъ, что $(1{,}04)^{30}=$ $=3{,}24340$. Слѣдовательно,

$$C=50.\frac{3{,}2434-1}{0{,}04}=\frac{50.\ 2{,}2434}{0{,}04}=2804{,}25.$$

Поэтому искомая сумма равна 2804 руб. 25 коп.

Вычисленіе процентовъ дѣлается очень просто при помощи таблицъ приведеннаго выше вида. Если такихъ таблицъ нѣтъ

подъ руками, то при вычисленіи, во избѣжаніе громоздкихъ вычисленій, необходимо пользоваться такъ называемыми логарифмическими таблицами, которыя даютъ логарифмы чиселъ и обратно числа по ихъ логарифмамъ. Благодаря пользованію логарифмами умноженіе чиселъ замѣняется дѣйствіями сложенія, а возвышеніе въ степень—умноженіемъ [1]).

Вторая задача слѣдующая:

II. *На капиталъ K насчитываются $p^0/_0$ сложныхъ годовыхъ. Во что обращается капиталъ K черезъ n лѣтъ, если въ конецъ каждаго года къ нему прибавляется или отъ него отнимается отдѣльная сумма денегъ a?*

Какъ легко видѣть на основаніи (стр. 53) сказаннаго выше, капиталъ K черезъ n лѣтъ обращается въ Kq^n, гдѣ $q = 1 + \frac{p}{100}$. Что же касается ежегодныхъ присчисленій или отчисленій a, то, благодаря нарастанію на нихъ $^0/_0$, на основаніи формулы, выведенной въ предыдущей задачѣ (стр. 55), они образуютъ новый капиталъ $a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Поэтому капиталъ K черезъ n лѣтъ обращается въ слѣдующій капиталъ

$$Kq^n \pm a\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad , \qquad (2)$$

при чемъ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ предположенію, что дѣлаются ежегодныя прибавленія a къ первоначальному капиталу, а знакъ— соотвѣтствуетъ второму предположенію, что въ концѣ каждаго года изъ капитала K вынимается капиталъ a.

Разсмотримъ слѣдующій частный случай, когда отчисляемый въ концѣ каждаго года изъ общей суммы капиталъ a больше нарастающихъ за годъ процентовъ. Тогда очевидно, что, по истеченіи опредѣленнаго числа лѣтъ, весь капиталъ K и наросшіе на него за все время проценты будутъ совершенно исчерпаны. Если это послѣднее число лѣтъ обозначимъ черезъ n, то тогда очевидно предыдущее выраженіе (2) (гдѣ взять знакъ —) обращается въ нуль, и мы получаемъ слѣдующее равенство

$$Kq^n - a\frac{q^n - 1}{q - 1} = 0. \qquad (3)$$

Въ полученномъ равенствѣ находятся четыре величины K, q, n и a. Если три какихъ-либо изъ этихъ величинъ заданы, то четвертая можетъ быть опредѣлена изъ написаннаго равенства, которое тогда представляетъ уравненіе съ одной неизвѣстной.

---

[1]) Для ознакомленія съ пользованіемъ логарифмами при вычисленіяхъ отсылаемъ читателя къ книгѣ *Эмиль Борель*. Элементарная математика. Часть I. Одесса, 1911. Глава XX, стр. 402.

Примѣръ: *Какую сумму денегъ слѣдуетъ вносить въ концѣ каждаго года, чтобы погасить въ теченіе семи лѣтъ долгъ въ 20.000 рублей, сдѣланный изъ* $4^1/_2{}^0/_0$?

Подставляя данныя значенія въ равенство (3), получаемъ уравненіе

$$20.000 \,.\, 1{,}045^7 - a\,\frac{1{,}045^7 - 1}{0{,}045} = 0,$$

которое опредѣляетъ величину искомыхъ ежегодныхъ взносовъ a.

При помощи таблицъ или логарифмовъ получаемъ, что $1{,}045^7 = 1{,}3608$. Поэтому изъ послѣдняго уравненія находимъ, что

$$a = \frac{20000 \,.\, 1{,}3608 \,.\, 0{,}045}{0{,}3608} = \frac{1{,}3608 \,.\, 900}{0{,}3608} = 3394{,}50\,,$$

т.-е. величина ежегоднаго погашенія a составляетъ 3394 рублей 50 копѣекъ.

Рядъ уплатъ a называется *рентой*, каждый платежъ a называется *членомъ ренты*.

Формула (3) служитъ для рѣшенія различныхъ задачъ относительно ренты. Разрѣшая уравненіе (3) относительно K, получаемъ (K называется *стоимостью ренты*)

$$K = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad (4)$$

Примѣръ: *Вычислить капиталъ, который слѣдуетъ внести по истеченіи четвертаго года, чтобы выплатить единовременно ежегодную ренту въ 500 рублей, разсчитанную на 12 лѣтъ изъ* $3^1/_2{}^0/_0$. На основаніи формулы (4) получаемъ, что стоимость нашей ренты имѣетъ значеніе

$$K = \frac{500}{1{,}035^{12}} \cdot \frac{1{,}035^{12} - 1}{0{,}035}.$$

Но такъ какъ этотъ капиталъ не выплачивается въ теченіи четырехъ лѣтъ, то, благодаря наростанію на него $3^1/_2{}^0/_0$ сложныхъ годовыхъ, этотъ капиталъ увеличивается въ $1{,}035^4$ раза, т.-е. становится равнымъ

$$\frac{500}{1{,}035^8} \cdot \frac{1{,}035^{12} - 1}{0{,}035} = 5544{,}90.$$

Такимъ образомъ искомый капиталъ равенъ 5544 рублямъ 90 копѣйкамъ.

Рента называется *пожизненной*, если должна быть выплачиваема получателю въ теченіе всей его жизни. Такъ, напримѣръ, въ нѣкоторыхъ страховыхъ обществахъ возможно покупать пожизненную ренту, уплативъ опредѣленный капиталъ. Этотъ ка-

питалъ также вычисляется по формулѣ (4), при чемъ за число n берется вѣроятная продолжительность жизни покупателя ренты, опредѣляемая при помощи такъ называемыхъ *таблицъ смертности*, которыя устанавливаются на основаніи *статистическихъ свѣдѣній*, собираемыхъ въ каждой странѣ для лицъ различныхъ возрастовъ.

Если по условіямъ задачи неизвѣстною величиною въ уравненіи (3) является число лѣтъ n, то уравненіе (3) называется показательнымъ, такъ какъ неизвѣстная величина n входитъ въ показателѣ степени. Для рѣшенія подобныхъ уравненій приходится пользоваться логарифмами.

Рекомендуемыя руководства по арифметикѣ и алгебрѣ.

1. **Эмиль Борель.**—Арифметика. Первый Циклъ. Переводъ съ французскаго Ал. Долгова подъ редакціей Д. Л. Волковскаго. Изданіе Т-ва Сытина. Москва. Ц. 60 к.
2. **Борель-Штекель.**—Элементарная математика. I. Арифметика и Алгебра. Переводъ подъ редакціей прив.-доцента В. Ф. Кагана. Одесса. Ц. 3 р. Въ первой части послѣдняго перевода заключается указанная выше первая книга Эмиля Бореля—Арифметика.
3. **Дж. Перри.**—Практическая Математика, сокращенное изложеніе шести лекцій, прочитанныхъ для ремесленниковъ. Переводъ подъ редакціей В. В. Лермонтова. Изданіе Т-ва Сытина. Москва. Ц. 90 к.

   Въ этой книгѣ даются примѣры не только на отдѣлы арифметики и алгебры, но также и на другіе отдѣлы математики.

III. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

I. ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

1. Геометрическія тѣла и фигуры.

Геометрія, что по-гречески значитъ *землемѣріе*, ведетъ свое начало изъ древняго Египта, со временъ задолго до Р. Х. Развитію землемѣрія у Египтянъ способствовала рѣка Нилъ: разливаясь, она затопляла берега и оставляла на нихъ рѣчной илъ, дѣлавшій землю чрезвычайно плодородной. Благодаря этому, цѣнность затопляемыхъ земель была очень велика, и каждый землевладѣлецъ долженъ былъ хорошо умѣть вычислять границы своихъ владѣній, такъ какъ разливаясь Нилъ сносилъ знаки, которыми отмѣчались границы.

Предполагаютъ, что въ VI вѣкѣ до Р. Х. были перенесены въ Грецію знанія по геометріи, которыя были извѣстны египтянамъ. Тамъ геометрія достигла своего высокаго развитія. *Евклидъ* (300 до Р. Х.) далъ такое стройное изложеніе началъ геометріи, что въ Англіи, напримѣръ, до сихъ поръ его книгу употребляютъ, какъ учебникъ геометріи.

Въ Греціи геометрія утратила свой первоначальный практическій характеръ и приняла тотъ видъ, который имѣетъ она въ настоящее время [1]). Современная геометрія учитъ измѣрять не только землю, но *пространство* вообще: *это есть наука о свойствахъ пространства.*

Представимъ себѣ два совершенно одинаковыхъ предмета, напримѣръ, два шара, сдѣланныхъ изъ разнаго матеріала (пусть первый выточенъ изъ дерева, а второй отлитъ изъ чугуна); у нихъ различный вѣсъ, твердость и другія свойства. Но если мы погрузимъ ихъ въ сосудъ съ водою, то каждый шаръ вытѣснитъ одно и то же количество воды. Слѣдовательно, у нихъ есть нѣчто общее: способность занимать одно и то же пространство. Эта способность зависитъ, какъ мы видѣли, только отъ размѣровъ предмета и вовсе не зависитъ отъ его вещества.

Изучая свойства пространства, геометрія разсматриваетъ только размѣры предметовъ, представляя ихъ какъ бы лишенными вещества; такіе предметы мы будемъ называть *геометрическими*.

Если такой предметъ со всѣхъ сторонъ ограниченъ, то мы будемъ называть его *геометрическимъ тѣломъ*. Части его, которыми онъ отдѣляется, или ограничивается отъ другихъ предметовъ, называются *поверхностью*. Если поверхность разорвемъ на двѣ части, то граница разрыва образуетъ *линію*, а если то же самое произведемъ съ линіей, то граница, отдѣляющая одну часть линіи отъ другой, образуетъ *точку*.

Геометрическое тѣло имѣетъ длину, ширину и высоту (или 3 измѣренія); поверхность—только длину и ширину и не имѣетъ высоты (2 измѣренія); линія—только длину, не имѣя ширины и высоты (1 измѣреніе), а точка не имѣетъ ни длины, ни ширины, ни высоты (ни одного измѣренія).

Если мы возьмемъ двѣ точки на гладкомъ полу, натянемъ между ними бечевку, натертую мѣломъ и встряхнемъ ее, то на полу останется слѣдъ этой бечевки—*прямая линія* (или просто *прямая*).

Какъ бы мы ни трясли бечевку, всякій разъ она будетъ падать на одно и то же мѣсто, оставляя слѣдъ не многихъ раз-

---

[1]) Въ настоящее время вопросы землемѣрія разсматриваются въ особомъ отдѣлѣ математики, называемомъ *геодезіей*.

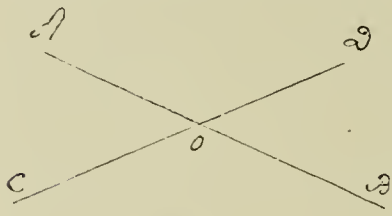
личныхъ между собой линій, а одной и той же линіи. Отсюда ясно, что *между двумя точками можно провести только одну прямую.*

Гладкій полъ, на которомъ мы чертили прямую мѣломъ, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что прямую линію можно уложить на этой поверхности всѣми своими точками, по всѣмъ возможнымъ направленіямъ. Такая поверхность называется *плоскостью.* Очевидно, если на плоскости имѣются двѣ точки A и B, то прямая, проходящая черезъ эти двѣ точки, будетъ лежать всѣми своими точками на плоскости. Обыкновенно мы чертимъ прямыя линіи на плоскости, пользуясь линейкой, вдоль которой проводимъ прямую линію карандашомъ или перомъ. Отсюда простой практическій пріемъ повѣрки линейки. Если линейка правильно сдѣлана, то она должна плотно прилегать всѣми своими точками къ плоскости, какъ ее ни прикладывать къ плоскости во всѣхъ направленіяхъ.

Линіи, начерченныя на плоскости, мы будемъ *называть фигурою.*

2. Углы.

Возьмемъ двѣ прямыхъ линіи AB и CD, которыя пересѣкаются въ точкѣ O (черт. 1). Около точки O мы будемъ разсматривать фигуру, образованную отрѣзками прямыхъ линій AO и CO; эта фигура называется *угломъ* AOC, и обозначается сокращенно слѣдующимъ образомъ $\angle AOC$[1]). Точка пересѣченія O прямыхъ линій AO и CO называется *вершиной* угла AOC, а прямыя AO и CO — *сторонами* этого угла.



Черт. 1.

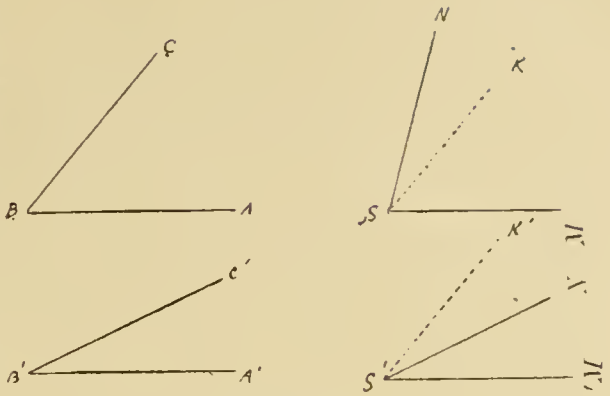
Легко видѣть, что кромѣ $\angle AOC$ прямыя линіи AB и CD образуютъ еще три угла съ той же вершиной O; углы эти слѣдующіе AOD, DOB и BOC.

Два угла AOC и AOD, имѣющіе общую вершину O, находящіеся по обѣ стороны одной общей стороны OA и имѣющіе двѣ другихъ стороны, расположенныхъ на одной прямой линіи, называются *смежными.* Такимъ же образомъ углы AOD и DOB тоже смежные. Читатель самъ легко замѣтитъ еще двѣ пары смежныхъ угловъ, расположенныхъ при той же вершинѣ O.

---

[1]) При обозначеніи угловъ принято всегда букву при вершинѣ помѣщать въ серединѣ между двумя буквами, опредѣляющими стороны. Напр., уголъ, о которомъ идетъ рѣчь, нельзя назвать $\angle ACO$ или $\angle CAO$, но необходимо обозначить $\angle AOC$ или $\angle COA$.

Углы называются *равными*, когда при наложеніи ихъ вершины и стороны совмѣщаются [1]). Легко составить понятіе о *суммѣ* и *разности* двухъ данныхъ угловъ ABC и $A'B'C'$ (черт. 2).



Черт. 2.

Уголъ MSN представляетъ сумму данныхъ угловъ, такъ какъ $\angle MSK = \angle ABC$ и $\angle KSN = \angle A'B'C'$ и, слѣдовательно, $\angle MSN = \angle ABC + \angle A'B'C'$. Такимъ же точно образомъ уголъ $N'S'K'$ представляетъ разность данныхъ угловъ ABC и $A'BC'$.

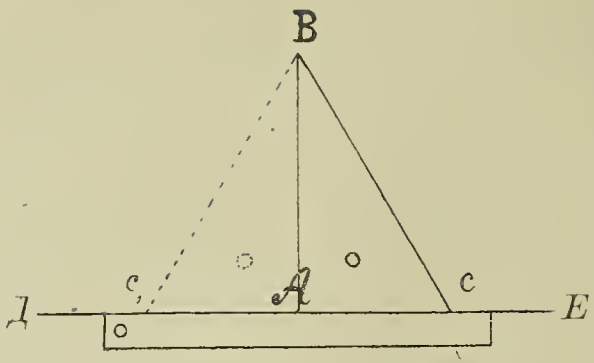
Если два смежныхъ угла равны другъ другу, т.-е. при наложеніи совпадаютъ, то каждый изъ этихъ угловъ называется *прямымъ*, и обыкновенно обозначается буквой d. Фигура, образуемая при этомъ пересѣкающимися прямыми, представляетъ крестъ (черт. 3), а эти прямыя называются *взаимно перпендикулярными*. То, что прямая CD перпендикулярна къ AB, записывается сокращено такъ: $AB \perp CD$. Убѣдиться, что углы COA и DOA прямые, мы могли бы перегнувши нашъ чертежъ вдоль прямой OA; если наши углы прямые, то при сложеніи чертежа сторона OD должна совпасть со стороной OC.

Черт. 3.

Чтобы провести *перпендикуляръ* къ прямой линіи пользуются очень простымъ приборомъ, представляющимъ деревянный или металлическій угольникъ ABC, изображенный на чертежѣ 4-омъ, съ прямымъ угломъ при вершинѣ A.

Чтобы возстановить перпендикуляръ къ прямой DE въ данной точкѣ, кладутъ линейку такъ, чтобы кромка ея расположилась вдоль прямой DE и къ линейкѣ плотно прикладываютъ угольникъ стороной AC такъ, чтобы точка его A совпадала съ дан-

[1]) Очевидно, на величину угла не вліяетъ длина сторонъ, образующихъ этотъ уголъ. Такъ, два угла остаются равными, если, не измѣняя прочихъ частей, въ одномъ изъ нихъ мы продолжимъ или укоротимъ стороны, его составляющія.



Черт. 4.

ной точкой; затѣмъ вдоль стороны AB проводятъ черту, которая и представляетъ искомый перпендикуляръ. Такъ какъ уголъ BAC долженъ быть прямымъ, то, перевернувъ угольникъ во второе положеніе ABC_1, отмѣченное пунктиромъ, увидимъ, что сторона AB совпадаетъ съ проведеннымъ перпендикуляромъ. Если бы этого не произошло, то это значитъ, или угольникъ невѣрно приготовленъ, или мы его недостаточно аккуратно прикладываемъ и неточно чертимъ прямую линію.

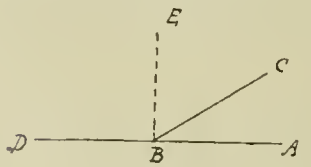
Уголъ, который меньше прямого, называется *острымъ*, а уголъ больше прямого называется *тупымъ*. На чертежѣ 5-омъ построены прямые углы DBE и ABE; уголъ ABC — острый, а уголъ CBD — тупой.

Мы дали понятіе о цѣломъ рядѣ геометрическихъ фигуръ. Цѣль геометріи заключается въ изученіи свойствъ послѣднихъ.

Такія свойства фигуръ, которыя являются очевидными, мы называемъ *аксіомами*. Напримѣръ, *черезъ двѣ данныя точки можно провести одну только прямую линію, представляющую кратчайшее разстояніе между этими точками.*

Другія свойства геометрическихъ фигуръ выводятся какъ слѣдствія изъ ихъ опредѣленій и изъ аксіомъ, при помощи ряда разсужденій. Такія предложенія называются *теоремами*.

Не всякія свойства фигуръ, которыя на первый взглядъ кажутся очевидными, суть аксіомы, не требующія доказательства. Вопросъ о томъ, какія предложенія являются аксіомами, относятся къ ученію о такъ называемыхъ «*Основаніяхъ геометріи*». Цѣль его установить наименьшее число необходимыхъ положеній (аксіомъ), на которыхъ было бы возможно построить всю геометрію. Подробнѣе объ этомъ читатель найдетъ въ слѣдующей далѣе 5-ой статьѣ (стр. 72).



Черт. 5.

Докажемъ слѣдующихъ двѣ теоремы

Теорема 1. *Сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

Пусть имѣемъ два смежныхъ угла $\angle ABC$ и $\angle CBD$ (черт. 5). Изъ точки B

возстановимъ перпендикуляръ BE. Слѣдовательно, $\angle ABE$ и $\angle EBD$ прямые, т.-е. равны d. Поэтому имѣемъ

$$\angle ABC = \angle ABE - \angle CBE = d - \angle CBE,$$
$$\angle CBD = \angle CBE + \angle EBD = \angle CBE + d.$$

Сложивъ эти равенства, получимъ

$$\angle ABC + \angle CBD = d - \angle CBE + \angle CBE + d = 2d,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Вертикальные углы равны между собою. Вертикальными* называютъ углы, которые имѣютъ общую вершину, а стороны одного являются продолженіемъ сторонъ другого. Такъ на чертежѣ 1-омъ углы AOC и DOB вертикальные. Углы AOD и COB тоже — вертикальные.

Такъ какъ углы AOC и COB (черт. 1) съ одной стороны и COB и BOD съ другой *смежные*, то, на основаніи предыдущей доказанной уже теоремы, напишемъ, что

$$\angle AOC + \angle COB = 2d$$
$$\angle COB + \angle BOD = 2d.$$

Вычтя изъ перваго равенства второе, получимъ

$$\angle AOC + \angle COB - \angle COB - \angle BOD = \angle AOC - \angle BOD = 2d - 2d = 0.$$

Слѣдовательно, $\angle AOC = \angle BOD$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если два угла имѣютъ общую вершину и одну общую сторону и въ суммѣ равны двумъ прямымъ, то эти углы смежные.*

Предположимъ, что оба угла не смежные, т.-е. двѣ не совпадающихъ стороны ихъ не образуютъ прямой линіи. Пусть, напримѣръ, эти углы будутъ $\angle DBE$ и $\angle EBC$ (черт. 5). Такъ какъ сумма ихъ, по условію, равна $2d$, а углы $\angle DBE$ и $\angle EBA$ тоже въ суммѣ равны $2d$, то приходимъ къ нелѣпому заключенію, что часть $\angle EBC$ угла EBA равна цѣлому $\angle EBA$. Поэтому необходимо заключить, что несовпадающія стороны нашихъ угловъ образуютъ прямую линію, т.-е. данные углы смежные.

При доказательствахъ въ геометріи приходится всегда пользоваться чертежемъ. Читатель при этомъ долженъ обращать особенное вниманіе на то, чтобы не попасть въ заблужденіе, благодаря тому или другому виду чертежа или вслѣдствіе его недостаточной точности.

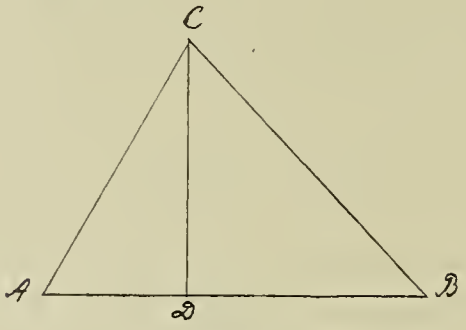
Для этого необходимо доказывать каждое дѣлаемое утвержденіе, насколько бы оно ни казалось наглядным и очевиднымъ, дѣлая исключеніе только для тѣхъ общепризнанныхъ утвержденій, которыя мы назвали аксіомами.

3. Треугольники.

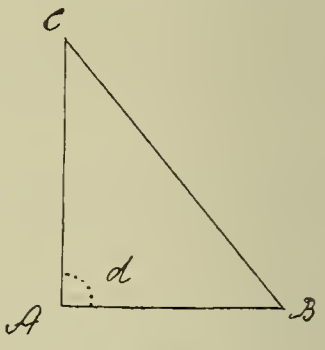
Три прямыхъ линіи, AB, AC и BC, пересѣкаясь, образуютъ *треугольникъ* ABC (черт. 6). Точки пересѣченія A, B и C называются *вершинами* треугольника. Каждый изъ отрѣзковъ AB, AC и BC называется *стороной* треугольника. Сокращенно треугольникъ обозначается черезъ $\triangle$.

Если изъ вершины C $\triangle$—ка ABC опустимъ перпендикуляръ CD на сторону AB; то CD называется *высотой*, а AB — *основаніемъ* нашего $\triangle$—ка.

Треугольники называются *равными*, если при наложеніи другъ на друга совпадаютъ своими вершинами и сторонами. Поэтому и стороны, и углы двухъ равныхъ треугольниковъ соотвѣтственно равны. Очевидно, что *въ двухъ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы, а противъ равныхъ угловъ — равныя стороны.*



Черт. 6.



Черт. 7.

Среди разнообразныхъ треугольниковъ отмѣтимъ такъ называемые *прямоугольные* треугольники (черт. 7), одинъ изъ угловъ которыхъ прямой; напримѣръ, въ нашемъ $\triangle$—кѣ (черт. 7) $\angle BAC$ прямой. Прилежащія къ нему стороны AB и AC называются *катетами*, а сторона BC, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*.

Если двѣ стороны $\triangle$—ка равны, то такой $\triangle$—къ называется *равнобедреннымъ*; если всѣ три стороны равны, то $\triangle$—къ называется *равностороннимъ*, или *правильнымъ*.

Мы исходимъ изъ аксіомы, что прямая — кратчайшее разстояніе между двумя точками (см. стр. 62). Отсюда сейчасъ же вытекаетъ, какъ слѣдствіе, *что сумма двухъ сторонъ* $\triangle$*—ка больше его третьей стороны*, т.-е., напримѣръ (черт. 6),

$$AC + CB > AB.$$

При помощи наложенія двухъ $\triangle$—ковъ одного на другой доказываются слѣдующія *условія равенства треугольниковъ.*

1) *Треугольники равны, если имѣютъ по двѣ равныхъ стороны, заключающихъ равные углы.*

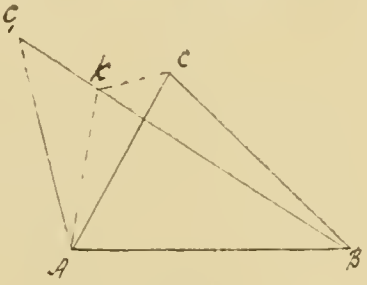
Убѣдиться въ этомъ очень просто. Налагаемъ △—ки вершинами равныхъ угловъ такъ, чтобы равныя стороны совпадали. Тогда, очевидно, остальныхъ двѣ вершины нашихъ △—ковъ тоже совпадутъ. А такъ какъ черезъ *двѣ точки проходитъ* одна только прямая, то, слѣдовательно и третьи стороны △—ковъ совпадутъ. Слѣдовательно, наши △—ки равны.

2) *Треугольники равны, если имѣютъ по два равныхъ угла, прилежащихъ къ равнымъ сторонамъ.*

Чтобы доказать равенство △—ковъ, наложимъ ихъ равными сторонами. Въ виду равенства прилежащихъ угловъ, направленія остальныхъ двухъ сторонъ совпадаютъ. Спрашивается, совмѣстятся ли третьи вершины △—ковъ? Допустимъ, что совмѣщеніе не произойдетъ. Но такъ какъ направленія сторонъ совпадаютъ, то, слѣдовательно, вершина накладываемаго △—ка упадетъ въ нѣкоторую точку стороны перваго △—ка. Соединяя ее съ остальными двумя вершинами накладываемаго △—ка, сейчасъ же видимъ, что соотвѣтственные углы обоихъ △—ковъ, прилежащіе къ ихъ равнымъ сторонамъ, оказываются неравными. Но это противно предположенію. Слѣдовательно, нельзя предположить, что третьи вершины △—ковъ, при наложеніи, не совпадаютъ. Если же онѣ совпадаютъ, то △—ки равны.

3) *Треугольники равны, если имѣютъ по три равныхъ стороны.*

Пусть имѣемъ треугольникъ ABC (черт. 8). Накладываемъ на него другой треугольникъ съ сторонами, равными сторонамъ △—ка ABC такъ, чтобы сторона его, равная AB, совмѣстилась съ послѣдней.



Черт. 8.

Равенство △—ковъ будетъ доказано, если убѣдимся, что соотвѣтственн углы ихъ равны. Предположимъ п тивное, что уголъ при вершинѣ A на дываемаго △—ка больше угла при ершинѣ A даннаго △—ка. Тогда, о евидно, третья вершина накладываемаго △—ка упадетъ въ нѣкоторую точку C_1, внѣ даннаго △—ка. Соединяемъ ее прямой линіей C_1B съ вершиной B. Уголъ C_1AC дѣлимъ прямой AK пополамъ. Тогда $\triangle AKC_1 = \triangle AKC$; дѣйствительно, эти △—ки имѣютъ по двѣ равныхъ стороны $AC_1 = AC$ (такъ какъ стороны даннаго △—ка ABC и накладываемаго на него △—ка равны), общую сторону AK и, по построенію, равные при вершинѣ A углы (см. условіе 1-е равенства △—ковъ, стр 64).

Изъ равенства △—ковъ AKC_1 и AKC слѣдуетъ, что $KC = KC_1$ Изъ △—ка BKC имѣемъ, что $BK + KC > CB$. Въ силу преды-

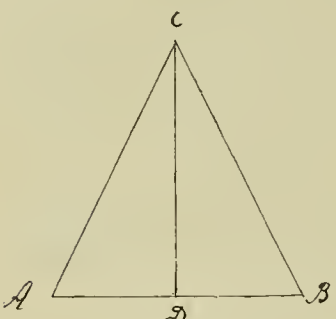
дущаго равенства, написанное неравенство становится $BK + KC_1 > CB$, или $BC_1 > CB$. Но послѣднее заключеніе невозможно, такъ какъ, по условію, стороны накладываемаго △—ка соотвѣтственно равны сторонамъ △—ка ABC. Поэтому нельзя допустить, что уголъ при вершинѣ A въ накладываемомъ △—кѣ больше $\angle A$ въ △ ABC. Такимъ же образомъ легко убѣдиться, что первый уголъ не можетъ быть меньше $\angle A$. Слѣдовательно, оба разсматриваемыхъ угла равны.

Если такъ, то, на основаніи перваго условія равенства △—ковъ (стр. 64), разсматриваемые △—ки равны.

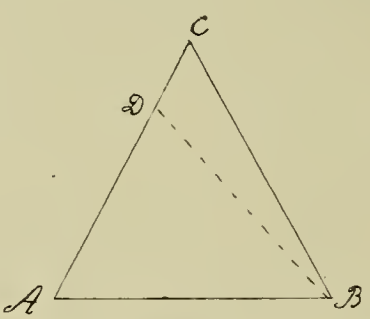
Изъ доказанныхъ условій равенства △—ковъ вытекаютъ важныя слѣдствія:

1) *Въ равнобедренномъ △—кѣ углы при основаніи равны, а высота дѣлитъ основаніе пополамъ.*

Въ равнобедренномъ △—кѣ ABC (черт. 9) сторона AB представляетъ основаніе. Проводимъ прямую CD, соединяющую вершину C съ серединой основанія D. Такъ какъ △—ки ADC и BDC имѣютъ по три равныхъ стороны, то они равны. Слѣдовательно, $\angle ADC = \angle BDC$. Такъ какъ далѣе эти углы смежные, то каждый изъ нихъ равенъ прямому углу. Поэтому прямая CD перпендикулярна къ AB, т.-е. представляетъ высоту нашего △—ка. Такъ какъ, по построенію, эта высота проходитъ черезъ точку D, то, слѣдовательно, дѣлитъ основаніе AB пополамъ.



Черт. 9.



Черт. 10.

2) *Въ правильномъ △—кѣ всѣ три угла равны.* Такъ какъ всѣ три стороны △—ка равны, то, прилагая предыдущія разсужденія послѣдовательно къ двумъ изъ сторонъ, принимая ихъ послѣдовательно за основанія, убѣждаемся, что всѣ три угла правильнаго △—ка равны.

3) *Если два изъ угловъ △—ка равны, то △—къ равнобедренный.* Пусть въ △ ABC (черт. 10) $\angle A = \angle B$. Чтобы доказать равенство сторонъ AC и BC, предположимъ противное, что $AC > BC$. Отложимъ отрѣзокъ $AD = BC$. Тогда △ ABC долженъ равняться △ ABD, потому что въ первомъ △—кѣ $\angle B$ заключенъ между сторонами AB и BC, а во-второмъ △—кѣ $\angle A$, равный $\angle B$, по условію заключенъ между сторонами, равными соотвѣтственно указаннымъ сторонамъ перваго △—ка. Однако равенство △ ABC

и $\triangle ABD$ невозможно, такъ какъ очевидно, что второй $\triangle$—къ представляетъ часть перваго. Поэтому невозможно допустить неравенство сторонъ AC и BC. Если же эти стороны равны, то, стало-быть, $\triangle ABC$ равнобедренный.

4) *Если всѣ три угла $\triangle$—ка равны, то $\triangle$—къ правильный.*

Въ справедливости этого предложенія легко убѣдиться, прилагая только что изложенныя разсужденія сперва къ одной парѣ угловъ, а затѣмъ ко второй парѣ угловъ.

Прилагая доказанныя выше условія равенства $\triangle$—ковъ къ прямоугольнымъ $\triangle$—камъ, которые всѣ имѣютъ по одному равному прямому углу, заключаемъ:

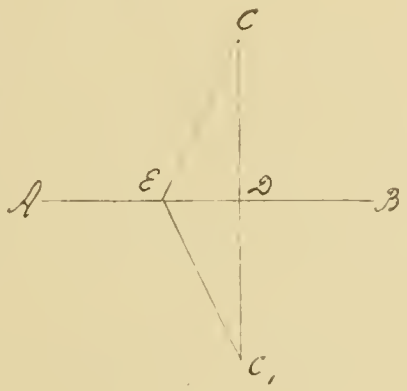
1) *Прямоугольные треугольники равны, если ихъ соотвѣтственные катеты равны.*

2) *Прямоугольные треугольники равны, если имѣютъ по одному равному катету и равному прилежащему къ нему углу.*

Изъ перваго условія можетъ быть получена слѣдующая теорема.

Теорема 4. *Изъ точки внѣ прямой можно опустить на нее одинъ только перпендикуляръ. Этотъ перпендикуляръ представляетъ кратчайшее разстояніе точки отъ прямой.*

Пусть CD (черт. 11) представляетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки C на прямую AB. Предположимъ, что изъ точки C возможно опустить второй перпендикуляръ CE на ту же прямую AB, такъ что $\angle DEC=d$. На продолженіи CD, по другую сторону отъ AB, отложимъ отрѣзокъ $C_1D=CD$ и точку C_1 соединяемъ E.



Черт. 11.

$\triangle$—ки ECD и EC_1D равны, такъ какъ оба катета ихъ равны. Такъ какъ сходственные углы равны, то, стало-быть, также $\angle DEC_1=d$. Итакъ, $\angle CED$ и $\angle DEC_1$ въ суммѣ равны $2d$. Слѣдовательно, эти углы смежные и линія CEC_1 должна представлять собой прямую. Однако, по основной аксіомѣ, между двумя точками C и C_1 можно провести только одну прямую. Поэтому мы приходимъ къ заключенію, что изъ точки C возможно опустить только одинъ перпендикуляръ на прямую AB.

Итакъ, доказавъ, что CE не можетъ быть $\perp$ къ AB, возвращаемся къ разсмотрѣнію равныхъ $\triangle$—ковъ ECD и EC_1D. Изъ равенства ихъ слѣдуетъ равенство сторонъ $CE=EC_1$. Точки C и C_1 соединяются прямой линіей CC_1, которая короче ломанной, состоящей изъ двухъ равныхъ отрѣзковъ CE и EC_1, такъ какъ

прямая линія представляетъ кратчайшее разстояніе между двумя точками. Но $CC_1=2CD$. Слѣдовательно, $2CD<2CE$ или $CD<CE$, то-есть *перпендикуляръ короче наклонной*.

Доказанная теорема приводитъ къ слѣдующему третьему условію равенства прямоугольныхъ треугольниковъ.

3) *Прямоугольные треугольники равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по одному равному прилежащему къ нимъ углу.*

Для доказательства наложимъ оба △—ка такъ, чтобы гипотенузы и равные углы совмѣстились. Поэтому направленія катетовъ обоихъ △—ковъ, прилегающихъ къ равнымъ угламъ, также совмѣстятся. Вопросъ сводится къ тому, совмѣстятся ли катеты, противолежащіе даннымъ угламъ. Но такъ какъ изъ вершины, гдѣ пересѣкаются эти катеты съ гипотенузой, можно опустить одинъ только перпендикуляръ на катетъ, противолежащій этой вершинѣ, то отсюда слѣдуетъ, что всѣ три вершины разсматриваемыхъ △—ковъ должны совмѣститься и, стало-быть, △—ки равны.

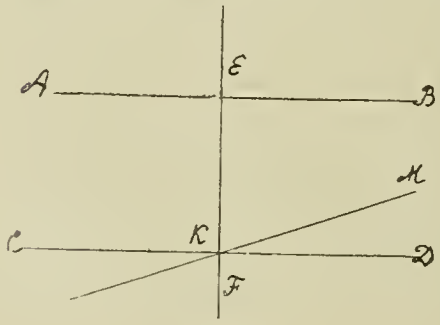
Часто точка D (черт. 11) называется прямоугольной (ортогональной) *проекціей* точки C на прямую (ось) AB, а отрѣзокъ ED *прямоугольной проекціей* отрѣзка EC на прямую (ось) AB.

4. Параллельныя прямыя.

Если возьмемъ линейку, хорошо вывѣренную съ обѣихъ кромокъ, которая была бы одной и той же ширины, положимъ ее на плоскость и проведемъ вдоль обѣихъ кромокъ ея двѣ прямыхъ линіи, то онѣ называются *параллельными*. Отличительный признакъ *параллельныхъ линій AB и CD* (черт. 12) заключается въ томъ, что *обѣ линіи не пересѣкаются, какъ бы далеко мы ихъ ни продолжали*.

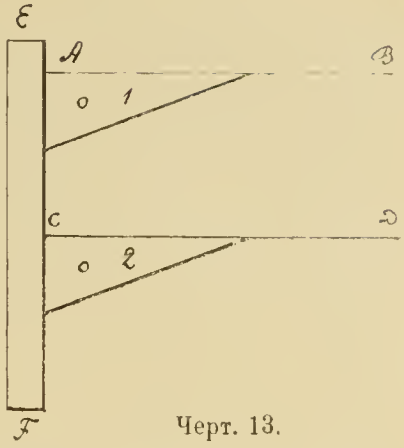
Теорема 5. *Двѣ прямыхъ, перпендикулярныхъ къ третьей, параллельны между собой.*

Пусть дана прямая EF (черт. 12) и двѣ перпендикулярныхъ къ ней прямыхъ AB и CD. Чтобы доказать, что онѣ параллельны, предположимъ противное, а именно, что эти прямыя не параллельны и, стало-быть, при продолженіи пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ. Въ такомъ случаѣ наши прямыя будутъ представлять два перпендикуляра, опущенныхъ изъ этой точки на прямую EF. Но это невозможно, въ силу теоремы 4-ой. Поэтому прямыя AB и CD должны быть параллельны.



Черт. 12.

На этой теоремѣ основанъ простой способъ проведенія параллельныхъ линій. Къ линейкѣ EF прикладываютъ угольникъ, какъ показано на чертежѣ 13-омъ, въ положеніи 1-омъ, и проводятъ прямую AB. Затѣмъ, не измѣняя положенія линейки EF, передвигаютъ угольникъ въ положеніе 2-ое и чертятъ прямую CD, которая, очевидно, параллельна AB, въ силу только что доказанной теоремы.



Черт. 13.

При разсмотрѣніи свойствъ параллельныхъ прямыхъ основываются на такъ называемомъ *постулатѣ Эвклида*, который мы принимаемъ *какъ аксіому*. Она гласитъ, что *черезъ точку внѣ прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой*. Такъ, если черезъ точку K (черт. 12) проходитъ прямая CD, параллельная прямой AB, то всякая другая прямая KM не можетъ быть параллельна AB.

Теорема 6. *Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ линій, перпендикулярна также ко второй параллельной линіи.*

Предположимъ, даны параллельныя линіи AB и CD (черт. 12). Проводимъ прямую EF перпендикулярно къ прямой AB. Прямая EF должна пересѣчь прямую CD, такъ какъ иначе черезъ точку E проходило бы двѣ прямыхъ, AB и EF, непересѣкающихъ CD, то-есть, параллельныхъ къ ней, что невозможно, въ силу введеннаго выше постулата. Пусть EF пересѣкаетъ прямую CD въ точкѣ K. Ясно, что EF перпендикулярна къ CD, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, построивъ прямую KM перпендикулярно къ EF, заключили бы на основаніи теоремы 5-ой, что KM параллельна AB. Слѣдовательно, черезъ точку K должны были бы проходить двѣ прямыхъ CD и KM, параллельныхъ прямой AB, что невозможно. Слѣдовательно, прямая EF перпендикулярна также къ прямой CD.

Возьмемъ двѣ параллельныхъ прямыхъ AB и CD (черт. 14). Пересѣчемъ ихъ прямой EF, которую назовемъ *сѣкущей*. Она образуетъ съ нашими параллельными восемь угловъ, обозначенныхъ значками 1 и 2.

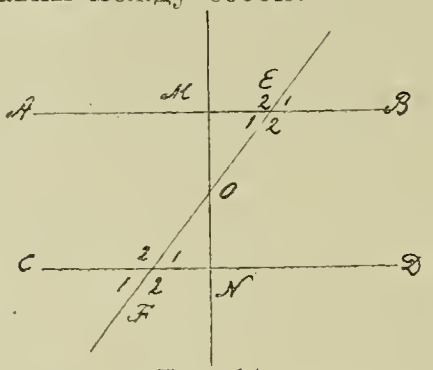
Очевидно, что *углы, отмѣченные одинаковыми значками при одной и той же вершинѣ, равны*, такъ какъ представляютъ вертикальные углы (теорема 2-ая, стр. 63).

Углы, лежащіе между прямыми AB и CD, называются *внутренними*, остальные *внѣшними*. Какъ внутренніе, такъ и внѣ-

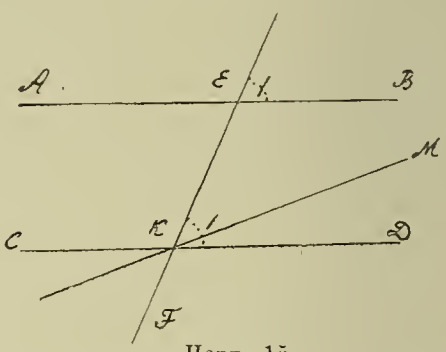
шніе углы, лежащіе по разныя стороны отъ сѣкущей, но не смежные, называются *накрестлежащими*. Углы, лежащіе по одну сторону отъ сѣкущей, не смежные, одинъ внутри, другой снаружи, называются *соотвѣтственными*.

Теорема 7. *Двѣ параллельныхъ линіи образуютъ съ сѣкущей равные накрестлежащіе и соотвѣтственные углы.*

Для доказательства дѣлимъ въ точкѣ O (черт. 14) пополамъ отрѣзокъ EF, такъ что $OE=OF$ и изъ точки O проводимъ прямую MN, перпендикулярную обѣимъ параллельнымъ линіямъ AB и CD. Треугольники MEO и NOF равны, какъ прямоугольные съ равными гипотенузами и прилежащими къ ней углами при вершинахъ O. Отсюда слѣдуетъ равенство сходственныхъ угловъ $\angle OFN = \angle OEM$, т.-е. накрестлежащіе углы 1 равны между собою.



Черт. 14.



Черт. 15.

Наконецъ, само собою разумѣется, что углы, отмѣченные значками 1 и 2, дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ, такъ какъ при каждой точкѣ пересѣченія они являются смежными; отсюда слѣдуетъ равенство накрестлежащихъ угловъ 2.

Теорема 8. *Двѣ прямыхъ, равнонаклоненныхъ къ третьей, параллельны.*

Мы называемъ прямыя AB и CD (черт. 15) равнонаклоненными къ EF, если, напримѣръ, углы, отмѣченные значкомъ 1, равны.

Предположимъ, что эти углы равны, а прямыя AB и CD не параллельны. Проведемъ въ такомъ случаѣ черезъ точку K прямую $KM \parallel$ [1]) AB. Тогда, по предыдущей теоремѣ, $\angle MKE$ долженъ равняться углу, отмѣченному значкомъ 1 при точкѣ E, что, конечно, невозможно, если прямая KM не совпадаетъ съ CD. Слѣдовательно, прямыя AB и CD параллельны.

Тѣ же разсужденія вполнѣ примѣнимы относительно любой пары соотвѣтственныхъ или накрестлежащихъ угловъ.

Разсмотрѣнныя свойства параллельныхъ прямыхъ приводятъ къ ряду слѣдующихъ слѣдствій.

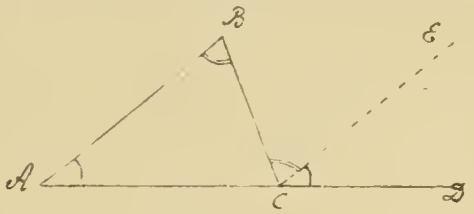
---

[1]) Знакъ $\parallel$ обозначаетъ параллельность двухъ прямыхъ KM и AB.

1) Внѣшній уголъ △—ка равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ угловъ.

Внѣшнимъ угломъ △—ка ABC (черт. 16) называется $\angle BCD$, образованный одной изъ сторонъ △—ка съ продолженіемъ ея смежной стороны.

Проведя прямую $EC \parallel AB$, видимъ, что отмѣченные одинаковыми дугами углы равны. Слѣдовательно, $\angle BCD = \angle A + \angle B$.



Черт. 16.

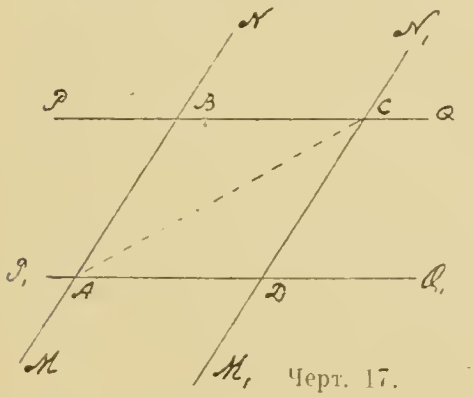
2) Сумма трехъ угловъ △—ка равна двумъ прямымъ.

Дѣйствительно, мы имѣли $\angle BCD = \angle A + \angle B$ (черт. 16). Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = \angle BCD + \angle C = 2d$.

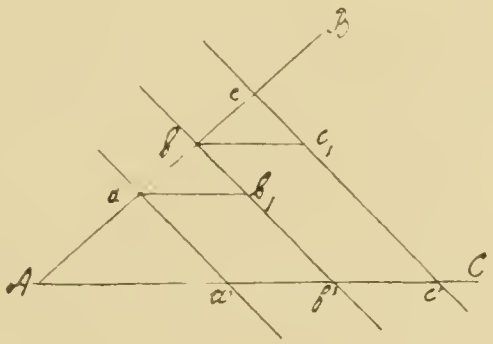
3) Въ прямоугольномъ △—кѣ углы, прилежащіе къ гипотенузѣ, дополняютъ другъ друга до прямого угла.

Такъ какъ $\angle A = d$ (черт. 7), то, очевидно, $\angle B - \angle C = d$, такъ какъ всѣ три угла въ суммѣ равны $2d$.

4) Отрѣзки параллельныхъ линій, заключенные между параллельными линіями, равны между собою, то-есть, если (чертежъ 17) $MN \parallel M_1N_1$ и $PQ \parallel P_1Q_1$, то $AB = DC$ и $AD = BC$.



Черт. 17.



Черт. 18.

Соединивъ точки A и C прямою линіею, заключаемъ, что $\triangle ABC = \triangle ACD$, такъ какъ эти △—ки имѣютъ по равной сторонѣ AC съ двумя равными прилежащими къ ней углами. Поэтому сходственныя стороны равны $AB = DC$ и $AD = BC$.

5) Если на одной изъ сторонъ угла отложить равные отрѣзки и черезъ точки дѣленія провести параллельныя прямыя, то онѣ намѣчаютъ на второй сторонѣ угла тоже равные отрѣзки.

Отложимъ на сторонѣ AB угла CAB (черт. 18) равные отрѣзки $ab = bc = \ldots$ и черезъ точки a, b, c... проведемъ параллельныя прямыя aa', bb', cc', ...

Черезъ точки a, b, c, ... проводимъ прямыя ab_1, bc_1, ..., параллельныя AC. Получимъ рядъ треугольниковъ $\triangle\ abb_1$,

$\triangle$ bcc_1, . . . *равныхъ между собою*, такъ какъ они имѣютъ равныя стороны съ двумя прилежащими равными углами.

Поэтому заключаемъ, что $ab_1 = bc_1$, . . . Но по предыдущему слѣдствію 4-му, имѣемъ $ab_1 = a'b'$, $bc_1 = b'c'$, . . . ; отсюда, на основаніи предыдущаго равенства, слѣдуетъ, что $a'b' = b'c'$, . . .

5. Геометрическія аксіомы. Геометрія Лобачевскаго.

Доказательства геометрическихъ теоремъ состоятъ изъ ряда ссылокъ на другія извѣстныя истины, которыя раньше были доказаны. Но въ концѣ-концовъ мы приходимъ къ истинамъ, принимаемымъ безъ доказательства, которыя мы выше назвали *аксіомами* (стр. 62).

Первая аксіома относится къ прямой линіи и говоритъ, что *между двумя точками можно провести одну и только одну прямую.*

Мы непосредственно пользуемся этой аксіомой, доказывая, напримѣръ, теорему 4-ую.

Нетрудно видѣть, однако, что даже одна изъ самыхъ простыхъ теоремъ въ геометріи, о равенствѣ $\triangle$—ковъ, доказывается не только на основаніи этой аксіомы.

Возьмемъ хотя бы теорему о равенствѣ двухъ треугольниковъ по двумъ сторонамъ и углу между ними (стр. 64); доказательство состоитъ въ томъ, что мы *накладываемъ* одинъ треугольникъ на другой и убѣждаемся, что они при этомъ совпадутъ; отсюда мы дѣлаемъ окончательный выводъ, что сравниваемые треугольники равны.

Если бы треугольникъ, который мы переносимъ съ его прежняго мѣста и накладываемъ на другой, при этомъ какъ-нибудь мѣнялся, то, очевидно, совпаденіе этого новаго треугольника не давало бы намъ никакихъ данныхъ, чтобы судить о равенствѣ или неравенствѣ данныхъ $\triangle$—ковъ.

Итакъ, мы должны принять вторую аксіому:

При передвиженіи геометрическихъ фигуръ по плоскости, онѣ не измѣняются.

Это чрезвычайно важное свойство плоскости; очень многія поверхности лишены этого свойства.

Возьмите, напримѣръ, куриное яйцо и, вырѣзавъ гдѣ-нибудь въ тупой его части треугольничекъ, попробуйте наложить его на болѣе острую часть яйца; при малѣйшей попыткѣ плотно приложить его къ поверхности этой части яйца, нашъ треугольничекъ разломается: это происходитъ оттого, что по поверхности яйца нельзя передвигать фигуръ, не измѣняя ихъ.

Нѣкоторыя изъ геометрическихъ теоремъ можно доказать *только при помощи этихъ двухъ аксіомъ.*

Пока мы говоримъ о смежныхъ и вертикальныхъ углахъ, о перпендикулярахъ и наклонныхъ, о равенствѣ треугольниковъ (стр. 62—68), мы еще можемъ обойтись съ этими двумя аксіомами, о прямой и о плоскости.

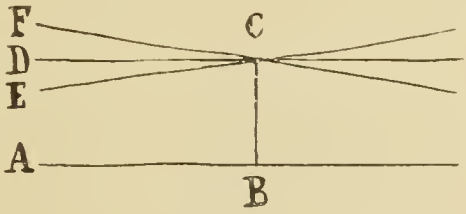
Но стоитъ намъ перейти къ теоремамъ, гдѣ такъ или иначе появляются *параллельныя* прямыя, какъ мы вынуждены принять еще одну аксіому (стр. 69):

Черезъ данную точку, находящуюся внѣ данной прямой, можно провести только одну прямую параллельную данной.

Изъ теоремъ, которыя невозможно доказать безъ помощи этой новой [1]) аксіомы, я обращу вниманіе на теорему о суммѣ угловъ треугольника (стр. 71, слѣдствіе 2-ое): эта теорема такъ тѣсно связана съ постулатомъ Евклида, что все равно, принять ли его на вѣру, или допустить, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ; изъ одного сейчасъ же вытекаетъ другое.

Правильность первыхъ двухъ указанныхъ аксіомъ до чрезвычайности очевидна; но постулатъ Евклида не отличается подобной простотой.

Возьмемъ прямую AB (черт. 19) и проведемъ BC перпендикулярно къ AB, а CD перпендикулярно къ BC. Прямыя AB и CD не пересѣкаются т.-е. будутъ параллельны [2]). Является вопросъ: а если мы проведемъ черезъ точку C еще другую прямую CE (или CF), составляющую съ CD очень малый уголъ, то можетъ быть можно провести эту прямую подъ такимъ угломъ къ CD, что она не пересѣчется съ AB?



Черт. 19.

Какъ опровергнуть это?

Въ сущности постулатъ Евклида въ томъ и состоитъ, что всякая другая прямая (проходящая черезъ точку C), за исключеніемъ CD, пересѣкаетъ прямую AB.

Благодаря трудамъ русскаго ученаго *Н. И. Лобачевскаго* [3]) (1793—1856), портретъ котораго прилагается на слѣдующей стра-

---

[1]) Эту аксіому часто называютъ *постулатомъ Евклида* (постулатъ—это то, что мы принимаемъ на вѣру, безъ доказательства).

[2]) Это легко доказать пользуясь только двумя первыми аксіомами (см. теорему 5, на стр. 68).

[3]) Съ подробной біографіей Н. И. Лобачевскаго читатель можетъ познакомиться по книжкѣ: *Н. И. Лобачевскій, его жизнь и ученая дѣятельность.* Біографическій очеркъ Е. Ф. Литвиновой. Петербургъ, 1894. Біографическая бібліотека Ф. Павленкова. Ц. 25 к.

ницѣ, и *І. Больаи* (1802—1860), пришедшимъ, независимо другъ отъ друга—одинъ въ Россіи, другой въ Венгріи — къ однимъ и тѣмъ же результатамъ, можно считать установленнымъ въ настоящее время, что *постулатъ Евклида* представляетъ аксіому, которую мы въ правѣ принять или не принять.

Оставивъ на время вопросъ о «пріемлемости» постулата Евклида, познакомимся ближе съ выводами или, какъ иногда говорятъ, съ «геометріей Лобачевскаго».

Вопреки постулату Евклида, Лобачевскій предположилъ, *что можно провести прямую CE, которая не пересѣчется съ AB, несмотря на то, что она будетъ составлять съ прямой CD нѣкоторый, хотя и малый, уголъ.*

Если уголъ DCF есть наибольшій уголъ, который можетъ составлять прямая, не пересѣкаясь съ AB, то, очевидно, всякая другая прямая, лежащая внутри угла ECF также не будетъ пересѣкать прямой AB; что же касается прямыхъ, проходящихъ внѣ этого угла черезъ точку C, то всѣ онѣ будутъ пересѣкаться съ AB.

Такимъ образомъ прямыя CE и CF отдѣляютъ прямыя, пересѣкающіяся съ прямой AB отъ прямыхъ, не пересѣкающихся съ ней.

Эти прямыя играютъ такую же роль въ геометріи Лобачевскаго, какъ въ обыкновенной («евклидовской геометріи») прямая параллельная прямой AB.

Мы такъ ихъ и назовемъ: «параллельныя Лобачевскаго»; но такъ какъ ихъ двѣ, то, чтобы различать ихъ, одну CE назовемъ *лѣво-параллельной*, а другую—CF—*право-параллельной*.

У Лобачевскаго, значитъ, параллельныхъ прямыхъ *двѣ*, а не одна, какъ у Евклида.

Кромѣ того, ни одна изъ нихъ не находится все время на одномъ и томъ же разстояніи отъ AB. Чѣмъ далѣе мы будемъ удаляться отъ точки C, напримѣръ, влѣво, тѣмъ ближе CE (лѣво-параллельная) будетъ подходить къ AB, но, какъ мы знаемъ, никогда съ ней не встрѣтится. Разстояніе между этими двумя прямыми будетъ все уменьшаться, но никогда не сдѣлается нулемъ.

Самый интересный выводъ, къ которому мы приходимъ, принявъ допущеніе Лобачевскаго, состоитъ въ томъ, что *сумма угловъ треугольника всегда меньше двухъ прямыхъ*. При этомъ она тѣмъ больше отличается отъ двухъ прямыхъ, чѣмъ самъ треугольникъ больше (точнѣе говоря: разность между двумя прямыми и суммой угловъ пропорціональна площади треугольника).

Н. И. Лобачевскій

Эта теорема въ геометріи Лобачевскаго, повидимому, даетъ намъ надежное средство узнать, кто «правъ»: Евклидъ или Лобачевскій? Стоитъ только измѣрить углы въ какомъ-нибудь треугольникѣ (взявъ его, для убѣдительности, побольше!); если сумма ихъ окажется равна 180°, то, значитъ, постулатъ Евклида вѣренъ, если же меньше, то придется принять «постулатъ» Лобачевскаго.

Окончательнымъ судьей здѣсь долженъ, такимъ образомъ, явиться опытъ.

Но гдѣ мы найдемъ достаточно большіе треугольники? Земныя разстоянія слишкомъ ничтожны для насъ, и единственный выходъ—взять за вершины такого треугольника какія-нибудь двѣ звѣзды и землю. У астрономовъ есть богатый выборъ звѣздъ, которыя находятся отъ насъ на такомъ громадномъ разстояніи, что свѣтъ—пролетающій въ одну секунду около 300 тысячъ верстъ—доходитъ отъ нихъ до земли не ранѣе, чѣмъ черезъ десятки и сотни лѣтъ.

Такіе треугольники брали; опредѣляли углы и находили сумму ихъ; она получалась въ большинствѣ случаевъ *меньше* 180°.

Этотъ фактъ внушилъ одному нѣмецкому ученому мысль—назвать геометрію Лобачевскаго—«звѣздной геометріей». (Самъ Лобачевскій давалъ ей названіе— воображаемой геометріи). Однако во всѣхъ случаяхъ уклоненіе суммы угловъ отъ 180° было настолько мало, что его можно объяснить несовершенствомъ нашихъ инструментовъ, ошибающихся и на большія величины!

Допустимъ даже, что наблюденіе дастъ намъ сумму значительно меньшую 180°. Кто можетъ намъ помѣшать думать, что постулатъ Евклида вѣренъ, но что *свѣтъ*, (лучи котораго служатъ сторонами нашего «междузвѣзднаго» треугольника) распространяется не прямолинейно? Очевидно, это будетъ самый естественный выводъ изъ этихъ наблюденій, и мы его сдѣлаемъ.

Такимъ образомъ *отъ насъ вполнѣ зависитъ принять, или не принять постулатъ Евклида*, тѣмъ болѣе, что, какъ оказывается, и при допущеніи Лобачевскаго можно производить всѣ измѣренія, удовлетворяющія требованіямъ опытныхъ наукъ.

Какія же преимущества имѣетъ геометрія Евклида?

Преимущество есть — единственное, но громадное: упрощеніе разсужденій и въ особенности вычисленій. Эта *простота* и есть основаніе для того, чтобы ввести постулатъ Евклида въ число аксіомъ.

Къ чему же сводится въ такомъ случаѣ цѣнность геометріи Лобачевскаго? Правда, она, такъ сказать, равноправна евклидовой геометріи, но вѣдь мы въ силу указанныхъ мотивовъ предпочли послѣднюю...

Одну услугу наукѣ геометрія Лобачевскаго уже оказала: безъ ея помощи нельзя было бы установить съ полной достовѣрностью, что постулатъ Евклида—аксіома.

Этого мало; изслѣдованія по геометріи, отличающейся отъ евклидовой, оказали сильное вліяніе на нѣкоторыя отрасли высшей математики; здѣсь не мѣсто подробно говорить объ этомъ, и я ограничусь указаніемъ, что нѣмецкимъ ученымъ Риманномъ (1826—1866) была создана геометрія, не похожая ни на евклидовскую, ни на геометрію Лобачевскаго: *въ ней совсѣмъ нѣтъ параллельныхъ*—всякія двѣ прямыя обязательно пересѣкаются. Эти двѣ геометріи—Лобачевскаго и Риманна—часто называютъ «неевклидовыми геометріями», такъ какъ обѣ—каждая на свой ладъ—отрицаютъ постулатъ Евклида.

Вліяніе идей Лобачевскаго выходитъ далеко за предѣлы геометріи—а именно въ область философіи.

Развитіе математики, какъ наиболѣе разработанной науки, всегда оставляло слѣдъ въ философіи, въ особенности при разрѣшеніи вопросовъ, какъ мы познаемъ внѣшній міръ, и что̀ мы можемъ знать о немъ (такъ называемой «теоріи познанія»). Понятно, что такой крупный шагъ въ пониманіи аксіомъ геометріи и открытіе возможности имѣть представленіе о пространствахъ, не похожихъ на то, къ которому мы привыкли, не могли остаться безъ вліянія на эту отрасль человѣческаго изслѣдованія; вліяніе это огромно и въ настоящее время еще далеко не исчерпано.

Главное же значеніе геометріи Лобачевскаго состоитъ въ томъ, что въ будущемъ она можетъ—вполнѣ или отчасти—занять мѣсто евклидовой геометріи: тѣ самыя соображенія—большая простота и удобство—заставляющія насъ теперь высказываться за евклидову геометрію, впослѣдствіи, при развитіи физики, химіи, астрономіи и механики, могутъ привести насъ къ принятію постулата Лобачевскаго. Можетъ случиться, что нѣкоторыя явленія природы могутъ быть лучше описаны и поняты нами, если мы допустимъ, что въ нашемъ пространствѣ имѣетъ мѣсто геометрія Лобачевскаго.

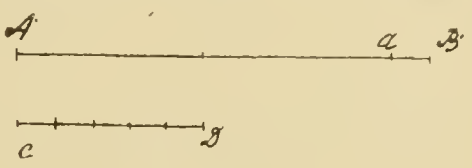
6. Измѣреніе отрѣзковъ. Пропорціональные отрѣзки.

Читателю хорошо извѣстно понятіе объ измѣреніи длины. Намъ постоянно приходится измѣрять длину вершками, аршинами, саженями или верстами.

Поэтому будетъ понятно, если мы скажемъ, что *измѣрить отрѣзокъ прямой линіи значитъ найти число, показывающее сколько разъ укладывается въ измѣряемомъ отрѣзкѣ другой отрѣзокъ, принятый за единицу измѣренія.*

Возьмемъ два отрѣзка AB и CD (черт. 20). Предположимъ, что меньшій отрѣзокъ CD укладывается два раза въ большемъ отрѣзкѣ AB и, кромѣ того, остается малый отрѣзокъ aB. Если послѣдній отрѣзокъ укладывается, напримѣръ, 5 разъ въ отрѣзкѣ CD, то въ такомъ случаѣ отрѣзокъ aB укладывается цѣлое число разъ, 11, въ отрѣзкѣ AB и называется *общей мѣрой* отрѣзковъ AB и CD.

Если бы отрѣзокъ aB не укладывался цѣлое число разъ въ отрѣзкѣ CD, то мы стали бы поступать съ полученнымъ остаткомъ и отрѣзкомъ aB точно такъ, какъ поступали съ отрѣзками aB и CD, пока не нашли бы общую мѣру этихъ отрѣзковъ. Ихъ общая мѣра, очевидно, служила бы общей мѣрой также и для данныхъ отрѣзковъ AB и CD.



Черт. 20.

Если два отрѣзка имѣютъ общую мѣру, то они называются *соизмѣримыми*. Если же два отрѣзка общей мѣры не имѣютъ, то они называются *несоизмѣримыми*.

Если два данныхъ отрѣзка несоизмѣримы, то это значитъ, что большій отрѣзокъ не можетъ быть измѣренъ при помощи меньшаго отрѣзка и его частей. Само собою разумѣется, что это не мѣшаетъ измѣрить первый отрѣзокъ при помощи какого-либо новаго отрѣзка и его частей.

Если два отрѣзка соизмѣримы, то ясно, что ихъ *отношеніе* (см. стр. 42) выражается отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ, при сдѣланномъ первоначальномъ предположеніи, относительно отрѣзковъ AB и CD, мы имѣли, что $AB = 11aB$, $CD = 5aB$. Слѣдовательно,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{11}{5}.$$

Но если два отрѣзка несоизмѣримы, то, понятно, мы не будемъ въ состояніи выразить ихъ отношеніе отношеніемъ двухъ цѣлыхъ чиселъ.

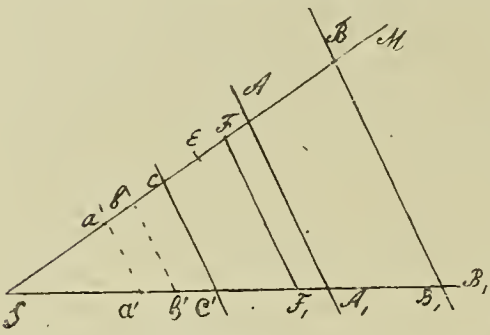
Однако легко убѣдиться, что независимо отъ того, будутъ ли данные отрѣзки соизмѣримы или нѣтъ, всегда ихъ отношеніе можетъ быть выражено отношеніемъ двухъ другихъ отрѣзковъ. Если отношеніе двухъ отрѣзковъ, равно отношенію двухъ другихъ

отрѣзковъ, то говорятъ, что эти *отрѣзки образуютъ пропорцію* (см. стр. 43).

Теорема 9. *Если уголъ MSN* (черт. 21) *разсѣчемъ двумя параллельными прямыми, образующими отрѣзки AS, A_1S, BS, B_1S, то отрѣзки эти пропорціональны, то-есть*

$$\frac{AS}{BS}=\frac{A_1S}{B_1S}. \qquad (1)$$

Предположимъ, что отрѣзки AS и BS соизмѣримы и ихъ общая мѣра k укладывается m разъ въ отрѣзкѣ AS и n разъ въ BS. Пусть a, b, c три какихъ-либо изъ послѣдовательныхъ точекъ дѣленія SB на k равныхъ частей. Черезъ эти точки дѣленія проведемъ прямыя линіи параллельныя линіямъ AA_1 и BB_1. Тогда, на основаніи послѣдняго 5-аго изъ слѣдствій (стр. 71), вытекающихъ изъ свойствъ $\parallel$ прямыхъ, отрѣзки A_1S и B_1S раздѣлятся тоже на равныя части $a'b', b'c'$. Называя длину ихъ черезъ k_1, получимъ, что



Черт. 21.

$$AS=mk, \quad A_1S=mk_1,$$
$$BS=nk, \quad B_1S=nk_1.$$

Слѣдовательно.

$$\frac{AS}{BS}=\frac{m}{n}; \quad \frac{A_1S}{B_1S}=\frac{m}{n}, \text{ или } \frac{AS}{BS}=\frac{A_1S}{B_1S},$$

что и требовалось доказать.

Предположимъ теперь, что отрѣзки AS и BS несоизмѣримы. Докажемъ, что и въ этомъ случаѣ справедлива выведенная пропорція.

Чтобы доказать это, допустимъ противное, именно, что доказываемое равенство не имѣетъ мѣсто, и положимъ, что первое отношеніе больше второго, то-есть

$$\frac{AS}{BS}>\frac{A_1S}{B_1S}. \qquad (2)$$

Вмѣсто отрѣзка AS возьмемъ меньшій отрѣзокъ ES, который выберемъ именно такъ, чтобы послѣднее неравенство обратилось въ равенство

$$\frac{ES}{BS}=\frac{A_1S}{B_1S}.$$

Раздѣлимъ теперь отрѣзокъ BS на такія равныя части, которыя были бы меньше отрѣзка EA. Мы дѣлаемъ это для того, чтобы, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ дѣленія пришлась внутри отрѣзки EA, положимъ въ точкѣ F. Изъ точки F проводимъ прямую FF_1, параллельную даннымъ прямымъ AA_1 и BB_1.

Ясно, что отрѣзки FS и BS соизмѣримы; поэтому, на основаніи доказаннаго, имѣемъ

$$\frac{FS}{BS} = \frac{F_1S}{B_1S}.$$

Раздѣлимъ предыдущее равенство на послѣднее. Получаемъ послѣ сокращенія

$$\frac{ES}{FS} = \frac{A_1S}{F_1S}.$$

Но легко видѣть, что послѣднее равенство невозможно, такъ какъ первое отношеніе меньше единицы, а второе больше единицы. Мы пришли къ абсурду. Отсюда и заключаемъ, что сдѣланное выше предположеніе (2) невозможно. Такимъ же образомъ придемъ къ абсурду, предположивъ, что первое отношеніе пропорціи (1) меньше второго. Слѣдовательно, единственное предположеніе, которое допустимо, заключается въ равенствѣ отношеній

$$\frac{AS}{BS} = \frac{A_1S}{B_1S}.$$

Доказанное предложеніе даетъ возможность замѣнять отношеніе двухъ отрѣзковъ отношеніемъ двухъ другихъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два отрѣзка AS и BS (черт. 21), которые отложимъ на прямой SM; проводимъ какъ угодно вторую прямую SN и черезъ точки A и B проведемъ *произвольно* двѣ параллельныхъ прямыхъ. По доказанному, онѣ отсѣкаютъ на прямой SN отрѣзки, пропорціональные даннымъ отрѣзкамъ.

Благодаря произвольности построенія параллельныхъ сѣкущихъ, мы можемъ получить сколько угодно отрѣзковъ, пропорціональныхъ даннымъ. Эта произвольность позволяетъ задать опредѣленнымъ образомъ третій отрѣзокъ, напримѣръ, A_1S. Тогда, проведя прямую BB_1 параллельно прямой AA_1, мы получимъ вполнѣ опредѣленный отрѣзокъ B_1S, который называется *четвертымъ пропорціональнымъ* отрѣзкомъ къ тремъ даннымъ отрѣзкамъ AS, BS и A_1S.

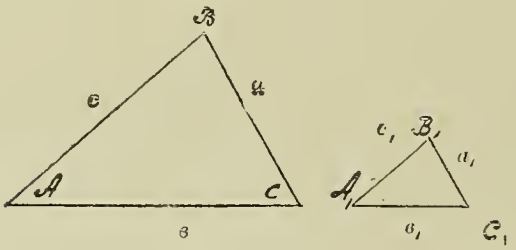
Ученіе объ измѣреніи и пропорціональности отрѣзковъ позволяетъ установить весьма важныя свойства между размѣрами различныхъ частей геометрическихъ фигуръ.

7. Подобіе треугольниковъ.

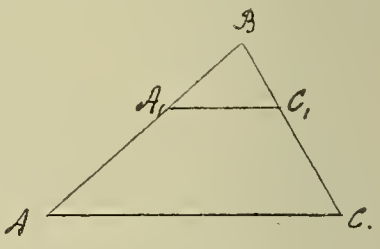
Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 22) *называются подобными, если углы одного треугольника соотвѣтственно равны угламъ другого.* Стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ, называются *сходственными.*

Теорема 10. *Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя стороны пропорціональны.*

Будемъ обозначать углы $\triangle$ — ковъ буквами, поставленными въ ихъ вершинахъ, а противолежащія стороны соотвѣтственными малыми буквами.



Черт. 22.



Черт. 23.

Наложимъ $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ (черт. 23) угломъ B_1 на B. Такъ какъ $\angle A = A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то по теоремѣ 8-ой (стр. 70), прямая $AC \parallel A_1C_1$.

Поэтому, на основаніи теоремы 9-ой (стр. 78), заключаемъ о пропорціональности слѣдующихъ отрѣзковъ

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Если бы мы наложили $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ угломъ C_1 на C, то получили бы

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Соединяя эти двѣ пропорціи, получаемъ искомый результатъ

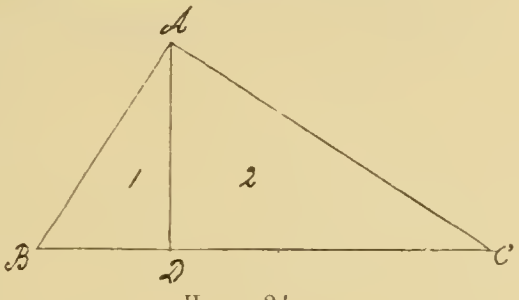
$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Свойствами подобныхъ треугольниковъ часто пользуются при измѣреніи разстояній на землѣ. Если требуется, напримѣръ, опредѣлить величину разстоянія между двумя предметами, измѣрить которое невозможно, вслѣдствіе какихъ-либо препятствій, то легко обойти это затрудненіе, построивъ на землѣ два подобныхъ треугольника. При помощи разсмотрѣнія подобныхъ треугольниковъ возможно также измѣрять высоту недоступныхъ предме-

товъ. Читатель найдетъ необходимыя для этого подробныя указанія въ главѣ XVII руководства *А. Павлова — Элементарная Геометрія съ практическими примѣненіями для городскихъ училищъ. 3 изданіе 1905 г., стр. 186.*

Теорема 11. *Высота, опущенная изъ вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольнаго* $\triangle$*—ка (черт. 24), представляетъ среднюю пропорціональную между двумя отрѣзками, на которые разбивается высотой гипотенуза. Каждый изъ катетовъ представляетъ среднюю пропорціональную между всей гипотенузой и прилежащимъ ея отрѣзкомъ отъ вершины острого угла до высоты.*

1) *Разсмотримъ* $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ (чертежъ 24). $\angle BAD$ служитъ дополненіемъ $\angle DAC$ до прямого угла, но $\angle C$ тоже дополняетъ послѣдній до прямого угла. Слѣдовательно, $\angle BAD = \angle ACD$.



Черт. 24.

Такимъ же образомъ очевидно, что $\angle ABD = \angle DAC$. Слѣдовательно, $\triangle ABD \sim$ [1]) $\triangle ADC$.

Вслѣдствіе пропорціональности сходственныхъ сторонъ, на основаніи предыдущей теоремы 10-ой, мы получаемъ слѣдующій изъ искомыхъ результатовъ

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}, \text{ или } AD^2 = BD \,.\, DC,$$

гдѣ отрѣзокъ AD называется *среднимъ пропорціональнымъ* между отрѣзками BD и DC.

2) *Разсмотримъ* $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$. Они имѣютъ общій уголъ B, а $\angle BAD = \angle ACD$. Слѣдовательно, $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, и мы получаемъ второй искомый результатъ

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}, \text{ или } AB^2 = BC.\ BD.$$

Если возьмемъ $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, то изъ подобія ихъ приходимъ къ равенствамъ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}, \text{ или } AC^2 = BC.\ DC.$$

Теорема 12 *(Пифагора). Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма квадратовъ катетовъ равняется квадрату гипотенузы.*

Мы получили въ предыдущей теоремѣ зависимости (черт. 24)

$$AB^2 = BC.\ BD,$$
$$AC^2 = BC.\ DC.$$

[1]) Знакъ $\sim$ обозначаетъ подобіе.

Сложивъ эти равенства, найдемъ

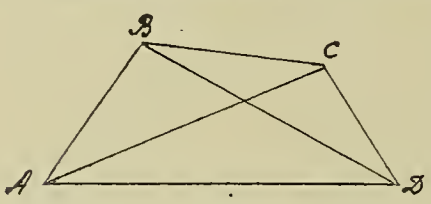
$$AB^2 + AC^2 = BC\ (BD + DC).$$

Выраженіе въ скобкахъ равно длинѣ гипотенузы BC. Поэтому получаемъ искомый результатъ

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

8. Многоугольники.

Четыреугольникъ. Четыре прямыхъ, пересѣкаясь, образуютъ *четыреугольникъ*. Точки ихъ пересѣченія называются *вершинами* четыреугольника A, B, C, D (черт. 25), а отрѣзки AB, BC, CD, DA—*сторонами* четыреугольника.



Черт. 25.

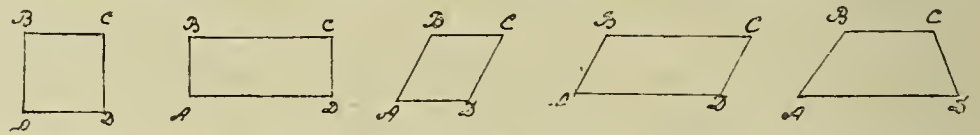
Прямая, соединяющая двѣ противоположныхъ вершины четыреугольника, называется его *діагональю*. Въ четыреугольникѣ можно провести двѣ діагонали AC и BD.

Сумма сторонъ четыреугольника,

$$AB + BC + CD + DA,$$

называется его *периметромъ*.

Различные четыреугольники представлены на чертежѣ 26-омъ.



1) *Квадратъ*. Четыреугольникъ, всѣ стороны котораго равны между собою и всѣ углы прямые.

2) *Прямоугольникъ*. Четыреугольникъ, у котораго противоположныя стороны параллельны и равны и всѣ углы прямые.

3) *Ромбъ*. Четыреугольникъ, у котораго всѣ стороны равны между собой.

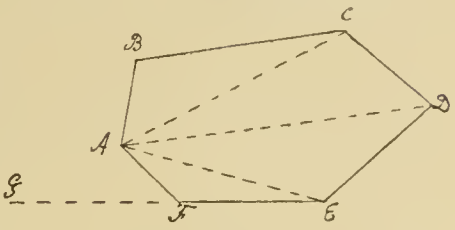
4) *Параллелограммъ*. Четыреугольникъ, у котораго противоположныя стороны параллельны и равны между собой.

5) *Трапеція*. Четыреугольникъ, у котораго одна пара противоположныхъ сторонъ параллельна.

Черт. 26.

Многоугольникъ. Если фигура образована многими пересѣкающимися прямыми, то она называется *многоугольникомъ*. Точки пересѣченія прямыхъ (черт. 27) называются *вершинами* многоугольника A, B, C...., а отрѣзки AB, BC, CD....—*сторонами* многоугольника.

Прямыя, соединяющія какую-либо вершину, напримѣръ A, со всѣми остальными вершинами, съ ней не сосѣдними C, D, E, называются *діагоналями* многоугольника. Уголъ, составленный *двумя сторонами* многоугольника, называется *внутреннимъ* угломъ многоугольника; а уголъ, составленный *одной стороной и продолженіемъ другой стороны* — внѣшнимъ угломъ многоугольника ($\angle ABC$ — внутренній, $\angle GFA$ — внѣшній).



Черт. 27.

Сумма всѣхъ сторонъ многоугольника,

$$AB + BC + CD + \ldots + FA,$$

называется его *периметромъ*.

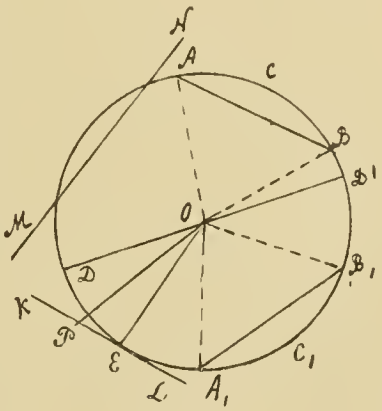
9. Окружность. Измѣреніе угловъ.

Окружностью называется линія, обладающая свойствомъ, что *всѣ ея точки находятся на одинаковомъ разстояніи отъ одной постоянной точки* O, называемой центромъ окружности (черт. 28).

Разстояніе отъ любой точки окружности A, B, C, D, ... до центра O называется *радіусомъ* окружности. Прямая AB, соединяющая двѣ точки на окружности и не проходящая черезъ центръ, называется *хордой*. Если хорда DD_1 проходитъ черезъ центръ, то она называется *діаметромъ* и равняется по своей длинѣ удвоенному радіусу.

Прямая MN, пересѣкающая окружность, имѣетъ съ ней двѣ общихъ точки и называется *сѣкущей*. Если прямая EK имѣетъ съ окружной только одну общую точку E, то такая прямая называется *касательной* къ окружности въ точкѣ E.

Для черченія окружности употребляется особый инструментъ, называемый *циркулемъ*, который состоитъ изъ двухъ ножекъ, раздвигающихся вокругъ соединяющаго ихъ шарнира на большій или меньшій уголъ. Одна ножка, заканчивающаяся остріемъ, опирается на бумагу въ центрѣ окружности O, вторая же ножка, снабженная чертящимъ карандашемъ или перомъ, описываетъ окружность.



Черт. 28.

Фигура $ACBOA$ (черт. 28), ограниченная дугою ACB и радіусами OA и OB, соединяющими концы дуги съ центромъ, называется *сектóромъ*.

Два сектора называются равными, если они совмѣщаются при наложеніи.

Уголъ AOB, вершина котораго находится въ центрѣ, а сторонами служатъ радіусы, называется *центральнымъ*.

Теорема 13. *Прямая KL, проходящая черезъ конецъ радіуса OE и перпендикулярная къ нему, представляетъ касательную къ окружности.*

Въ самомъ дѣлѣ, прямая OE перпендикулярна къ прямой KL. Поэтому всякая прямая OP, какъ наклонная длиннѣе перпендикуляра OE (на основаніи теоремы 4-ой, стр. 67). Слѣдовательно, всякая точка P прямой KL лежитъ внѣ нашей окружности и прямая KL имѣетъ всего одну точку E общую съ окружностью. Поэтому прямая KL представляетъ касательную.

Обратно, если изъ центра окружности провести радіусъ OE въ точку касанія E окружности съ касательной KL, то радіусъ OE перпендикуляренъ къ послѣдней. Это слѣдуетъ изъ того, что всякая другая прямая OP будетъ длиннѣе радіуса OE, т.-е. послѣдній, представляя кратчайшее разстояніе точки O отъ касательной KL, будетъ къ ней перпендикуляренъ.

Теорема 14. *Если двѣ дуги равны, то стягивающія ихъ хорды равны, и опирающіеся на эти дуги центральные углы также равны.*

Пусть дуги ACB и $A_1C_1B_1$ равны (черт. 28). Проводимъ радіусы OA, OB, OA_1, OB_1. Накладываемъ секторъ $OA_1C_1B_1$ на секторъ $OACB$ такъ, чтобы радіусъ OA_1 совмѣстился съ радіусомъ OA; дуга $A_1C_1B_1$ совмѣстится тогда съ дугой ACB, такъ какъ всѣ точки обѣихъ дугъ должны находиться на равномъ разстояніи отъ центра O. Вслѣдствіе равенства обѣихъ дугъ концы ихъ B_1 и B также совмѣстятся. Поэтому хорда A_1B_1 совмѣстится съ хордой AB и, стало-быть, будетъ ей равна.

Само собою разумѣется, что радіусъ OB_1 совмѣщается съ радіусомъ OB. Стало-быть, центральные углы $\angle A_1OB_1$ и $\angle AOB$, совмѣщаясь, оказываются равными.

Фигура $ACBA$ (черт. 28), ограниченная дугой окружности ACB и хордой AB, называется *сегментомъ*.

Теорема 15. *Равныя хорды стягиваютъ равныя дуги.* Пусть хорда AB равна хордѣ A_1B_1 (черт. 28). Наложимъ сегментъ $A_1C_1B_1$ на сегментъ ACB такъ, чтобы стягивающія ихъ равныя хорды совпадали. Ясно, дуга $A_1C_1B_1$ совмѣстится съ дугой ACB, потому что всѣ точки обѣихъ дугъ находятся на равномъ разстояніи отъ центра O.

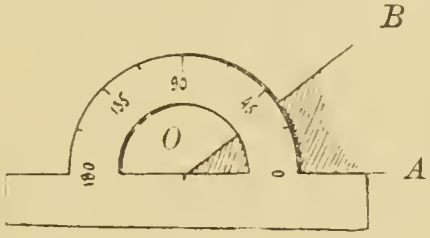
Теорема 16. *Равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги.* Пусть $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ (черт. 28). Проводимъ хорды AB и A_1B_1. $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$, такъ какъ углы при O

равны и заключены между равными сторонами, представляющими радіусы круга. Изъ равенства $\angle$—ковъ вытекаетъ равенство хордъ $AB = A_1B_1$. Слѣдовательно, по предыдущей теоремѣ дуга ACB равна дугѣ $A_1C_1B_1$.

Теорема 17. *Два центральныхъ угла относятся другъ къ другу какъ дуги, на которыя они опираются.*

Подобно тому, какъ при измѣреніи отрѣзковъ (см. стр. 76—77) мы принимаемъ за единицу измѣренія опредѣленный отрѣзокъ, такъ при измѣреніи угловъ мы принимаемъ за единицу измѣренія опредѣленный уголъ. Если можно найти такой уголъ, который укладывается цѣлое число разъ въ обоихъ данныхъ центральныхъ углахъ, то данные углы называются *соизмѣримыми*, въ противномъ случаѣ *несоизмѣримыми*.

Въ обоихъ этихъ случаяхъ доказательство теоремы 17-ой совершенно подобно доказательству теоремы 9-ой, и мы заключаемъ, что *дуги пропорціональны центральнымъ угламъ, которые ими стягиваются*. На этомъ свойствѣ основанъ слѣдующій способъ *измѣренія угловъ*: *Всю окружность дѣлятъ на 360 равныхъ частей, которыя называются градусами (°), каждый градусъ—на 60 частей—минутъ (′), каждую минуту—еще на 60 частей—секундъ (″)*. Мы условливаемся говорить, что *центральный уголъ имѣетъ столько градусовъ, минутъ и секундъ, сколько заключаетъ ихъ дуга, на которую опирается измѣряемый уголъ*. Напримѣръ, прямой уголъ $d = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Инструментъ, служащій для измѣренія угловъ — полуокружность, раздѣленная на 180° — называется *транспортиромъ* (черт. 29). Къ измѣряемому углу прикладывается транспортиръ такъ, какъ показано на чертежѣ, и отсчитывается число дѣленій, отмѣчаемое стороной угла OB. Величина $\angle AOB$ на чертежѣ приблизительно равна 37°30′. Очевидно, будетъ ли кругъ большой или малый, *число* градусовъ, которымъ опредѣляется величина угла, будетъ одно и то же, какимъ бы транспортиромъ мы его ни измѣряли.



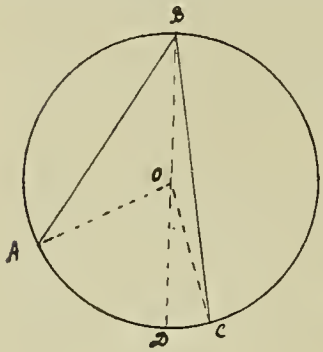
Черт. 29.

Переходимъ теперь къ измѣренію такъ называемыхъ *вписанныхъ* угловъ, вершина которыхъ лежитъ на окружности, а стороны опираются въ двухъ точкахъ той же окружности.

Теорема 18. *Вписанный уголъ измѣряется половиной дуги, на которую онъ опирается* (т.-е. уголъ имѣетъ вдвое меньше градусовъ, чѣмъ дуга на которую онъ опирается).

Соединимъ точки A,B и C (черт. 30) вписаннаго угла ABC съ центромъ O и прямую OB продолжаемъ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ D. Такъ такъ $\triangle AOB$ равнобедренный, то $\angle ABD = \angle BAO$. Такъ какъ $\angle AOD$ — внѣшній для $\triangle$-ка AOB то поэтому $\angle AOD = 2\ \angle ABD$. Такимъ же образомъ изъ равнобедреннаго $\triangle COB$ легко видѣть, что $\angle DOC = 2\ \angle DBC$. Сложивъ оба равенства, находимъ что $\angle AOC = 2\ \angle ABC$. Поэтому

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\ \angle AOC.$$



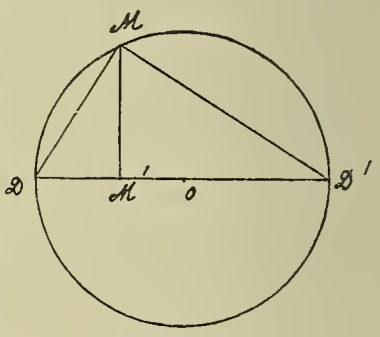
Черт. 30.

Но $\angle AOC$ измѣряется дугою AC; слѣдовательно, $\angle ABC$ измѣряется половиной дуги AC.

Предоставляемъ читателю разобрать самому случай, когда обѣ стороны вписаннаго угла находятся по одну сторону отъ центра O.

Теорема 19. *Перпендикуляръ, опущенный изъ какой-либо точки окружности на діаметръ (черт. 31), представляетъ среднюю пропорціональную между отрѣзками діаметра; каждая хорда, соединяющая данную точку окружности съ концомъ діаметра, представляетъ среднюю пропорціональную между всѣмъ діаметромъ и прилежащимъ къ этой хордѣ отрѣзкомъ отъ конца діаметра до основанія перпендикуляра.*

Такъ какъ $\angle DMD'$ (черт. 31) вписанный и опирается на полуокружность, то онъ, стало-быть, равенъ 90°, т.-е. представляетъ прямой уголъ и $\triangle DMD'$ прямоугольный. Поэтому теорема 11-я (стр. 81) даетъ искомыя зависимости



Черт. 31.

$$MM'^2 = DM' \cdot M'D'; \quad MD^2 = DD' \cdot DM'; \quad MD'^2 = DD' \cdot M'D'.$$

10. Правильные многоугольники.

Возьмемъ окружность съ центромъ O (черт. 32) и раздѣлимъ ее на равное число частей, предположимъ 6. Точки дѣленія A,B,C,D,E,F соединимъ хордами. Полученный многоугольникъ представляетъ *шестиугольникъ, вписанный въ окружность* и называется *правильнымъ*.

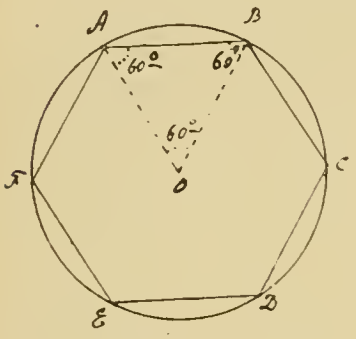
Очевидно, что въ правильномъ вписаннонъ многоугольникѣ всѣ *стороны и углы соотвѣтственно равны между собой.*

Равенство сторонъ слѣдуетъ изъ того, что стороны представляютъ хорды, стягивающія равныя дуги.

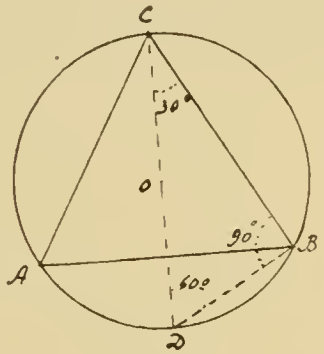
Равенство угловъ вытекаетъ изъ того, что всѣ углы вписанны въ окружность и измѣряются равными дугами.

Проведя радіусы AO и BO, которые назовемъ черезъ R, получаемъ равнобедренный $\triangle$—къ ABO (см. стр. 64) съ основаніемъ AB, въ которомъ $\angle A = \angle B$ (см. слѣдствіе 1-ое, на стр. 66). Такъ какъ центральный $\angle O$ опирается на дугу, представляющую 6-ую часть окружности (въ случаѣ если имѣемъ дѣло съ правильнымъ вписаннымъ шестиугольникомъ), т.-е. равенъ 60°, то

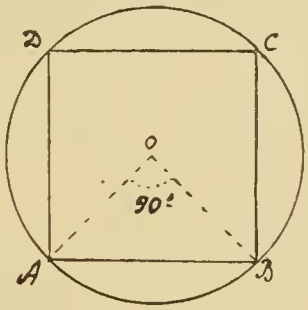
$$\angle A + \angle B = 2d - 60° = 180° - 60° = 120°.$$



Черт. 32.



Черт. 33.



Черт. 34.

Поэтому $\angle A = \angle B = 60°$, т.-е. $\triangle ABO$ правильный (см. стр. 64 и слѣдствіе 4-ое, на стр. 67). Поэтому всѣ стороны его равны и

$$AB = AO = R,$$

т.-е. *сторона правильнаго вписаннаго шестиугольника равна радіусу окружности.*

Раздѣлимъ окружность на три равныхъ части (черт. 33) и впишемъ въ нее правильный $\triangle ABC$. Проводимъ діаметръ CD и соединимъ точки D и B. $\triangle CBD$ прямоугольный съ прямымъ $\angle B$, такъ какъ $\angle B$ — вписанный, опирающійся на полуокружность. $\angle D = 60°$, какъ вписанный уголъ, опирающійся на дугу CB, равную $\frac{1}{3}$ окружности. Поэтому $\angle C = 30°$, какъ дополнительный до d къ $\angle D$. Слѣдовательно, дуга DB въ два раза больше, т.-е. равна 60°, и хорда BD представляетъ сторону правильнаго вписаннаго шестиугольника, равную радіусу R.

По теоремѣ Пифагора (теор. 12-ая, стр. 81), изъ прямоугольнаго $\triangle DBC$, получимъ

$$BC^2 = CD^2 - BD^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2,$$
$$BC = R\sqrt{3},$$

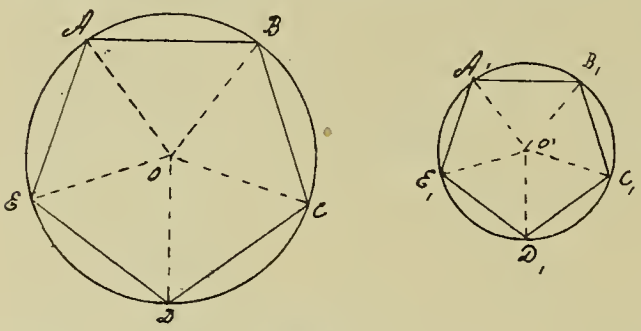
т-е. *сторона правильнаго вписаннаго треугольника равна радіусу окружности, умноженному на* $\sqrt{3}$.

Впишемъ, наконецъ, въ окружность квадратъ (черт. 34). $\angle ABO$ прямоугольный, такъ какъ $\angle O$ центральный, опирающійся на четверть окружности. По теоремѣ Пифагора (теор. 12-ая, стр. 81) получаемъ

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$
$$AB = R\sqrt{2},$$

т.-е. *сторона вписаннаго квадрата равна радіусу окружности, умноженному на* $\sqrt{2}$.

Теорема 20. *Периметры двухъ одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ относятся какъ радіусы описанныхъ около нихъ круговъ. Одноименными* называются многоугольники съ одинаковымъ числомъ сторонъ, но вписанные въ окружности различныхъ радіусовъ. *Периметромъ* называется сумма сторонъ многоугольника.



Черт. 35.

Треугольники AOB, BOC... и $A_1O'B_1, B_1O'C_1$... (черт. 35) соотвѣтственно *подобны между собою* (стр. 80), такъ какъ они равнобедренные и углы при вершинахъ O и O' равны. Поэтому получаемъ

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{O'B_1}, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{R}{R'}, \quad \text{или} \quad \frac{n.AB}{n.A_1B_1} = \frac{R}{R'},$$

гдѣ R и R' обозначаютъ соотвѣтственно радіусы окружностей центровъ O и O', а n обознаетъ число сторонъ каждаго многоугольника. Обозначая $n.AB=P$, $n.A_1B_1=P'$ и замѣчая, что P и P' суть ничто иное какъ периметры обоихъ многоугольниковъ, получаемъ

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

11. Вычисленіе площадей.

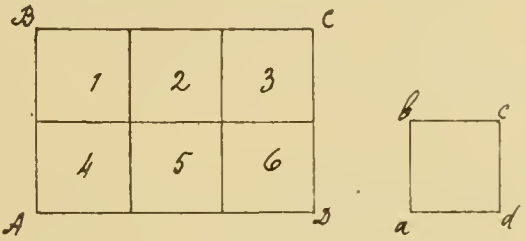
Вычислить площадь какой-нибудь фигуры — значитъ опредѣлить, во сколько разъ пространство, занимаемое фигурой, больше пространства той фигуры, площадь которой считается единицей. *За такую фигуру принимается квадратъ, сторона котораго равна единицѣ.* Если въ данной площади, напримѣръ въ

прямоугольникѣ $ABCD$ (черт. 36), площадь квадрата $abcd$, принятаго за единицу, укладывается 6 разъ, то говорятъ, что площадь $ABCD$ имѣетъ 6 квадратныхъ единицъ, такъ какъ площадь $ABCD$ въ 6 разъ больше площади квадрата $abcd$.

Такъ какъ опредѣлить во сколько разъ одно количество больше другого—значитъ узнать ихъ *отношеніе*, то можно сказать, что *измѣрить площадь — значитъ опредѣлить отношеніе этой площади къ площади квадрата, принятаго за единицу.*

Двѣ фигуры имѣющія одинаковую площадь, называются *равновеликими*.

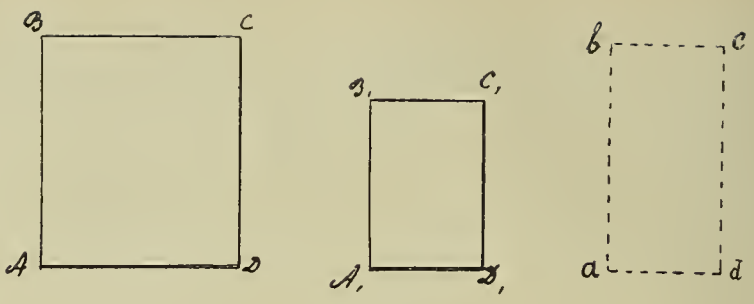
Разсмотримъ сперва, какъ опредѣлить площадь самой простой фигуры — прямоугольника. Очевидно, что два прямоугольника, имѣющіе *равныя высоты и равныя основанія*, при наложеніи другъ на друга совмѣщаются, а потому *площади ихъ равновелики*. Если же прямоугольники таковы, что имѣютъ *одинаковыя основанія, но разныя высоты*, то тотъ прямоугольникъ будетъ больше, у котораго высота больше, и во столько разъ, во сколько его высота больше высоты другого прямоугольника. Наоборотъ, если у двухъ прямоугольниковъ *одинаковы высоты, но различны основанія*, то тотъ прямоугольникъ больше,у котораго основаніе больше, и во столько разъ, во сколько его основаніе больше основанія другого прямоугольника. Другими словами, *площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся какъ ихъ основанія; площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.*



Черт. 36.

Въ справедливости этого убѣждаемся, раздѣливъ сравниваемые прямоугольники на болѣе мелкіе прямоугольники, равные между собою, и примѣнивъ разсужденія, которыя мы употребляли при доказательствѣ какъ теоремы 9-ой (стр. 78), такъ и теоремы 17-ой (стр. 85). Доказываемое предложеніе остается справедливымъ какъ въ случаѣ соизмѣримости, такъ и несоизмѣримости высотъ и основаній разсматриваемыхъ прямоугольниковъ. Послѣ этого нетрудно доказать, что *площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ разныя высоты и основанія, относятся какъ произведенія ихъ высоты на основаніе.*

Дѣйствительно, пусть имѣемъ два прямоугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (черт. 37). Вообразимъ *вспомогательный* прямоуголь-



Черт. 37.

никъ $abcd$, у котораго высота ab равна AB, а основаніе $ad = A_1D_1$. Тогда, на основаніи указанныхъ выше предложеній, мы получаемъ

$$\frac{пл.\ (ABCD)}{пл.\ (abcd)} = \frac{AD}{ad}; \quad \frac{пл.\ (A_1B_1C_1D_1)}{пл.\ (abcd)} = \frac{A_1B_1}{ab}.$$

Отсюда получаемъ равенства

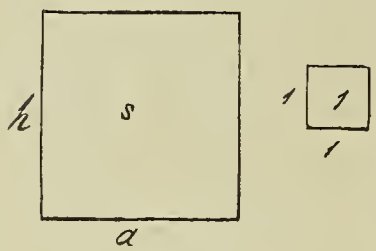
$$пл.\ (ABCD) = пл.\ (abcd).\ \frac{AD}{ad}; \quad пл.\ (A_1B_1C_1D_1) = пл.\ (abcd).\ \frac{A_1B_1}{ab}.$$

Поэтому

$$\frac{пл.\ (ABCD)}{пл.\ (A_1B_1C_1D_1)} = \frac{пл.\ (abcd)\ \frac{AD}{ad}}{пл.\ (abcd)\ \frac{A_1B_1}{ab}} = \frac{AD\,.\,ab}{A_1B_1\,.\,ad} = \frac{AB\,.\,AD}{A_1B_1\,.\,A_1D_1},$$

что и требовалось доказать.

Площадь прямоугольника. Для вычисленія площади прямоугольника, имѣющаго основаніе a (черт. 38) и высоту h, согласно съ предыдущимъ, найдемъ отношеніе этой площади S къ площади квадрата, принятаго за единицу, стороны котораго равны единицѣ. Согласно только-что сказанному, объ отношеніи площадей двухъ прямоугольниковъ, получаемъ, что



Черт. 38.

$$\frac{S}{1} = \frac{a\,.\,h}{1.1.}, \qquad \text{или} \qquad S = a\,.\,h,$$

т.-е. *площадь прямоугольника = произведенію его основанія на высоту* [1]).

Площадь параллелограма. Возстановивъ изъ A и D (черт. 39) перпендикуляры AA' и DD', легко замѣтимъ, что

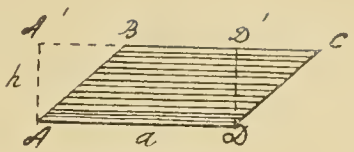
пл. $(ABCD)$ — пл. $(DD'C)$ + пл. $(AA'B)$ = пл. $(AA'DD') = ah$.

---

[1]) Напоминаемъ, что и основаніе и высота должны быть (какъ всегда въ геометріи) выражены въ *однихъ и тѣхъ же мѣрахъ*:

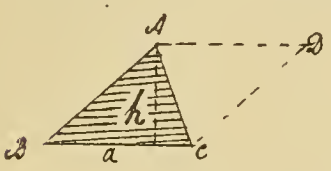
Напримѣръ, если $a = 2$ саж., $h = 9$ арш., то S *не равняется* $2 \times 9 = 18$, но $S = 2$ саж. $\times$ 3 саж. $= 6$ кв. саж., или $S = 6$ арш. $\times$ 9 арш. $= 54$ кв. арш. Сказанное относится и ко всему послѣдующему.

Но легко доказать, что $\triangle AA'B = \triangle DD'C$; поэтому площ. $(DD'C)$ = площ. $(AA'B)$. Слѣдовательно, называя площ. $(ABCD) = S$, найдемъ, что $S = ah$, т.-е. *площадь параллелограма равна произведенію его основанія на высоту*..



Черт. 39.

Площадь треугольника. Легко доказать, что, проведя $AD \parallel BC$ и $CD \parallel BA$ (черт. 40), т.-е. построивъ параллелограмъ $ABCD$, мы къ $\triangle ABC$ пристраиваемъ равновеликій ему треугольникъ ADC. Такъ какъ площадь параллелограма $= ah$, то для искомой площади S нашего треугольника находимъ

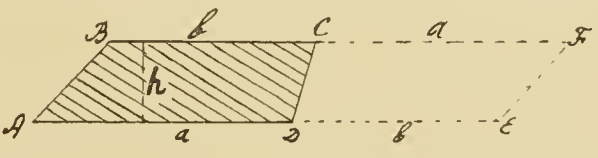


Черт. 40.

$$S = \frac{1}{2}\, ah,$$

т.-е. *площадь треугольника равна половинѣ произведенія его основанія на высоту.*

Площадь трапеціи. Легко видѣть, что, перевернувъ трапецію $ABCD$ и приложивъ ее такъ, какъ показано на чертежѣ 41-омъ, получимъ параллелограмъ, имѣющій ту же высоту h, что и трапеція, и основаніе $= a + b$, при чемъ a представляетъ нижнее, а b — верхнее основаніе трапеціи. Называя площадь трапеціи черезъ получаемъ

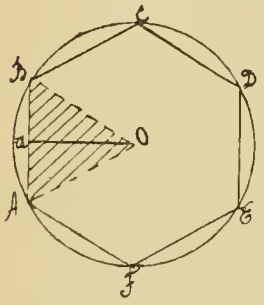


Черт. 41.

$$2\,S = (a+b)\,h, \quad \text{или} \quad S = \frac{a+b}{2}\cdot h,$$

т.-е. *площадь трапеціи = произведенію полусуммы параллельныхъ ея сторонъ на высоту.*

Площадь правильнаго многоугольника. Если изъ центра правильнаго многоугольника проведемъ линіи OA, OB,... (черт. 42), то многоугольникъ $ABCD$... раздѣлится на n равныхъ между собою треугольниковъ (на нашемъ чертежѣ $n = 6$).



Черт. 42.

Площадь одного изъ полученныхъ треугольниковъ, напримѣръ, $\triangle AOB$, равняется $\frac{1}{2}\, AB \,.\, Oa$. Слѣдовательно, площадь всего

многоугольника, которую назовемъ черезъ S, будетъ равна $\frac{1}{2}\ AB\ .\ Oa\ .\ n$. Но $AB\ .\ n$ есть *периметръ* P нашего многоугольника; Oa называютъ его *апоѳемой* a; поэтому

$$S = \frac{1}{2} P\ .\ a,$$

т.-е. *площадь правильнаго многоугольника = половинѣ произведенія его периметра на апоѳему.*

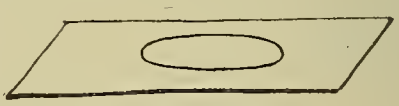
II. ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

12. Прямыя и плоскости.

Геометрическіе предметы *въ пространствѣ* не могутъ быть цѣликомъ умѣщены на плоскости; а потому, изображая ихъ чертежомъ на бумагѣ или на доскѣ, мы не можемъ изображать ихъ такими, какъ они есть на самомъ дѣлѣ, а только такими, какими они кажутся нашему глазу (и то съ нѣкоторыми ограниченіями).

Смотря на такой чертежъ, мы, приблизительно, получаемъ то же впечатлѣніе, какъ если бы смотрѣли на изображаемый предметъ въ природѣ; поэтому части такого чертежа не будутъ вполнѣ такими, какими являются на самомъ дѣлѣ части изображаемаго предмета: нѣкоторыя равныя линіи могутъ казаться не равными по своей длинѣ, прямые углы — то тупыми, то острыми и т. д.

Черт. 43.



Черт. 44.

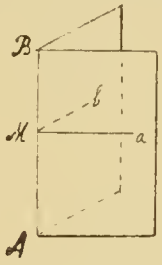
Напримѣръ, коробка (черт. 43), составленная изъ шести прямоугольниковъ, представляется такъ, что нѣкоторыя стороны ея покажутся не прямоугольниками, а параллелограмами.

Поэтому чертежи, служащіе для изображенія пространственныхъ геометрическихъ предметовъ, надо понимать *условно*. Такъ, плоскость, не совпадающая съ плоскостью чертежа, изображается обыкновенно параллелограмомъ (черт. 44), а кругъ, расположенный въ этой плоскости, изобразится въ видѣ фигуры—овала.

Этими замѣчаніями мы будемъ пользоваться при изображеніи на чертежѣ плоскостей и геометрическихъ тѣлъ.

Начнемъ съ разсмотрѣнія плоскостей и прямыхъ линій въ пространствѣ.

Двѣ плоскости пересѣкаются по прямой линіи. Въ этомъ можно было бы наглядно убѣдиться, напримѣръ, перегибая листъ писчей бумаги (черт. 45). Но это можно доказать слѣдующими соображеніями. Мы принимаемъ какъ очевидное, что двѣ плоскости не могутъ пересѣкаться въ одной только точкѣ. Если же обѣ плоскости имѣютъ двѣ общихъ точки, то обѣ онѣ, согласно сказанному на страницѣ 60-ой, заключаютъ въ себѣ ту прямую, которая проходитъ черезъ эти точки. Прямая это будетъ линіей пересѣченія данныхъ плоскостей. Если бы обѣ плоскости имѣли еще одну общую точку, не лежащую на общей имъ прямой, то эти плоскости, какъ не трудно убѣдиться, слились бы въ одну, откуда заключаемъ, что двѣ плоскости дѣйствительно пересѣкаются по прямой.



Черт. 45.

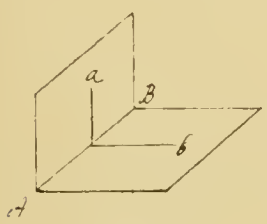
Черт. 46.

Если плоскости не пересѣкаются, то онѣ называются *параллельными* (напримѣръ, полъ и потолокъ комнаты) (черт. 46).

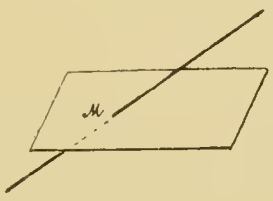
Уголъ между плоскостями опредѣляется такъ. На линіи ихъ пересѣченія AB (черт. 45) берутъ любую точку M и проводятъ двѣ прямыхъ, Ma въ 1-ой плоскости и Mb во 2-ой плоскости такъ, чтобы $Ma \perp AB$ и $Mb \perp AB$. Уголъ aMb служитъ мѣрой, какъ говорятъ, *двуграннаго угла* между нашими плоскостями. Онъ называется *линейнымъ угломъ* двуграннаго угла.

Если линейный уголъ равенъ 90°, то говорятъ, что плоскости *перпендикулярны* (напримѣръ, полъ и стѣна комнаты) (черт. 47).

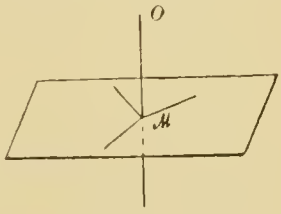
Всякая прямая пересѣкается съ плоскостью только въ одной точкѣ (черт. 48). Это ясно изъ того, что если бы прямая имѣла еще одну общую точку съ плоскостью, что она сливалась бы съ



Черт. 47.



Черт. 48.



Черт. 49.

нею всѣми своими точками. Точка пересѣченія прямой съ плоскостью M называется *слѣдомъ* прямой на плоскости.

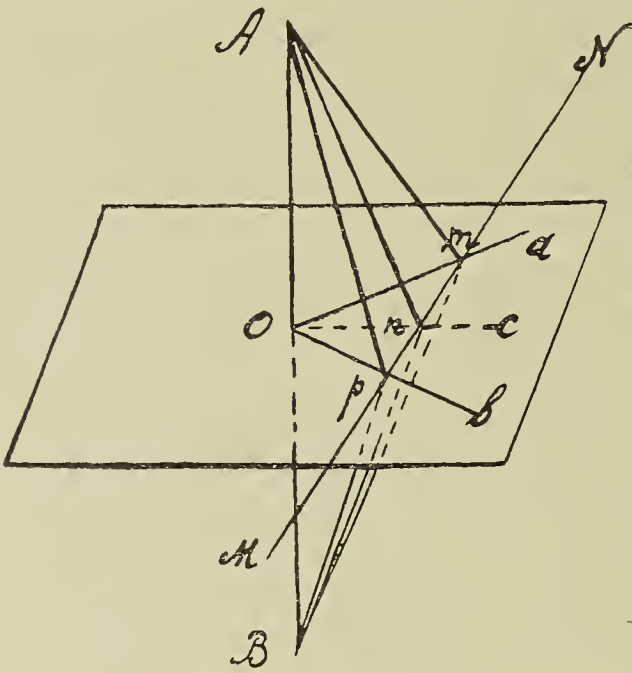
Если ко всѣмъ прямымъ, проходящимъ черезъ слѣдъ M (черт. 49) и лежащимъ въ плоскости, наша прямая OM перпендикулярна, то говорятъ, что она *перпендикулярна къ плоскости*.

Разстояніе точки O до плоскости измѣряется длиною перпендикуляра OM (черт. 49), опущеннаго изъ точки O на эту плоскость

Теорема 21. *Если прямая перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проходящимъ черезъ ея слѣдъ на плоскости и лежащимъ въ данной плоскости, то она перпендикулярна къ плоскости.*

Дѣйствительно, продолжимъ нашу прямую AO (черт. 50) по другую сторону плоскости и возьмемъ на прямой точки A и B такъ, чтобы $AO = BO$.

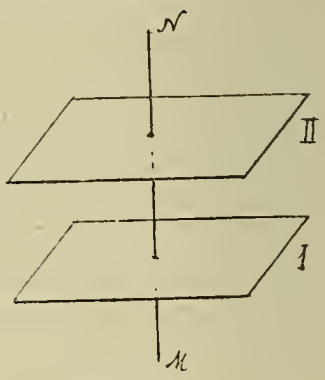
Пусть $AO \perp Oa$ и $Ao \perp Ob$. Нужно доказать, что $AO \perp$ къ *любой* прямой Oc, лежащей въ нашей плоскости. Проведемъ въ этой плоскости прямую MN, пересѣкающую прямыя Oa, Oc и Ob соотвѣтственно въ точкахъ m, n и p, и соединимъ эти точки съ A и B. Получающіеся $\triangle$—*ки* AOp и BOp равны, какъ имѣющіе соотвѣтственно равные катеты. Поэтому получаемъ, что $Ap = Bp$.



Черт. 50.

Изъ равенства $\triangle$-ковъ AOm и BOm заключаемъ, что $Am = Bm$.

Поэтому $\triangle Amp = \triangle Bmp$, такъ какъ стороны ихъ соотвѣтственно равны. Слѣдовательно, $\angle Apm \angle Bpm$. =



Черт. 51.

Далѣе, $\triangle Apn = \triangle Bpn$, такъ какъ они имѣютъ по двѣ соотвѣтственно равныхъ стороны, заключающихъ соотвѣтственно равные углы Apn и Bpn. Изъ равенства этихъ $\triangle$—ковъ слѣдуетъ, что $An = Bn$.

Теперь мы можемъ заключить, что $\triangle AOn = \triangle BOn$; слѣдовательно, $\angle AOn = \angle BOn$.

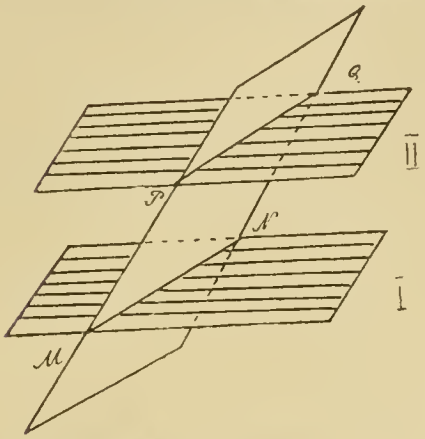
Но такъ какъ $\angle AOn + \angle BOn = 2d$, то $\angle AOn = \angle AOc = d$, что и требовалось доказать.

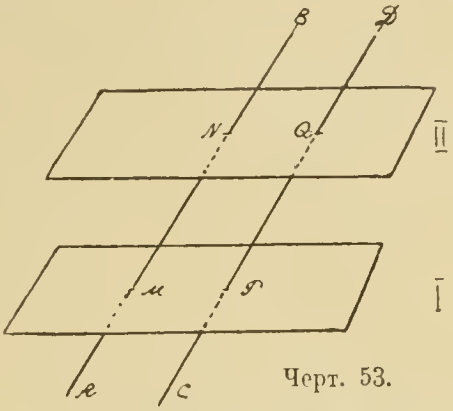
Приведемъ здѣсь рядъ свойствъ, которыми обладаютъ прямыя и плоскости.

1) Двѣ плоскости (черт. 51), перпендикулярныя къ одной прямой, параллельны.

2) Двѣ параллельныхъ (черт. 52) плоскости разсѣкаются третьей по линіямъ параллельнымъ, т.-е. прямая PQ параллельна прямой MN.

3) Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ (черт. 53), между парал-

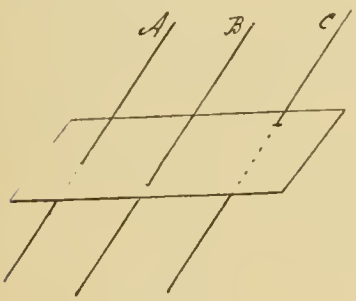




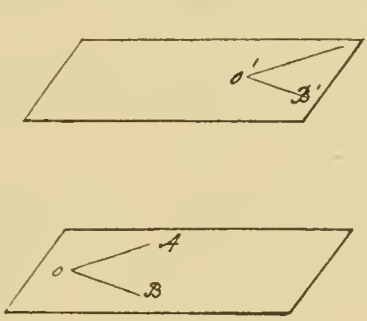
Черт. 53.

лельными плоскостями, равны между собою, т.-е. отрѣзокъ MN равенъ отрѣзку PQ.

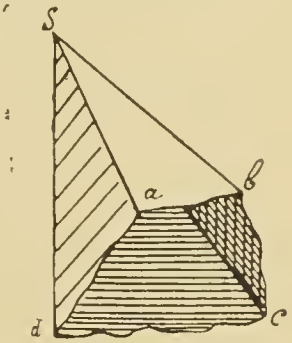
4) Двѣ прямыхъ (черт. 54), параллельныя третьей, параллельны между собою.



Черт. 54.



Черт. 55.



Черт. 56.

5) Углы (черт. 55), составленные соотвѣтственно параллельными прямыми и обращенные въ одну сторону, равны между собою.

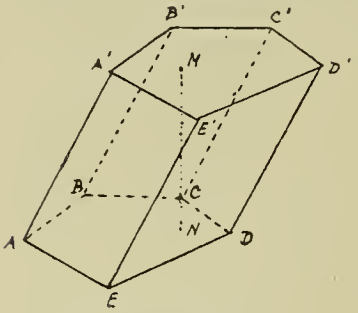
Если нѣсколько плоскостей пересѣкаются *въ одной точкѣ*, то онѣ образуютъ такъ называемый *тѣлесный* или *многогранный уголъ* (черт. 56).

Точка пересѣченія плоскостей *S* называется *вершиной* угла; плоскости *Sab, Sbc, Scd, Sad* называются *гранями* угла, прямыя *Sa, Sb, Sc, Sd—ребрами* угла, $\angle aSb$, $\angle bSc$, $\angle cSd$, $\angle aSd$—*плоскими* углами.

13. Геометрическія тѣла.

Многогранники. Тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями, называется *многогранникомъ*. Плоскости, его ограничивающія, называютъ въ этомъ случаѣ *гранями*, линіи ихъ пересѣченія — *ребрами*; вершины плоскихъ граней тѣлесныхъ угловъ, образуемыя ребрами, называются *вершинами* многогранника.

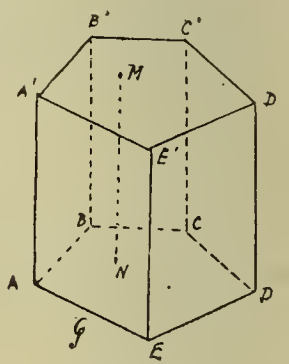
Чаще всего встрѣчаются слѣдующіе многогранники: *призмы, пирамиды, правильные многогранники.*



Черт. 57.

Призмой называется тѣло, двѣ грани котораго параллельны, а остальныя грани пересѣкаются по параллельнымъ между собою ребрамъ (черт. 57).

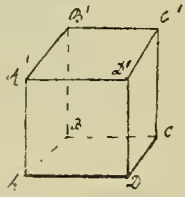
Непараллельныя плоскости призмы, пересѣкающіяся по параллельнымъ ребрамъ, называются *боковыми гранями*, а грани, параллельныя между собою,—*верхнимъ* и *нижнимъ* основаніями призмы. Перпендикуляръ *MN*, опущенный изъ *любой* точки *M*, взятой на верхнемъ основаніи, на плоскость нижняго основанія призмы, называется ея *высотой*.

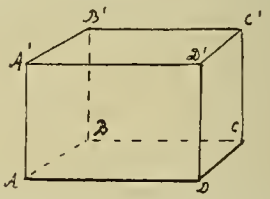


Черт. 58.

Если призма такова, что боковыя ребра ея перпендикулярны основаніямъ (черт. 58), то она называется *прямой* призмой. По числу боковыхъ граней призмы дѣлятся на трехгранныя, четырехгранныя и такъ далѣе. Весьма интересны призмы четырехгранныя.

Различаютъ слѣдующіе виды четырехгранныхъ призмъ:


Черт. 59а.

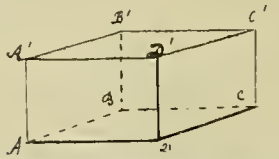


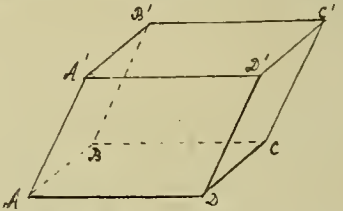
1) *Кубъ*. Прямая четырехгранная призма, у которой всѣ ребра между собою равны. Всѣ грани куба суть квадраты.

2) *Прямоугольный параллелопипедъ*. Прямая четырехгранная призма, у которой верхнее и нижнее основаніе — прямоугольники.

Всѣ грани прямоугольнаго параллелопипеда — прямоугольники, всѣ плоскіе углы всѣхъ тѣлесныхъ угловъ—прямые.

Ребра AB, AD, AA', представляющія стороны основанія прямоугольнаго параллелопипеда и его высоту, носятъ названіе его *измѣреній*.


Черт. 59б.



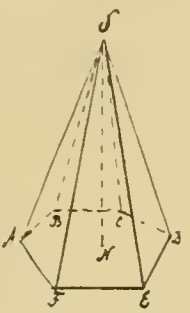
3) *Прямой параллелопипедъ*. Прямая четырехгранная призма, у которой всѣ боковыя ребра—перпендикулярны основанію.

Боковыя грани прямого параллелопипеда — прямоугольники, а верхнее и нижнее основаніе—параллелограмы.

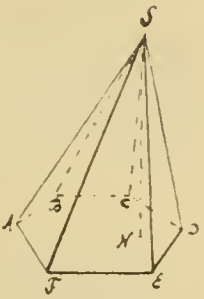
4) *Параллелопипедъ*. Призма, у которой въ основаніи лежитъ параллелограмъ $ABCD$. Всѣ грани параллелопипеда—параллелограмы.

Пирамидой называется тѣло, одна изъ граней котораго есть многоугольникъ, а остальныя—треугольники, имѣющіе общую вершину въ точкѣ S (черт. 60 и 61).

Грань *ABCDEF*, представляющая многоугольникъ, называется *основаніемъ* пирамиды, общая всѣмъ треугольникамъ вершина *S* — *вершиною пирамиды*, перпендикуляръ изъ вершины на плоскость основанія—*высотою* пирамиды *SN*.



Черт. 60.



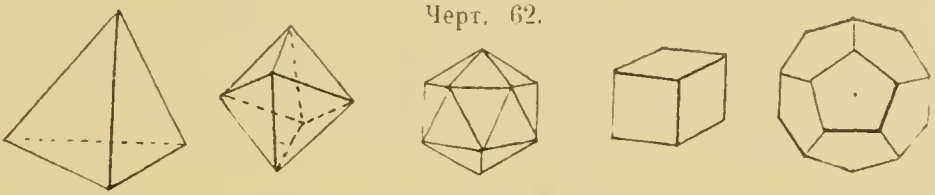
Черт. 61.

Если точка *N* находится на одинаковомъ разстояніи отъ всѣхъ вершинъ основанія (черт. 61, гдѣ $AN = BN = CN = \ldots$), то пирамида называется *прямою*. Если, кромѣ того, въ основаніи лежитъ правильный многоугольникъ, то пирамида называется *правильною*.

Правильными называются многогранники, каждая грань которыхъ представляетъ изъ себя правильный многоугольникъ.

Доказано, что существуетъ *только пять* различныхъ видовъ правильныхъ многогранниковъ (черт. 62), со слѣдующими греческими названіями:

Черт. 62.

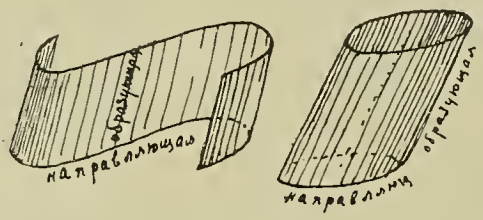


Названія.	*Тетраэдръ*	*Октаэдръ*	*Икосаэдръ*	*Гексаэдръ (кубъ)*	*Додекаэдръ*
Грани.	Треугольники.			Квадраты.	Правильные пятиугольники.
Число реберъ.	6	12	30	12	30
Число граней.	4	8	20	6	12
Число вершинъ.	4	6	12	8	20

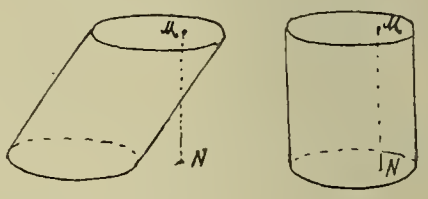
Криволинейныя тѣла. Поверхность, которая образуется отъ движенія прямой линіи (такъ называемой *образующей*) такимъ образомъ, что конецъ ея описываетъ нѣкоторую линію (*направляющую*), а сама она *постоянно переносится параллельно самой*

себѣ, называется поверхностью *цилиндрической* (черт. 63). Если направляющая есть кругъ, то поверхность называется *круглой цилиндрической*.

Тѣло, ограниченное двумя кругами, лежащими въ параллельныхъ плоскостяхъ, и круглой цилиндрической поверхностью, называется круглымъ цилиндромъ (черт. 64). Круги эти носятъ названіе *верхняго* и *нижняго* основанія цилиндра, а цилиндри-



Черт. 63.

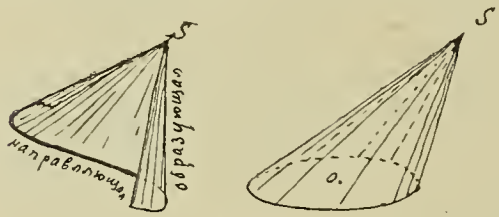


Черт. 64.

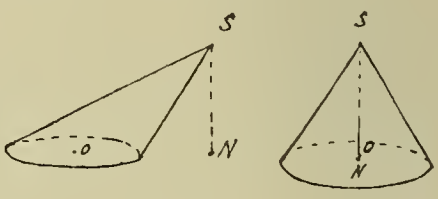
ческая поверхность — *боковой поверхностью* цилиндра. Если образующая цилиндра перпендикулярна его основанію, то цилиндръ называется *прямымъ*.

Если изъ *любой* точки M, взятой на верхнемъ основаніи цилиндра, проведемъ перпендикуляръ на плоскость нижняго основанія, то длина MN называется *высотою* цилиндра.

Поверхность, которая образуется отъ движенія прямой линіи (такъ называемой *образующей*) такимъ образомъ, что конецъ ея описываетъ нѣкоторую линію (такъ называемую *направляющую*), а сама она *постоянно проходитъ черезъ одну и ту же точку*, называется поверхностью *конической* (черт. 65).



Черт. 65.



Черт. 66.

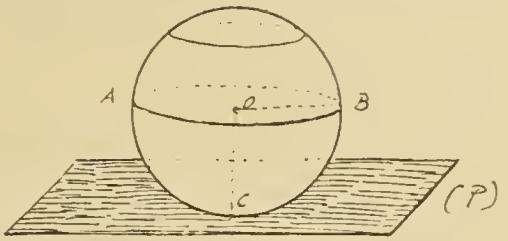
Если направляющая есть кругъ, то поверхность называется *круглой* конической. Точка S, черезъ которую постоянно проходитъ образующая конуса, называется его *вершиной*.

Тѣло, ограниченное кругомъ и круглой конической поверхностью, называется круглымъ конусомъ (черт. 66). Кругъ, ограничивающій конусъ, называется его *основаніемъ*. Перпендикуляръ SN, опущенный изъ вершины конуса на плоскость его основанія, называется *высотой* конуса. Если конецъ этого основанія N совпадаетъ съ центромъ основанія, то конусъ называется *прямымъ круговымъ* (второй черт. 66).

Поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что каждая ея точка отстоитъ на одно и то же разстояніе отъ опредѣленной точки, называемой *центромъ*, носитъ названіе *шара* (черт. 67).

Это разстояніе $OB = OC = \ldots$ называется *радіусомъ* шара.

Можно доказать, что, разсѣкая шаръ какой угодно плоскостью (такъ называемой *сѣкущей*), мы получимъ въ сѣченіи кругъ (напримѣръ, отрѣзая горбушку у арбуза). Если эта плоскость такова, что проходитъ черезъ центръ шара, то она называется *діаметральной* и образуетъ въ сѣченіи съ шаромъ кругъ, называемый *большимъ кругомъ* AB. Радіусъ большого круга OB есть, вмѣстѣ съ тѣмъ, радіусъ шара. Діаметръ большого круга называется *діаметромъ* шара.

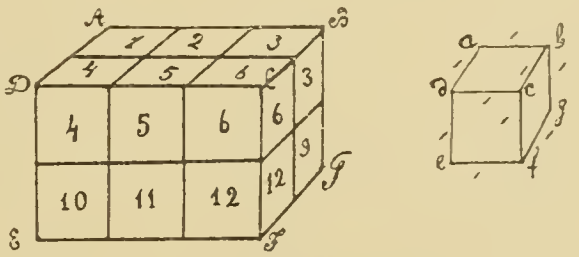


Черт. 67.

Если плоскость (P) такова, что имѣетъ съ шаромъ только *одну* общую точку C, то эта плоскость называется *касательной*.

14. Вычисленіе объемовъ.

Вычислить объемъ какого-нибудь тѣла—значитъ опредѣлить въ сколько разъ занимаемое имъ пространство больше пространства того тѣла, объемъ котораго считается единицей. *Такимъ тѣломъ считается кубъ, ребро котораго равно единицѣ.* Если въ данномъ тѣлѣ, напримѣръ, прямоугольномъ параллелопипедѣ $ABCDEFG$ (черт. 68) кубъ $abcdefg$—единица, укладывается 12 разъ, то говорятъ, что объемъ $ABCDEFG$ имѣетъ 12 кубическихъ единицъ, такъ какъ объемъ $ABCDEFG$ въ 12 раза больше куба $acbdefg$.



Черт. 68.

Такъ какъ узнать, во сколько разъ одно количество больше другого—значитъ узнать ихъ *отношеніе*, то можно сказать, что

Измѣрить объемъ значитъ опредѣлить отношеніе этого объема къ объему куба, принятаго за единицу.

Два тѣла, имѣющія одинаковый объемъ, называются *равновеликими*.

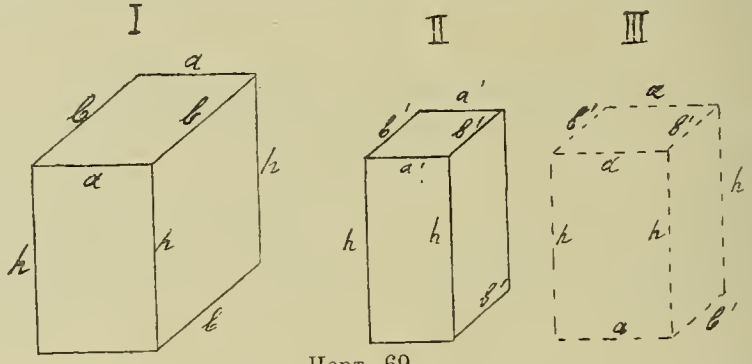
Разсмотримъ сперва, какъ опредѣлить объемъ самаго простого тѣла—прямоугольнаго параллелопипеда. Очевидно, что два пря-

моугольныхъ параллелопипеда, имѣющихъ *равныя основанія и высоты*, занимаютъ одно и то же пространство, а потому *объемы ихъ равновелики*.

Если прямоугольные параллелопипеды таковы, что имѣютъ одинаковыя основанія, но разныя высоты, то тотъ параллелопипедъ будетъ больше, у котораго высота больше, и во столько разъ, во сколько разъ его высота больше высоты другого параллелопипеда.

Въ справедливости этого убѣждаемся, раздѣливъ сравниваемые параллелопипеды на болѣе мелкіе параллелопипеды, равные между собою, и примѣнивъ такія же разсужденія, которыя мы употребляли при доказательствѣ теоремъ 9-ой (стр. 78), 17-ой (стр. 85) и для вычисленія площадей (стр. 89), при чемъ, какъ въ случаѣ соизмѣримости такъ и несоизмѣримости, теорема остается справедливою.

Если два прямоугольныхъ пераллелопипеда (черт. 69) имѣютъ одинаковыя высоты h, но разныя основанія (первый прямоуголь-



Черт. 69.

никъ — со сторонами a и b, а второй — a' и b'), то *объемы ихъ относятся какъ площади ихъ основаній, т.-е. какъ* ab *къ* $a'b'$. Дѣйствительно, вообразимъ себѣ *вспомогательный* параллелопипедъ съ той же самой высотой h и съ основаніемъ, имѣющимъ стороны a и b'.

Сравнивая параллелопипеды I и III, съ одинаковыми основаніями ah и разными высотами b и b', заключаемъ, что

$$\frac{\text{объемъ I}}{\text{объему III}} = \frac{b}{b'}; \qquad \text{объем. I} : \text{объем. III} = \frac{b}{b'}.$$

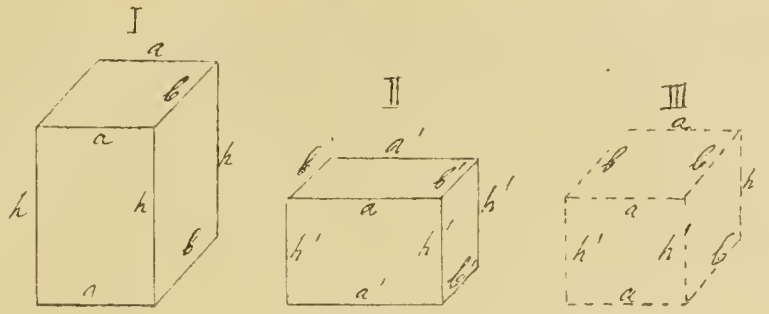
Такимъ же образомъ для параллелопипедовъ II и III получаемъ, что

$$\frac{\text{объемъ II}}{\text{объему III}} = \frac{a'}{a}; \qquad \text{объем. II} : \text{объем. III} = \frac{a'}{a}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\text{объемъ I}}{\text{объему II}} = \frac{a\,b}{a'\,b'}.$$

Послѣ этого не трудно доказать, что *объемы двухъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ, имѣющихъ разныя высоты и основанія, относятся какъ произведенія ихъ высотъ на площади основаній*, или, что то же самое, *какъ произведенія ихъ трехъ измѣреній.*



Черт. 70.

Дѣйствительно, (черт. 70) если I-ый параллелопипедъ имѣетъ измѣренія a, b, h, II-ой—измѣренія a' b' h', то вообразимъ себѣ *вспомогательный параллелопипедъ*, имѣющій измѣренія a, b, h'. Тогда

$$\frac{\text{объемъ I}}{\text{объему III}} = \frac{h}{h'}; \qquad \text{объемъ I} = \text{объему III}.\ \frac{h}{h'}.$$

$$\frac{\text{объемъ II}}{\text{объему III}} = \frac{a'b'}{ab}; \qquad \text{объемъ II} = \text{объему III}.\ \frac{a'b'}{ab}.$$

Отсюда получаемъ, что

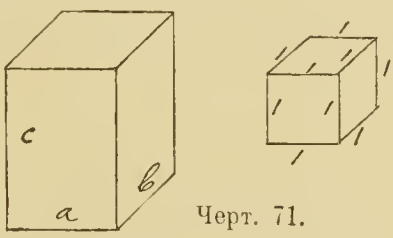
$$\frac{\text{объемъ I}}{\text{объему II}} = \frac{abh}{a'b'h'}.$$

Поэтому называя P и P'—площади основаній параллелопипедовъ I и II и замѣчая, что $ab = P$ и $a'b' = P'$, найдемъ

$$\frac{\text{объемъ I}}{\text{объему II}} = \frac{Ph}{P'h'},$$

что и требовалось доказать.

Объемъ параллелопипеда. Для вычисленія объема v прямоугольнаго параллелопипеда (черт. 71), имѣющаго измѣренія a, b и c, согласно съ предыдущимъ найдемъ отношеніе этого объема v къ объему куба (= единицѣ), ребра котораго равны единицѣ. Согласно только что сказанному, объ отношеніи объемовъ двухъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ, получаемъ



Черт. 71.

$$\frac{v}{1} = \frac{a.b.c.}{1.1.1.}, \text{ откуда } v = abc,$$

т.-е. *объемъ прямоугольнаго параллелопипеда = произведенію трехъ его измѣреній.*

Называя черезъ P—площадь основанія параллелопипеда и замѣчая, что $P = ab$, имѣемъ

$$v = P.c,$$

т.-е. *объемъ прямого параллелопипеда равенъ произведенію площади его основанія на высоту.*

Легко доказать, *что произведеніемъ площади основанія на высоту выражается также объемъ какого угодно параллелопипеда.*

Чтобы убѣдиться въ этомъ доказываютъ, что каждый параллелопипедъ (черт. 59б, 4) равновеликъ прямоугольному параллелопипеду, имѣющему съ нимъ одно основаніе и одну и ту же высоту.

Объемъ призмы. Для опредѣленія объема призмы начнемъ съ разсмотрѣнія треугольной призмы.

Взявъ двѣ одинаковыхъ треугольныхъ призмы и сложивъ ихъ равными гранями такъ, чтобы основанія ихъ лежали въ одной плоскости, мы получимъ параллелопипедъ. Объемъ послѣдняго равенъ произведенію площади его основанія на высоту, и въ два раза больше объема нашей призмы, такъ какъ площадь основанія параллелопипеда въ два раза больше площади основанія призмы, высоты же ихъ равны. Поэтому *объемъ нашей треугольной призмы равняется произведенію площади ея основанія на высоту.*

Всякая призма (см. черт. 57) можетъ быть раздѣлена на столько треугольныхъ призмъ, на сколько треугольниковъ можетъ быть разбита площадь ея основанія. Напримѣръ, проведя черезъ ребро AA' (черт. 57) плоскости, проходящія черезъ параллельныя, но несмежныя съ нимъ ребра нашей призмы, мы раздѣлимъ ее на 3 треугольныхъ призмы. Такъ какъ высоты послѣднихъ призмъ равны, то *объемъ данной призмы, равный суммѣ объемовъ, составляющихъ треугольныхъ призмъ, выражается также произведеніемъ площади основанія данной призмы на ея высоту.*

Для вычисленія объемовъ пирамидъ и тѣлъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, приходится пользоваться разсмотрѣніемъ такъ называемыхъ *безконечно-малыхъ величинъ.* Поэтому мы ссылаемъ читателя къ отдѣлу VII-ому.

Рекомендуемыя руководства по Геометріи.

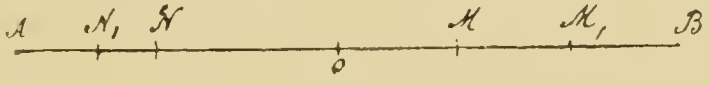
1. **Ал. Долговъ.**—Начатки Геометріи. Составлены по Кэру, Юнгу и Гаррисону. Москва. Ц. 75 к.
2. **А. Павловъ.**—Элементарная Геометрія съ практическими примѣненіями для городскихъ училищъ. 3 изданіе. Петербургъ. 1905 г. Ц. 85 к.
3. **Дм. Ройтманъ.**—Курсъ Элементарной Геометріи. Москва. Ц. 1 р. 25 к.
4. **А. Глаголевъ.**—Элементарная Геометрія и собраніе геометрическихъ задачъ. Москва. Ц. 75 к.

III. РѢШЕНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

1. Приложеніе алгебры къ геометріи.

При рѣшеніи геометрическихъ задачъ приходится пользоваться теоремами геометріи и свойствами геометрическихъ фигуръ и тѣлъ. Но, кромѣ того, бываетъ удобно прибѣгать еще къ помощи алгебры (стр. 35—47). Для приложенія алгебры къ рѣшенію геометрическихъ задачъ, необходимо прежде всего установить зависимость между геометрическими величинами и числами, которыя входятъ въ алгебраическія дѣйствія въ видѣ буквъ. Получаются эти зависимости на основаніи измѣреній. Каждый отрѣзокъ прямой линіи имѣетъ опредѣленную мѣру, выражаемую въ единицахъ измѣренія при помощи чиселъ (см. стр. 76). Площади выражаются числами въ единицахъ измѣренія площадей (стр. 88), а объемы—въ единицахъ своего измѣренія (стр. 99).

Поэтому, напримѣръ, отрѣзки данной величины мы можемъ называть буквами a, b, c..., представляющими извѣстныя величины, а искомые отрѣзки черезъ x, y,... и считать ихъ неизвѣстными. При выраженіи геометрическихъ протяженій употребляются слѣдующіе условные знаки. Возьмемъ прямую AB (черт. 1) и намѣтимъ на ней точку O. Условливаются считать



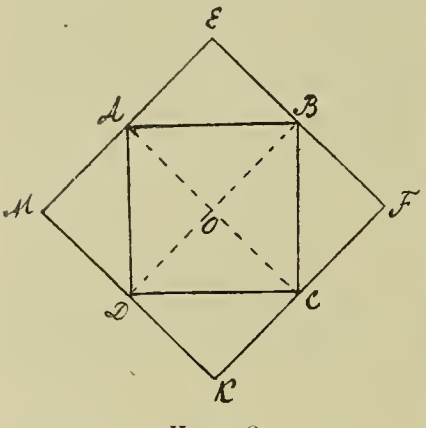
Черт. 1.

разстоянія вправо отъ точки O положительными, и при числахъ, выражающихъ ихъ длину, ставить знакъ $+$; разстоянія влѣво отъ точки O считаются отрицательными, и поэтому при числахъ, выражающихъ ихъ длину, ставится знакъ $-$. Такъ, напримѣръ, разстояніе отъ O къ M, которое обозначаютъ черезъ OM равно $+2$, разстояніе $MM_1 = +2$. Поэтому разстояніе $OM_1 = OM + MM_1 = +2+2 = +4$. Разстояніе отъ O къ N, т.-е. $ON = -3$. Разстояніе $NN_1 = -1$. Поэтому $ON_1 = ON + NN_1 = -3-1 = -4$. Такимъ образомъ при дѣйствіяхъ надъ числами, выражающими разстоянія, поступаютъ какъ съ *алгебраическими выраженіями* (стр. 35). Условившись въ этихъ обозначеніяхъ, для рѣшенія геометрическихъ задачъ, будемъ поступать такъ же, какъ при рѣшеніи алгебраическихъ задачъ, т.-е. составлять уравненія [1]) и опредѣлять рѣшеніемъ ихъ неизвѣстныя величины. Новое, что

[1]) О составленіи уравненій см. стр. 45.

теперь необходимо прибавить, это—объясненіе, какое геометрическое значеніе имѣетъ найденное рѣшеніе и какъ его построить.

Рѣшимъ, напримѣръ, слѣдующую задачу. *Данъ квадратъ ABCD (черт. 2), сторона котораго равна a. Построить квадратъ, площадь котораго была бы въ два раза больше.*



Черт. 2.

Назовемъ черезъ x сторону искомаго квадрата. Площадь даннаго квадрата равна a^2, площадь искомаго квадрата равна x^2. По условію задачи эта площадь x^2, должна быть въ два раза больше a^2, т.-е. должно быть равенство

$$x^2 = 2a^2.$$

Полученное равенство представляетъ квадратное уравненіе относительно x (стр. 44), но не заключаетъ члена съ первой степенью x. Поэтому рѣшеніе получается очень просто, извлекая изъ обѣихъ частей нашего уравненія корень квадратный,

$$x = \pm a\sqrt{2}.$$

Однако, само собою разумѣется, что изъ двухъ знаковъ намъ нужно взять только одинъ положительный, такъ какъ по смыслу задачи мы ищемъ положительную величину, представляющую длину стороны искомаго квадрата. Искомая сторона равна $a\sqrt{2}$. Чтобы имѣть геометрическое рѣшеніе нашей задачи, мы не можемъ ограничиться найденнымъ числомъ. Мы должны построить искомый квадратъ, т.-е. найти отрѣзокъ, равный $a\sqrt{2}$, гдѣ a представляетъ длину стороны даннаго квадрата AB, BC, CD или AD.

Чтобы построить искомую сторону, проводимъ діагональ AC и получаемъ прямоугольный $\triangle$ ABC, съ равными катетами AB и BC, величина которыхъ равна a. Поэтому гипотенуза AC, по теоремѣ 12-ой (стр. 81), выражается такъ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \text{ или}$$

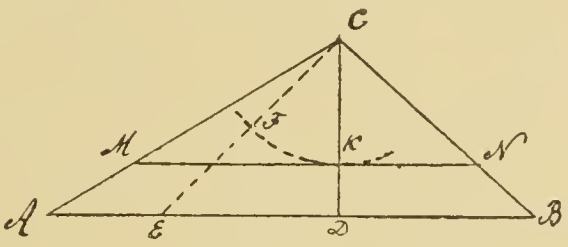
$$AC = a\sqrt{2}.$$

Слѣдовательно, *сторона искомаго квадрата равняется діагонали AC даннаго квадрата ABCD.*

Послѣ этого построить искомый квадратъ очень просто. Проведемъ еще вторую діагональ BD даннаго квадрата, и затѣмъ проводимъ черезъ вершины A, B, C и D даннаго квадрата прямыя, параллельныя обѣимъ діагоналямъ AC и BD. Эти прямыя EF и MK, ME и KF попарно перпендикулярны, такъ какъ діаго-

нали AC и BD взаимно перпендикулярны. Четыре проведенныхъ прямыхъ равны между собой, какъ отрѣзки параллельныхъ, заключенные между параллельными [1]) и, кромѣ того, такъ какъ обѣ діагонали AC и BD равны между собой. Поэтому полученная фигура $EFKM$ представляетъ квадратъ, удовлетворяющій требуемымъ условіямъ.

Одного взгляда на построенный квадратъ вполнѣ достаточно, чтобы сказать, что площадь его въ два раза больше даннаго квадрата. Въ самомъ дѣлѣ, площадь найденнаго квадрата равна площади даннаго квадрата + площади четырехъ равныхъ между собой прямоугольныхъ равнобедренныхъ △—ковъ AEB, BFC, CKD и ADM. Площадь каждаго изъ нихъ равна одной четверти площади даннаго квадрата (напримѣръ, $\triangle AEB = \triangle AOB$). Слѣдовательно, квадратъ $EFKM$ равенъ удвоенной площади даннаго квадрата $ABCD$.



Черт. 3.

Предлагаемъ читателю вторую слѣдующую задачу:

Данъ △ ABC *(черт. 3). Раздѣлить площадь его на двѣ равныхъ части прямой* MN, *параллельной основанію* AB.

Такъ какъ △—къ данъ, то высота его $CD = h$ — данная величина. Отложимъ на ней отрѣзокъ $CK = x$, который опредѣляетъ разстояніе искомой прямой MN отъ вершины C. Такъ какъ площадь △—ка MCN равна половинѣ площади $\triangle ACB$, то мы имѣемъ

$$x \cdot MN = \frac{h}{2} \cdot AB, \quad \text{или } x = \frac{h \cdot AB}{2 \cdot MN}.$$

Но, кромѣ того, $\triangle ABC$ подобенъ $\triangle MNC$. Поэтому сходственныя стороны ихъ пропорціональны высотамъ, и мы получаемъ

$$\frac{AB}{MN} = \frac{h}{x}.$$

Подставляя значеніе отношенія $\frac{AB}{MN} = \frac{h}{x}$ въ написанное выше значеніе x, получаемъ квадратное уравненіе

$$x = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{x} = \frac{h^2}{2x}, \text{ или } x^2 = \frac{h^2}{2}.$$

Отсюда для x беремъ одно только положительное значеніе

$$x = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

---

[1]) См. стр. 71, *слѣдствіе 4)-ое.*

Чтобы построить вычисленное значеніе x, откладываемъ отъ D отрѣзокъ $DE = CD$. Точку E соединяемъ съ C. Изъ прямоугольнаго $\triangle$—ка DEC получаемъ, что

$$EC^2 = CD^2 + ED^2 = h^2 + h^2 = 2h^2, \text{ или } EC = h\sqrt{2}.$$

Поэтому раздѣливъ EC пополамъ въ точкѣ F, получаемъ

$$CF = \frac{EC}{2} = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Описавъ около точки C, какъ около центра, окружность радіусомъ CF, мы отсѣчемъ ею на высотѣ CD отрѣзокъ CK, представляющій искомое значеніе x.

Изъ рѣшенія приведенныхъ задачъ легко вывести заключеніе, что приложеніе алгебры къ рѣшенію геометрическихъ задачъ состоитъ въ слѣдующихъ послѣдовательныхъ дѣйствіяхъ: 1) выборъ неизвѣстныхъ, 2) составленіе уравненій, которымъ неизвѣстныя должны удовлетворять, 3) рѣшеніе этихъ уравненій и 4) построеніе найденныхъ рѣшеній.

Въ разсмотрѣнныхъ задачахъ послѣднія построенія были легко выполнимы. Но могутъ получаться болѣе сложныя уравненія, которыя выражаютъ неизвѣстныя черезъ нѣсколько данныхъ отрѣзковъ, при помощи сложныхъ формулъ, заключающихъ, напримѣръ, радикалы. Чтобы построить тогда полученныя рѣшенія, приходится пользоваться теоремами геометріи, которыя выражаютъ зависимости между различными отрѣзками. Пусть, напримѣръ, $x = \frac{a \cdot b}{c}$, гдѣ a, b, c представляютъ три данныхъ отрѣзка, какъ построить тогда x? Мы можемъ написать $x : a = b : c$, т.-е. разсматривать x, какъ четвертый пропорціональный отрѣзокъ къ тремъ даннымъ. Мы говорили выше, какъ построить такой отрѣзокъ x (см. стр. 79).

Что касается построенія другихъ болѣе сложныхъ формулъ, то мы отсылаемъ читателя къ книгѣ *А. Фролова*. Приложеніе алгебры къ геометріи. Изданіе 11-е, Москва, 1908, ц. 40 к.

2. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ при помощи циркуля и линейки.

Элементарная геометрія изучаетъ прямолинейныя фигуры и окружность и для практическаго построенія изучаемыхъ фигуръ примѣняетъ *линейку* (для проведенія прямыхъ линій), *циркуль* (для проведенія окружностей), иногда, кромѣ того, и *угольникъ* для черченія прямыхъ угловъ. Само собой разумѣется, что эти

приборы не могутъ давать идеально точныхъ геометрическихъ линій, уже по одному тому, что эти послѣднія не должны имѣть толщины, а линія, проведенная карандашомъ, какъ бы она ни была тонка, имѣетъ толщину. Тѣмъ не менѣе, если можно доказать, что построенная геометрическая фигура удовлетворяетъ условіямъ, то задача считается геометрически разрѣшенной. Такъ, напримѣръ, въ предыдущихъ двухъ задачахъ мы видѣли, какъ дѣлаются необходимыя построенія при помощи циркуля и линейки. Однако, построенія далеко не всегда такъ очевидны и просты, какъ въ разсмотрѣнныхъ случаяхъ. Напримѣръ, построеніе правильнаго десятиугольника уже значительно сложнѣй, построеніе же правильнаго семнадцатиугольника, которое также осуществляется посредствомъ циркуля и линейки, настолько сложно, что отыскать его и доказать его правильность невозможно безъ помощи высшей математики.

Древне-греческіе математики придавали большое значеніе рѣшенію геометрическихъ задачъ на построеніе и достигли въ этомъ отношеніи большого совершенства. Но тѣмъ не менѣе все же осталось послѣ нихъ нѣсколько задачъ, по виду довольно простыхъ, передъ которыми оказались безсильны самые искусные геометры.

Къ числу этихъ задачъ относятся: удвоеніе куба, т.-е. построеніе куба, объемъ котораго вдвое больше объема даннаго куба, дѣленіе даннаго угла на три равныхъ части (трисекція) и квадратура круга, т.-е. построеніе квадрата, площадь котораго была бы точно равна площади даннаго круга. Эти три задачи не были разрѣшены ни греками, ни позднѣйшими математиками, ни многими любителями, которые безъ достаточной подготовки даже до настоящаго времени тратятъ на нихъ много времени и напрасныхъ усилій.

Чѣмъ же объясняется безплодность столькихъ усилій, и можно ли надѣяться, что эти задачи будутъ когда-нибудь разрѣшены?

Въ настоящее время наука имѣетъ полную возможность отвѣтить на эти вопросы, и отвѣтъ ея таковъ: ни одна изъ упомянутыхъ задачъ не можетъ быть разрѣшена посредствомъ примѣненія только циркуля и линейки, совершенно также, какъ при помощи одной только линейки нельзя построить круга, а при помощи только циркуля нельзя начертить прямую.

Разсужденія, при помощи которыхъ получается этотъ выводъ, довольно просты, но для изложенія ихъ потребовалось бы слишкомъ много мѣста, поэтому ограничимся только указаніемъ общаго положенія, на которое опирается, какъ высказанное выше утвержденіе, такъ и всѣ доказательства относительно разрѣшимости

или неразрѣшимости при помощи циркуля и линейки той или иной геометрической задачи.

Условіе необходимое и достаточное, чтобы данная задача могла быть рѣшена построеніемъ при помощи циркуля и линейки, заключается въ томъ, чтобы алгебраическое рѣшеніе той же задачи (т.-е. посредствомъ вычисленія) приводилось бы къ рѣшенію одного или нѣсколькихъ квадратныхъ уравненій или уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Напримѣръ, задача удвоенія квадрата, которую мы рѣшили выше, алгебраически приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія

$$x^2 = 2a^2,$$

гдѣ a есть сторона даннаго квадрата, x—сторона искомаго квадрата.

Напротивъ, задача удвоенія куба приводитъ къ уравненію третьей степени

$$x^3 = 2a^3,$$

гдѣ a сторона даннаго куба, x—сторона искомаго куба. Этимъ объясняется, что первая задача разрѣшима циркулемъ и линейкой, а вторая—нѣтъ. Точно такъ же можно убѣдиться, что трисекція угла (не прямого) приводитъ къ уравненію третьей степени и, слѣдовательно, не можетъ быть рѣшена при помощи циркуля и линейки. Такимъ же образомъ доказывается неразрѣшимость многихъ другихъ задачъ (если примѣнять только циркуль и линейку), напримѣръ, построеніе правильнаго семиугольника, девятиугольника.

Что касается квадратуры круга, то здѣсь на первый взглядъ приходится только рѣшить квадратное уравненіе

$$x^2 = \pi R^2 \ ^{1}),$$

гдѣ x должна быть стороной квадрата равновеликаго кругу радіуса R. Но дѣло въ томъ, что число π (отношеніе длины окружности къ діаметру) не дано. Вычисленіе же его не можетъ быть приведено не только къ рѣшенію квадратныхъ уравненій, но и вообще къ рѣшенію алгебраическихъ уравненій съ данными коэффиціентами. Такимъ образомъ и задача квадратуры круга, на рѣшеніе которой при помощи циркуля и линейки потрачено еще болѣе труда, чѣмъ на всѣ остальныя геометрическія задачи, также оказывается неразрѣшимой.

---

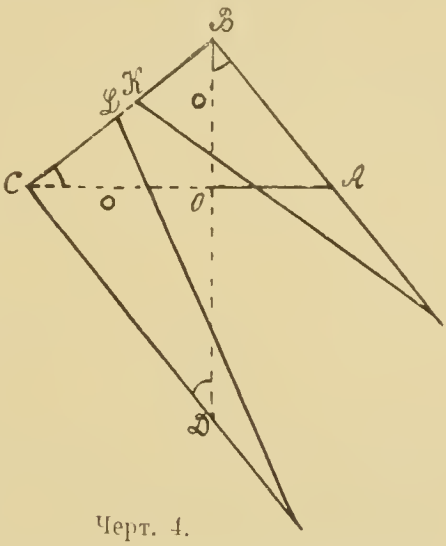
[1]) Площадь круга равна πR^2, гдѣ π—опредѣленное число. Эта формула будетъ доказана ниже въ отдѣлѣ VII-мъ.

3. Удвоеніе куба и трисекція угла.

Не слѣдуетъ, однако, думать, что всѣ упомянутыя выше задачи не могутъ быть разрѣшимы при помощи другихъ какихъ-либо приборовъ. Напротивъ, для этой цѣли, какъ и для построенія всякой задачи, можно придумать самые разнообразные приборы.

Первая задача, объ удвоеніи куба, какъ и всѣ задачи, которыя приводятся къ алгебраическимъ уравненіямъ 3-й или 4-й степени, весьма просто разрѣшаются при помощи двухъ угольниковъ. Такое рѣшеніе задачи удвоенія куба было дано греческимъ философомъ и математикомъ Платономъ почти за 400 лѣтъ до Р. Х.

Пусть отрѣзокъ OA (черт. 4) представляетъ сторону a даннаго куба. Отложимъ на перпендикулярѣ къ OA отрѣзокъ $OD=2a$.



Черт. 4.

Затѣмъ беремъ два угольника и располагаемъ ихъ такъ, чтобы катетъ перваго BK и катетъ второго CL составляли бы одну прямую, между тѣмъ какъ другой катетъ перваго заставимъ проходить черезъ точку A, и другой катетъ второго — черезъ точку D. Положеніе нашихъ соединенныхъ угольниковъ этимъ еще не вполнѣ опредѣляется, и мы можемъ ихъ передвигать до тѣхъ поръ, пока вершину B прямого угла перваго угольника не установимъ на продолженіи отрѣзка OD, а вершину C второго—на продолженіи OA. Я говорю, что если наши угольники такимъ образомъ расположены, то $OB=x$ представляетъ собой сторону искомаго куба. Въ самомъ дѣлѣ, $\_AOB$ и $\triangle BOC$ подобны, такъ какъ оба прямоугольные и имѣютъ равные углы, отмѣченные одинаковымъ образомъ. Обозначая $OC=y$, изъ подобія этихъ $\triangle$—ковъ получаемъ, на основаніи пропорціональности сторонъ (теорема 10-ая, стр. 80), слѣдующее равенство

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}, \qquad \text{или} \qquad \frac{a}{x}=\frac{x}{y}, \qquad \text{или} \qquad y=\frac{x^2}{a}.$$

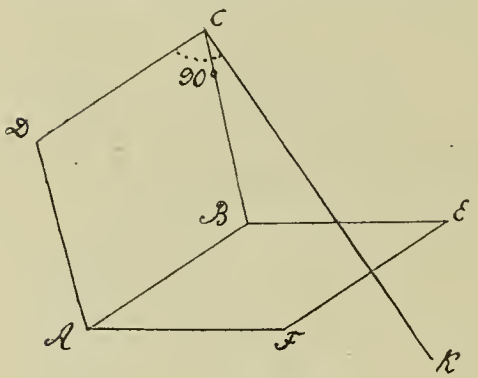
Прямоугольные треугольники $\triangle BOC$ и $\triangle COD$ также подобны, вслѣдствіе отмѣченнаго равенства угловъ. Поэтому изъ пропорціональности сторонъ, заключаемъ, что $\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{OD}$, или $\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$.

Подставляя въ послѣднее равенство изъ перваго значеніе $\frac{x}{y}=\frac{a}{x}$, получаемъ $\frac{a}{x}=\frac{y}{2a}$, или $xy=2a^2$. Наконецъ, подставляя сюда

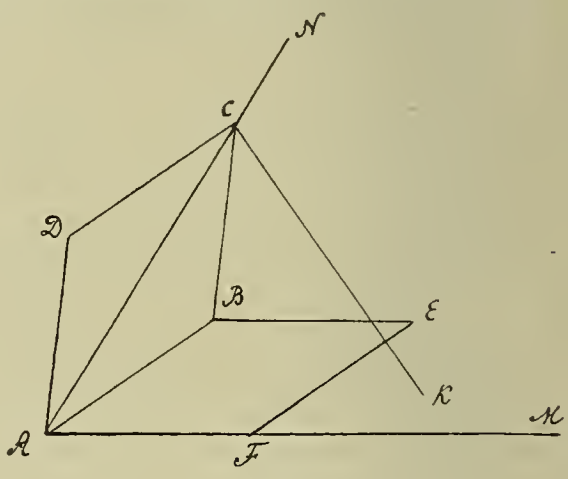
полученное выше значеніе $y = \frac{x^2}{a}$, находимъ $\frac{x^3}{a} = 2a^2$, или $x^3 = 2a^3$, что и выражаетъ, что кубъ, сторона котораго равна $OB = x$, имѣетъ объемъ вдвое большій, чѣмъ кубъ, сторона котораго равна a.

Для раздѣленія какого угодно угла на три равныхъ части можно примѣнить слѣдующій приборъ.

Вообразимъ два подвижныхъ (на шарнирахъ) *ромба*[1] $ABEF$ и $ABCD$ (черт. 5), имѣющихъ общую сторону AB, и пусть къ сторонѣ CD второго ромба придѣлана перпендикулярная къ ней линейка CK. Для того, чтобы раздѣлить данный $\angle MAN$ (черт. 6),

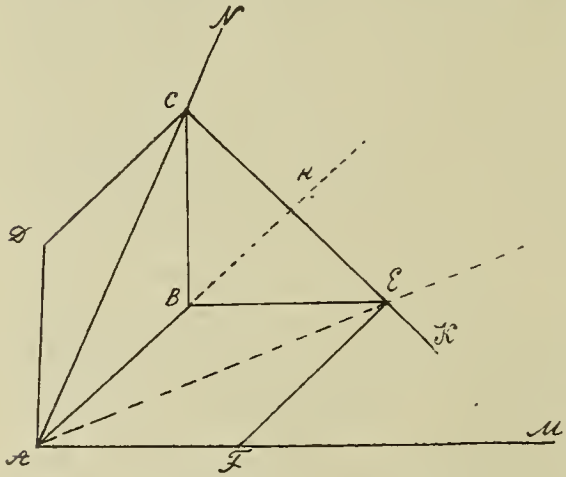


Черт. 5.



Черт. 6.

на три равныхъ части, приборъ располагаемъ такъ: сторону AF располагаемъ по сторонѣ угла AM, вершину C второго ромба помѣщаемъ гдѣ-нибудь на другой сторонѣ AN угла. Перпендикуляръ CK, вообще говоря, не пересѣчетъ вершины E перваго ромба. Но мы можемъ передвигать точку C по сторонѣ AN до тѣхъ поръ, пока CK не пройдетъ черезъ точку E. Въ такомъ случаѣ $\angle BAC$ (черт. 7) окажется равнымъ $\frac{1}{3}\angle MAN$. Въ самомъ дѣлѣ, прямая EC, будучи перпендикулярной къ DC, перпендикулярна также и къ AB, такъ какъ AB параллельна DC. Слѣдовательно, въ силу равнобедренности треугольника EBC, продолженіе AB дѣ-



Черт. 7.

[1]) Опредѣленіе ромба см. стр. 82, черт. 26, 3)-ій.

литъ EC пополамъ въ точкѣ H. Такимъ образомъ прямоугольные $\triangle AHC$ и $\triangle AHE$ равны, такъ какъ имѣютъ общій катетъ AH и по равному катету $HC = HE$. Отсюда заключаемъ, что углы CAB и EAB равны между собой; но углы EAB и EAF также равны между собой (извѣстное свойство ромба, вытекающее изъ равенства треугольниковъ EAB и EAF). Итакъ, $\angle CAB = \angle EAB = \angle EAF$, т.-е. каждый изъ этихъ угловъ составляетъ треть даннаго угла MAN.

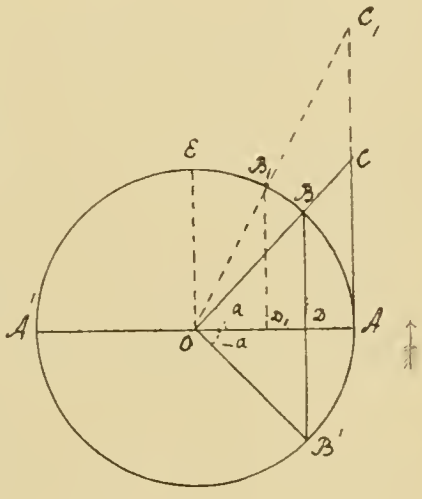
Рекомендуемыя руководства для рѣшенія геометрическихъ задачъ.

1. **А. Фроловъ.**—Приложеніе алгебры къ геометріи. Изданіе 11-ое. Москва. 1908 Ц. 40 к.
2. **И. Александровъ.**—Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе и сборникъ геометрическихъ задачъ съ полными и краткими рѣшеніями. Москва. Ц. 1 р.
3. **А. Адлеръ.** — Теорія геометрическихъ построеній. Переводъ съ нѣмецкаго. Изданіе Матезисъ. Одесса. 1910. Ц. 2 р. 25 к.

IV. ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Тригонометрія занимается рѣшеніемъ геометрическихъ задачъ о треугольникахъ при помощи вычисленій [1]).

Съ этою цѣлью вводятся особыя *тригонометрическія величины*. Чтобы дать о нихъ понятіе, возьмемъ окружность, описанную радіусомъ OA (черт. 1), и *условимся длину его считать за единицу измѣренія длины.*



Черт. 1.

Возьмемъ уголъ a, образованный радіусомъ OA и радіусомъ OB; изъ точки B опускаемъ перпендикуляръ BD на радіусъ AO.

Длина отрѣзка DB называется *синусомъ угла a* и обозначается слѣдующимъ образомъ $\sin a$.

Длина отрѣзка OD называется *косинусомъ угла a* и обозначается $\cos a$.

Если разсматривать углы, которые получаются при вращеніи радіуса OB вокругъ точки O въ направленіи,

[1]) О рѣшеніи геометрическихъ задачъ при помощи вычисленій см. статью: Приложеніе алгебры къ геометріи, стр. 103.

указанномъ стрѣлкой, то для каждаго изъ этихъ угловъ можно построить синусъ и косинусъ. Такъ, напримѣръ, для $\angle AOB_1$ длина отрѣзка D_1B_1 представляетъ его *синусъ*, а длина OD_1 — его *косинусъ*.

Поэтому также говорятъ, что синусомъ угла называется длина перпендикуляра, опущеннаго изъ конца подвижнаго радіуса круга на неподвижный, а косинусомъ угла называется длина отрѣзка неподвижнаго радіуса, отъ вершины угла до основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ конца подвижнаго радіуса на неподвижный (при чемъ *этотъ радіусъ принятъ за единицу длины*).

Изъ сравненія $\angle AOB$ и $\angle AOB_1$ легко замѣтить, что для большаго угла и синусъ больше, а косинусъ меньше. Если возьмемъ прямой $\angle AOE$, то очевидно, что синусъ его равенъ радіусу $OE = 1$, а косинусъ равенъ нулю. Такъ какъ прямой уголъ равенъ 90^0, то поэтому мы напишемъ, что

$$sin\ 90^0 = 1, \quad cos\ 90^0 = 0.$$

Изъ конца A неподвижнаго радіуса проводимъ касательную къ нашей окружности, которая будетъ служитъ перпендикуляромъ къ радіусу OA (см. стр. 84, теорема 13-ая). Продолжаемъ вторую сторону угла a, представляющую подвижный радіусъ OB, до пересѣченія его въ точкѣ C съ построеннымъ перпендикуляромъ.

Длина отрѣзка AC называется *тангенсомъ угла a*, и обозначается *tg a*.

Очевидно, что тангенсъ большаго $\angle AOB_1$ представляется большимъ сравнительно съ AC отрѣзкомъ AC_1, т.-е. съ увеличеніемъ угла, тангенсъ его также становится больше. Наконецъ, если $\angle AOB$ становится равнымъ прямому $\angle AOE$, тогда прямая AC, перпендикулярная къ неподвижному радіусу OA, становится параллельной со второй стороной нашего угла OE. Параллельныя линіи не пересѣкаются; въ математикѣ послѣднее обстоятельство выражаютъ условно словами *параллельныя линіи пересѣкаются въ безконечности*. Поэтому мы говоримъ, что прямая AC пересѣкается въ безконечности съ прямой OE, и, слѣдовательно, длина отрѣзка прямой AC отъ точки A до пересѣченія съ OE представляетъ безконечно-большую величину, которая условно обозначается черезъ ∞. Поэтому напишемъ, что

$$tg\ 90^0 = \infty\ .$$

Опредѣленныя нами длины *sina*, *cosa*, *tga* называются *тригонометрическими величинами* [1]).

---

[1]) Кромѣ нихъ, въ тригонометріи разсматриваются еще нѣсколько другихъ величинъ. Но мы отсылаемъ читателя, который пожелалъ бы познакомиться съ ними, къ книгѣ: *Эмиль Борель*. Тригонометрія. Москва. 1909 года. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина, Ц. 75 к.

Ихъ абсолютныя значенія опредѣляются также соотвѣтственно, какъ отношенія

$$\frac{DB}{OA}, \quad \frac{OD}{OA}, \quad \frac{AC}{OA},$$

гдѣ OA служитъ единицей измѣренія.

Тригонометрическія величины связаны между собой двумя зависимостями, которыя выводятся слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ треугольникъ $\triangle OBD$ (черт. 1) прямоугольный, съ катетами $DB = \sin a$ и $OD = \cos a$ и гипотенузой $OB = 1$, то на основаніи теоремы 12-ой Пифагора (см. стр. 81), получаемъ

$$DB^2 + OD^2 = OB^2, \quad \text{или} \quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

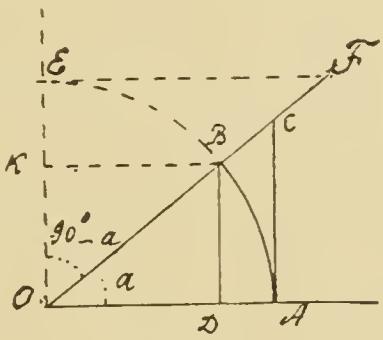
Треугольникъ $\triangle OBD$ отсѣкается отъ $\triangle$—ка OAC прямой DB, параллельной сторонѣ AC послѣдняго $\triangle$—ка. Поэтому эти $\triangle$—ки подобны, и изъ ихъ подобія слѣдуетъ, что

$$\frac{AC}{OA} = \frac{DB}{OD}, \quad \text{или} \quad \frac{tg\,a}{1} = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \text{т.-е.} \quad tg\,a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Второй вопросъ заключается въ выводѣ зависимости между тригонометрическими величинами даннаго угла a и его дополнительнаго угла до 90^0. Этотъ дополнительный уголъ представляетъ $\angle BOE$ (черт. 2). Принимая для него радіусъ OE за неподвижный, опустимъ на него изъ точки B перпендикуляръ KB. Послѣдній и представляетъ синусъ угла EOB, т.-е.

$$\sin\,(90^0 - a) = KB.$$

Такъ какъ отрѣзокъ KB равенъ и параллеленъ OD, который равенъ $\cos a$, то поэтому мы получаемъ первую изъ искомыхъ зависимостей



Черт. 2.

$$\sin\,(90^0 - a) = \cos a.$$

Далѣе, длина отрѣзка OK, который равенъ DB, представляетъ косинусъ угла $90^0 - a$. Поэтому находимъ вторую зависимость

$$\cos\,(90^0 - a) = \sin\,a.$$

Наконецъ, продолживъ радіусъ OB до пересѣченія его въ точкѣ F съ касательной къ дугѣ EB, построенной въ точкѣ E, заключаемъ, что длина отрѣзка EF представляетъ тангенсъ угла $90^0 - a$. Такъ какъ на основаніи предыдущей формулы

$$tg\,(90^0 - a) = \frac{\sin\,(90^0 - a)}{\cos\,(90^0 - a)},$$

то, подставляя сюда полученныя только что значенія для $\sin\,(90^0 - a)$ и $\cos\,(90^0 - a)$, находимъ третью искомую формулу

$$tg\,(90^0 - a) = \frac{\cos a}{\sin a}, \quad \text{или} \quad tg\,(90^0 - a) = \frac{1}{tg\,a}.$$

До сихъ поръ мы разсматривали исключительно острые углы, которые меньше 90^0. Но опредѣленія нашихъ трехъ основныхъ тригонометрическихъ величины распространяются также на какіе-угодно углы. Геометрическое опредѣленіе ихъ всегда остается тѣмъ же самымъ; чтобы построить отрѣзки, опредѣляющіе тригонометрическія величины, принимаемъ одну изъ сторонъ угла за неподвижный радіусъ и изъ конца подвижнаго радіуса опускаемъ перпендикуляръ на первый радіусъ. Тригонометрическія величины тупого угла легко выразить черезъ тригонометрическія величины остраго угла, который отличается отъ тупого на цѣлое число прямыхъ угловъ [1]).

Углы, отложенные внизъ отъ неподвижнаго радіуса OA (чер. 1), имѣютъ отрицательное значеніе. Такъ уголъ AOB', имѣющій одинаковое число градусовъ съ угломъ AOB, но отложенный внизъ отъ OA, имѣетъ величину $-a$. Синусъ его, представленный длиной отрѣзка DB', равенъ также отрицательной величинѣ DB. Что касается косинусовъ, то тѣ изъ нихъ, которые представляются отрѣзками, отложенными отъ O къ A, считаются положительными, а представленные отрѣзками, отложенными отъ O къ A', считаются отрицательными.

Пользуясь этимъ указаніемъ, читатель можетъ составить слѣдующую таблицу значеній тригонометрическихъ величинъ, при чемъ необходимо всегда имѣть въ виду правило знаковъ для выраженій длины отрѣзковъ, а также и угловъ.

$\angle^0$	$-a$	0	a	$90-a$	90	$90+a$	$180-a$	180	$180+a$	$270-a$	270	$270+a$	$360-a$	360	$360+a$
$\sin$	$-\sin a$	0	$\sin a$	$\cos a$	1	$\cos a$	$\sin a$	0	$-\sin a$	$-\cos a$	-1	$-\cos a$	$-\sin a$	0	$\sin a$
$\cos$	$\cos a$	1	$\cos a$	$\sin a$	0	$-\sin a$	$-\cos a$	-1	$-\cos a$	$-\sin a$	0	$\sin a$	$\cos a$	1	$\cos a$
tg	$-tg a$	0	$tg\ a$	$\frac{1}{tg a}$	∞	$-\frac{1}{tg a}$	$-tg\ a$	0	$tg\ a$	$\frac{1}{tg a}$	∞	$-\frac{1}{tg a}$	$-tg a$	0	$tg\ a$

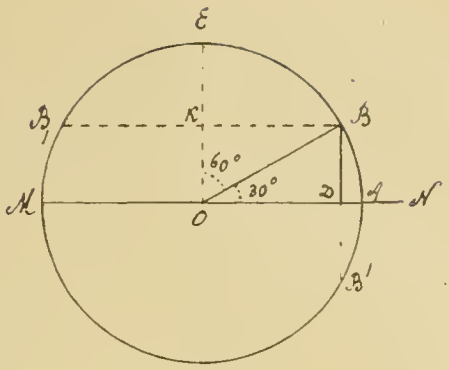
Всѣ изложенныя указанія служатъ для опредѣленія тригонометрическихъ величинъ данныхъ угловъ.

Можно убѣдиться, что, обратно, зная тригонометрическія величины какого-либо угла, легко получить величину самаго угла. Предположимъ, напримѣръ, $\sin x = \frac{1}{2}$. Требуется найти, чему равенъ уголъ?

---

[1]) См. упомянутую выше книгу *Эмиль Борель*. Тригонометрія. Москва 1909 года. Стр. 34.

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, возьмемъ какую-либо прямую линію MN (чер. 3), памѣтимъ на ней точку O и отъ нея отложимъ вправо отрѣзокъ OA, который условимся считать за единицу длины. Опишемъ, наконецъ, дугу окружности радіусомъ OA вокругъ точки O какъ центра. Перпендикулярный къ OA радіусъ OE дѣлимъ пополамъ и изъ точки дѣленія K проводимъ прямую KB, параллельную OA.



Чертр. 3.

Если соединить точку B съ O, то $\angle AOB = x$, такъ какъ перпендикуляръ BD, опущенный изъ точки B на OA, равенъ $OK = \frac{1}{2}$.

Въ данномъ случаѣ легко опредѣлить также, сколько градусовъ имѣетъ построенный уголъ. Продолжимъ прямую BD до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ B'.

Если соединить B' съ O, то $\triangle OBB'$ равнобедренный (стр. 64) и высота его OD дѣлитъ хорду BB' пополамъ (стр. 66). Слѣдовательно, $BB' = 2DB = 1$, такъ какъ по условію $DB = \frac{1}{2}$. Поэтому BB' представляетъ сторону правильнаго вписаннаго шестиугольника (стр. 87), стягивающую дугу BAB' въ 60^0. Уголъ AOB представляетъ половину угла, стягиваемаго послѣдней дугой. Стало-быть, $\angle AOB = 30^0$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы заключаемъ, что $sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$. Далѣе $cos\ 30^0 = OD = KB = sin\ 60^0$. Такъ какъ хорда BB_1 стягиваетъ дугу въ 120^0, то представляетъ сторону вписаннаго треугольника и равна $\sqrt{3}$ (въ нашемъ случаѣ $R = 1$). Поэтому

$$KB = \frac{1}{2}\ BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующую таблицу значеній тригонометрическихъ величинъ.

$$sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad tg\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad tg\ 45^0 = 1,$$

$$sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad cos 60^0 = \frac{1}{2}, \quad tg\ 60^0 = \sqrt{3}.$$

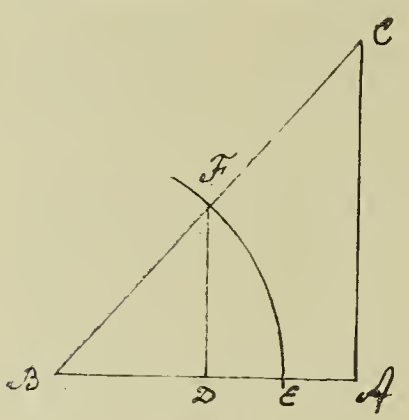
---

1) См. Эмиль Борель. Тригонометрія. Глава I.

Существуютъ таблицы значеній тригонометрическихъ величинъ, соотвѣтствующихъ различнымъ дугамъ. Однако болѣе употребительны таблицы не тригонометрическихъ величинъ, а ихъ *логарифмовъ*, которыя позволяютъ для данныхъ дугъ находить логарифмы ихъ тригонометрическихъ величинъ и, обратно, по логарифмамъ находить величину дугъ въ градусахъ. Такія таблицы читатель найдетъ въ упомянутой уже выше книгѣ, *Эмиль Борель. Тригонометрія.* Глава II, стр. 59 и 222—223.

Эти таблицы упрощаютъ вычисленія при задачахъ *рѣшенія треугольниковъ*, представляющихъ главную цѣль тригонометріи. Эти задачи заключаются въ вычисленіи величинъ сторонъ и угловъ треугольниковъ по достаточному числу заданныхъ для нихъ значеній, дѣлающихъ задачу построенія треугольника вполнѣ опредѣленной.

Возьмемъ, напримѣръ, прямоугольный $\triangle ABC$ (чер. 4) съ прямымъ угломъ въ вершинѣ A. Условимся называть углы его черезъ A, B, C, а стороны черезъ a, b, c, при чемъ сторона a лежитъ противъ $\angle A$, b—противъ $\angle B$ и c—противъ $\angle C$.



Черт. 4.

Изъ точки B радіусомъ BE, равнымъ единицѣ длины ($BE = BF = 1$), проводимъ дугу окружности EF, пересѣкающую стороны $\triangle$—ка въ точкахъ E и F. Изъ точки F опускаемъ перпендикуляръ FD на сторону c.

Очевидно, что

$$DF = \sin B, \quad BD = \cos B.$$

Изъ подобія $\triangle ABC$ и $\triangle DBF$ получаемъ пропорціональность сторонъ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{BF}, \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{1}, \quad \text{т.-е.} \quad b = a \sin B.$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BF}, \quad \text{или} \quad \frac{c}{a} = \frac{\cos B}{1}, \quad \text{т.-е.} \quad c = a \cos B.$$

Такъ какъ сумма угловъ, прилежащихъ къ гипотенузѣ прямоугольнаго $\triangle$—ка равна 90^0, то мы получаемъ еще одну зависимость

$$B + C = 90^0.$$

Полученныхъ три равенства

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B, \quad B + C = 90^0$$

представляютъ три уравненія между шестью частями (элементами) $\triangle$—ка: 3 стороны и 3 угла. Если три изъ этихъ величинъ даны

(что необходимо для опредѣленности заданія △—ка), то три остальныхъ части △—ка могутъ быть вычислены изъ полученныхъ трехъ уравненій.

Очень часто вмѣсто одного изъ первыхъ двухъ написанныхъ уравненій берутъ ихъ отношеніе

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B}, \quad \text{или } b = c \operatorname{tg} B.$$

Если обѣ части каждаго изъ первыхъ двухъ уравненій возвести въ квадратъ и затѣмъ сложить, то получимъ

$$b^2 + c^2 = c^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = c^2,$$

т.-е. равенство, даваемое теоремой Пифагора. Наконецъ, взявъ значеніе $B = 90^0 - C$ и замѣчая, что $\sin (90^0 - C) = \cos C$, $\cos (90^0 - C) = \sin C$, можемъ первыхъ два уравненія написать еще въ новомъ видѣ

$$b = a \cos C, \quad c = a \sin C.$$

Послѣднихъ три уравненія представляютъ слѣдствія изъ первыхъ трехъ уравненій и потому не даютъ новыхъ уравненій.

Читатель найдетъ приложеніе выведенныхъ формулъ къ рѣшенію различныхъ △—ковъ въ упомянутой уже книгѣ Эмиль Борель—Тригонометрія.

V. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

1. Функціи и ихъ изображеніе.

1. Постоянныя и перемѣнныя величины. Когда намъ приходится имѣть дѣло съ величинами, то мы должны различать между ними такъ называемыя *постоянныя* и *перемѣнныя* величины. *Постоянными* называются такія величины, которыя не измѣняются, т.-е. сохраняютъ постоянно одно и то же значеніе.

Вы имѣете, напримѣръ, въ рукахъ листъ бумаги или металлическую пластинку въ формѣ квадрата. Само собою разумѣется, что сторона вашего квадрата, а также и его площадь имѣетъ опредѣленную *постоянную* величину.

Площадь циферблата часовъ имѣетъ также опредѣленную *постоянную* величину.

Перемѣнными называются, наоборотъ, такія величины, которыя измѣняютъ свое значеніе въ то время, когда мы ихъ разсматриваемъ.

Чтобы дать примѣръ перемѣнной величины, намѣтимъ на циферблатѣ часовъ положеніе, которое занимаетъ минутная

стрѣлка, указывая полдень. При движеніи минутной стрѣлки уголъ, который она образуетъ со своимъ первоначальнымъ намѣченнымъ положеніемъ, все время измѣняется, принимая послѣдовательно различныя значенія и поэтому представляетъ *перемѣнную* величину, во все время движенія часового механизма. Но какъ только часы остановятся, тогда уголъ, который образуетъ стрѣлка со своимъ положеніемъ въ полдень, становится *постоянной* величиной.

Примѣръ перемѣнной величины представляетъ температура воздуха, которую мы наблюдаемъ на градусникѣ (термометрѣ). Обыкновенно утромъ число градусовъ меньше, т.-е. температура воздуха небольшая, затѣмъ къ полудню она увеличивается, а къ вечеру опять падаетъ. Кромѣ того температура воздуха бываетъ различна въ разное время года, т.-е. измѣняется въ зависимости отъ часовъ дня, мѣсяцевъ, временъ года и поэтому является *перемѣнной* величиной.

Разстояніе между двумя неподвижными предметами, напримѣръ, между двумя вкопанными столбами, или между двумя почтовыми станціями, имѣетъ вполнѣ опредѣленную постоянную длину, т.-е. представляетъ примѣръ *постоянной* величины. Если же путешественникъ отправился по дорогѣ, то длина пройденнаго имъ пути отъ станціи измѣняется въ теченіе всего времени пока онъ идетъ, т.-е. разстояніе представляетъ перемѣнную величину. Стоитъ, однако, путешественнику остановиться, и разстояніе, отдѣляющее его отъ станціи, становится постоянной величиной, представляющей опредѣленную длину. При движеніи путешественника по дорогѣ измѣняется не только разстояніе, отдѣляющее его отъ станціи отправленія, но также и время, затрачиваемое имъ на ходьбу. Такимъ образомъ при движеніи и пространство и время являются перемѣнными величинами. Но аршинъ, верста и сажень, которыми измѣряются разстоянія, представляютъ постоянныя величины; равнымъ образомъ секунда, минута и часъ, представляющія мѣру времени, являются также постоянными величинами.

2. Опредѣленіе функцій. Изъ разсмотрѣнія перемѣнныхъ величинъ, указанныхъ въ предыдущихъ примѣрахъ, легко установить зависимости между ними.

Если путешественникъ движется, то каждому промежутку времени, затраченному на дорогу, соотвѣтствуетъ опредѣленное разстояніе, пройденное путешественникомъ.

Вообще, передвигаясь, мы затрачиваемъ для каждаго шага опредѣленное число секундъ и въ опредѣленный промежутокъ времени проходимъ опредѣленное пространство. Чѣмъ дольше

мы идемъ, тѣмъ больше становится пройденное нами пространство, другими словами, длина пройденнаго пути находится въ зависимости отъ времени, затраченнаго на ходьбу.

Мы разсматриваемъ здѣсь двѣ перемѣнныхъ величины, время и пройденное пространство. Они связаны между собой такой зависимостью, что *измѣненіе одной величины влечетъ за собой измѣненіе второй, и опредѣленному значенію первой величины соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе второй.* Такого рода зависимость между двумя перемѣнными величинами называется *функціональной* и послѣдняя перемѣнная называется въ такомъ случаѣ *функціей* первой перемѣнной.

Для каждаго момента времени пройденное пространство имѣетъ опредѣленную длину, которая измѣняется при движеніи съ теченіемъ времени. Поэтому длина пройденнаго пути представляетъ *функцію* времени.

Для каждаго тѣла опредѣленнаго вѣса, стрѣлка безмена передвигается на опредѣленную длину. Слѣдовательно, длина передвиженія стрѣлки представляетъ *функцію* вѣса тѣла.

Возвращаемся къ движенію минутной и часовой стрѣлки часовъ. Конецъ каждой изъ нихъ описываетъ дугу окружности. Каждому углу поворота стрѣлки соотвѣтствуетъ опредѣленная длина дуги, описываемой ея концомъ. Слѣдовательно, длина дуги конца стрѣлки представляетъ функцію угла, на который поворачиваетъ стрѣлка.

Данное опредѣленіе функціи мы должны понимать въ самомъ широкомъ смыслѣ приведеннаго понятія.

Такъ, мы упоминали выше, что сторона и площадь даннаго квадрата представляютъ примѣръ постоянной величины. Вообразимъ теперь рядъ квадратовъ съ различными сторонами, которыя получаются черезъ увеличеніе или уменьшеніе стороны первоначальнаго квадрата. Каждому значенію стороны соотвѣтствуетъ опредѣленный квадратъ, и всегда площадь каждаго изъ нихъ измѣряется квадратомъ его стороны, т.-е. площадь квадрата представляетъ функцію его стороны.

Чтобы удобнѣе судить объ этой функціональной зависимости, напишемъ величину стороны квадрата и соотвѣтствующей ей площади квадрата въ видѣ слѣдующей таблицы значеній, гдѣ въ первой строкѣ будутъ находиться значенія сторонъ, а во второй строкѣ, подъ ними, подписаны соотвѣтствующія значенія площадей. Будемъ называть сторону квадрата черезъ x, а его площадь — черезъ y. Разсмотримъ квадраты, стороны которыхъ представляютъ цѣлыя положительныя числа, начиная съ 1.

Получаемъ слѣдующую таблицу значеній

x	1	2	3	4	5	6	7	.	.
y	1	4	9	16	25	36	49	.	.

Изъ приведенной таблицы видно, что когда x увеличивается на одну единицу, y увеличивается послѣдовательно на 3, затѣмъ на 5, на 7, 9, 11 и т. д. Какъ бы далеко мы ни продолжали выписывать рядъ возрастающихъ значеній x, значенія y, во второй строкѣ, будутъ возрастать все быстрѣе и быстрѣе.

Разсматриваемая площадь квадрата y представляетъ такъ называемую *возрастающую функцію его стороны* x, т.-е. когда сторона квадрата увеличивается, площадь его также возрастаетъ.

Если y представляетъ функцію x, то y называется также иногда *зависимой перемѣнной*, а x—*независимой перемѣнной*. Послѣднимъ названіемъ *независимой перемѣнной* мы будемъ постоянно пользоваться.

Такія функціи, которыя, подобно квадрату, принимаютъ всебольшія и большія значенія, когда значенія независимой перемѣнной возрастаютъ, называются *возрастающими функціями*.

До сихъ поръ мы разсматривали функцію, представляющую квадратъ независимой перемѣнной, для большей наглядности, какъ величину площади квадрата, при чемъ независимая перемѣнная представляла сторону этого квадрата.

Но математика имѣетъ цѣлью разсматривать законы счисленія въ самомъ общемъ видѣ. Поэтому будемъ разсматривать нашу функцію въ самомъ общемъ предположеніи, не ограничиваясь условіемъ, что она представляетъ площадь квадрата, а будемъ опредѣлять ее какъ *квадратъ*, или *вторую* степень независимой перемѣнной. Благодаря такому, болѣе общему, предположенію, мы получаемъ право, напримѣръ, разсматривать значенія нашей функціи, соотвѣтствующія отрицательнымъ значеніямъ независимой перемѣнной. Само собою разумѣется, что такое предположеніе не имѣло бы смысла, если бы разсматриваемая функція представляла только площадь квадрата.

Станемъ давать x отрицательныя возрастающія значенія. Отрицательныя числа возрастаютъ, когда *абсолютное* [1]) значеніе ихъ становится меньше.

Выпишемъ опять въ двѣ строчки возрастающія цѣлыя отрицательныя значенія x и соотвѣтствующія значенія y.

[1]) См. стр. 26.

Мы получаемъ

x	.	.	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	.	.	49	36	25	16	9	4	1

Такъ какъ квадратъ отрицательнаго числа представляетъ положительное число, то послѣдняя таблица показываетъ, что, при возрастаніи отрицательныхъ численныхъ значеній x, численныя значенія функціи y уменьшаются.

Мы называемъ *убывающей* такую функцію, численныя значенія которой становятся все меньше и меньше, когда значенія независимой перемѣнной все увеличиваются.

Итакъ, функція, представляющая квадратъ независимой перемѣнной, представляетъ примѣръ возрастающей функціи, для положительныхъ значеній независимой перемѣнной и одновременно — убывающей функціи для отрицательныхъ значеній независимой перемѣнной величины.

Покажемъ, какъ выражаются функціи при помощи сокращенныхъ математическихъ обозначеній.

Пусть x представляетъ перемѣнную величину, каждому опредѣленному значенію которой соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе второй перемѣнной величины y, представляющей функію x.

Предположимъ, напримѣръ, что точка движется по прямой линіи и проходитъ въ каждую секунду времени равныя пространства, которыя мы обозначаемъ черезъ a.

Въ такомъ случаѣ очевидно, что въ продолженіе x секундъ времени точка пройдетъ пространство y, равное ax, т.-е,

$$y = ax.$$

Составленное равенство представляетъ математическое выраженіе разсматриваемой функціи x, или, какъ говорятъ, *написанное равенство представляетъ уравненіе* [1]), *опредѣляющее разсматриваемую функцію.*

Мы обозначали выше черезъ y площадь квадрата, сторона котораго равнялась x. Поэтому площадь этого квадрата равна x^2, т.-е. y и x^2 выражаютъ одну и ту же величину. Поэтому мы имѣемъ равенство

$$y = x^2,$$

которое и представляетъ уравненіе, опредѣляющее разсматриваемую функцію.

---

[1]) См. стр. 41.

Когда существуетъ какая-либо зависимость между двумя перемѣнными x и y, то мы имѣемъ право выбрать любую изъ нихъ за независимую перемѣнную, а вторую перемѣнную разсматривать какъ ея функцію. Установился обычай обозначать независимую перемѣнную черезъ x и функцію ея черезъ y.

Въ общемъ видѣ, когда желаютъ выразить, что перемѣнная y является функціей x, пользуются слѣдующимъ условнымъ обозначеніемъ и пишутъ

$$y = f\ (x).$$

Вмѣсто f очень часто пишутъ F, Φ и т. п. Если одновременно разсматривается нѣсколько различныхъ функцій, то для обозначенія ихъ употребляются различные буквенные знаки. Наконецъ, если требуется указать, что перемѣнныя x и y связаны между собой функціональной зависимостью, пользуются также слѣдующимъ обозначеніемъ

$$F\ (x,\ y) = 0.$$

Каждое изъ написанныхъ равенствъ представляетъ собой уравненіе между двумя неизвѣстными величинами. Однако, если одной изъ перемѣнныхъ величинъ, положимъ x, мы дадимъ опредѣленное значеніе, то разсматриваемое уравненіе, представляя одно уравненіе съ одной неизвѣстной y, даетъ вполнѣ опредѣленное значеніе ея, представляющее значеніе функціи, соотвѣтствующее данному значенію независимой перемѣнной.

Существуетъ неограниченное число самыхъ разнообразныхъ зависимостей или законовъ, которыми опредѣляется значеніе зависимой перемѣнной y по даннымъ значеніямъ x. Одна изъ главныхъ задачъ математики состоитъ въ изученіи функцій.

Если читатель имѣетъ понятіе о *тригонометріи* [1]), то разсматриваемыя въ ней, такъ называемыя тригонометрическія величины представляютъ примѣры функцій, которыя называются круговыми функціями. Изученіе свойствъ и приложеній этихъ функцій можетъ дать понятіе вообще о задачѣ изученія функцій.

3. Графическое представленіе функцій. Для представленія хода измѣненія функцій, вмѣсто составленія таблицъ ихъ значеній, удобнѣе пользоваться пріемомъ графическаго (или геометрическаго) представленія функцій. Онъ состоитъ въ томъ, что числовыя величины независимой перемѣнной и ея функціи изображаются графически (геометрически) отрѣзками прямой линіи.

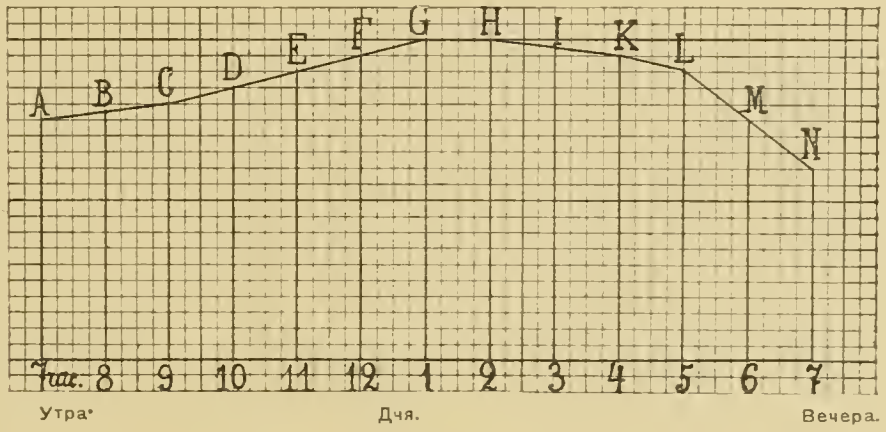
---

[1]) См. стр. 111—115.

Такой способъ изученія зависимости между двумя перемѣнными величинами особенно удобенъ, когда рядъ значеній двухъ величинъ, соотвѣтствующихъ другъ другу, выводится изъ наблюденій или изъ опытовъ. Напримѣръ, наблюдая на градусникѣ температуру воздуха въ различные часы дня, мы составимъ слѣдующую таблицу:

Часы.	Температура.	Часы.	Температура.
7 утра	15°	2 дня	20°
8 »	15°,5	3 »	19°,5
9 »	16°	4 »	19°
10 »	17°	5 »	18°
11 »	18°	6 веч.	15°
12 дня	19°	7 »	12°
1 »	20°		

Для наглядnаго представленія произведенныхъ наблюденій возьмемъ листъ клѣтчатой бумаги, какъ на чертежѣ 1-омъ. Условимся продолжительность одного часа времени представлять графически отрѣзкомъ, равнымъ ширинѣ четырехъ клѣтокъ.



Черт. 1.

Намѣтимъ прежде всего на горизонтальной прямой равноотстоящія другъ отъ друга точки, соотвѣтствующія часамъ наблюденія термометра, отъ 7 часовъ утра до 7 вечера. Затѣмъ въ указанныхъ точкахъ возстановимъ перпендикуляры къ основанію. Условимся высоту каждой клѣтки считать за одинъ градусъ и на каждомъ изъ этихъ перпендикуляровъ отложимъ столько клѣтокъ, сколько градусовъ показано въ нашей таблицѣ въ намѣченные часы.

Такимъ образомъ получается рядъ точекъ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M* и *N*. Соединяя ихъ отрѣзками прямыхъ линій, получаемъ ломанную кривую линію, которая даетъ приближенное представленіе о томъ, какъ измѣнялась температура воздуха въ теченіе дня наблюденій. Отъ 7 часовъ утра температура продолжала возрастать до 1 часу дня, между 1 часомъ и 2 часами дня температура удерживалась на одной высотѣ и затѣмъ стала падать; при этомъ быстрѣе всего температура убывала отъ 5 часовъ дня до 7 часовъ вечера.

Чтобы дать болѣе точное представленіе объ измѣненіи температуры, слѣдовало бы сдѣлать еще промежуточныя наблюденія черезъ каждые полчаса, четверть часа или даже каждыя пять минутъ. Результаты этихъ наблюденій опредѣлили бы въ нашемъ чертежѣ еще рядъ промежуточныхъ точекъ между первоначальными. Соединяя затѣмъ послѣдовательно всѣ полученныя точки отрѣзками прямыхъ линій, мы получили бы болѣе точную кривую линію, показывающую измѣненія температуры воздуха въ теченіе разсматриваемаго дня.

На изложенныхъ соображеніяхъ основано устройство пишущихъ или такъ называемыхъ регистрирующихъ приборовъ для записыванія результатовъ наблюденій, напримѣръ, температуры воздуха. Эти приборы даютъ непрерывную кривую линію, которая опредѣляетъ для каждаго момента времени значеніе наблюдаемой величины. Устройство приборовъ состоитъ въ томъ, что разграфленная бумага наложена на цилиндръ, вращающійся при помощи часового механизма. Съ бумагой соприкасается перо и чертитъ на ней кривую при вращеніи цилиндра. Въ свою очередь, перо соединяется стержнемъ съ приборомъ, который воспринимаетъ наблюдаемыя явленія, напримѣръ, температуру воздуха, атмосферное давленіе и т. д. Малѣйшія измѣненія наблюдаемыхъ величинъ передаются стержнемъ на перо, которое механически отмѣчаетъ ихъ на бумагѣ.

Перо описаннаго прибора чертитъ непрерывную кривую на бумагѣ. Между тѣмъ при графическомъ изображеніи кривой температуры на чертежѣ 1-мъ мы намѣчали только рядъ точекъ, которыя затѣмъ произвольно соединили прямыми линіями. Если намѣченныя точки расположены достаточно близко другъ къ другу, то, соединяя ихъ отрѣзками прямыхъ линій или кривыми линіями такъ, чтобы полученная кривая представляла непрерывную линію, мы можемъ составить довольно точно искомое геометрическое изображеніе разсматриваемой функціи.

Очень часто, для практической надобности, бываетъ достаточно знать значенія перемѣнной, которыя она принимаетъ для

опредѣленныхъ значеній независимой перемѣнной. Такъ, напримѣръ, врачи при лѣченіи тяжелыхъ болѣзней составляютъ графики температуры больного, измѣряемой въ опредѣленные часы 3 или 4 раза въ день.

Благодаря графическому представленію температуры, одного взгляда на кривую температуры достаточно, чтобы судить, какія происходятъ измѣненія въ состояніе здоровья больного.

При составленіи чертежа 1-го, приходилось имѣть дѣло съ температурой воздуха, измѣнявшейся отъ 15° до 20°, и затѣмъ уменьшавшейся до 12°. Всѣ эти температуры представлялись положительными числами. Но предположимъ, намъ пришлось бы составлять кривую температуры зимняго дня, когда бываетъ морозъ въ нѣсколько градусовъ, которые измѣряются отрицательными числами. Такъ, напримѣръ, если морозъ—въ 2°, то говорятъ, что температура воздуха ровна—2°. Въ этомъ случаѣ, чтобы отличать градусы мороза отъ тепла, откладываютъ отрѣзки, имѣющіе столько клѣтокъ въ длину, сколько градусовъ имѣетъ температура, не вверхъ отъ прямой, гдѣ намѣчены часы, но внизъ отъ нея.

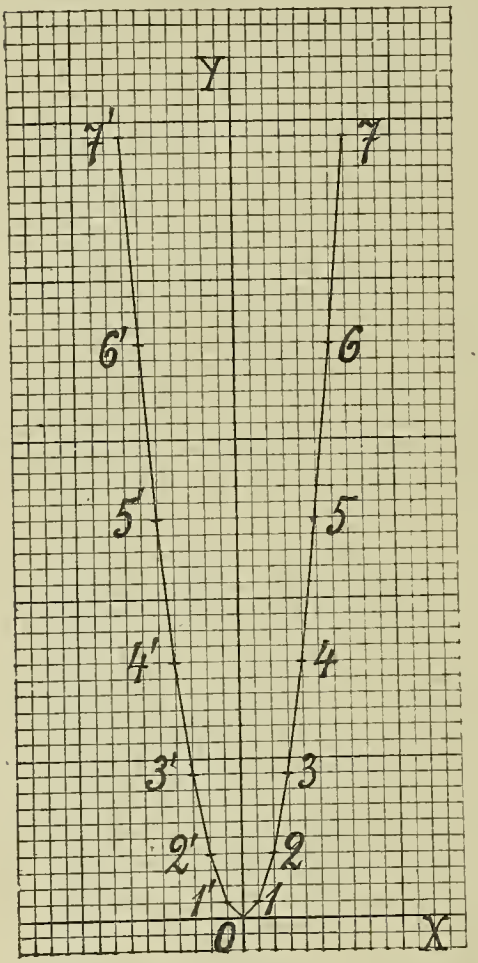
Такое графическое построеніе отрицательной температуры вполнѣ соотвѣтствуетъ тому, какъ условливаются въ математикѣ представлять отрѣзками прямой линіи положительныя и отрицательныя значенія какой-либо величины (см. стр. 103). Для этого беремъ какую-либо прямую линію, выбираемъ на ней опредѣленную точку (такъ называемое *начало*), и положительныя величины представляемъ отрѣзками, которые откладываются по нашей прямой линіи вправо отъ начала; отрицательныя же величины откладываемъ по той же прямой, но только влѣво отъ начала. При этомъ, очевидно, откладываемые отрѣзки должны имѣть столько единицъ длины, сколько единицъ своего измѣренія имѣетъ величина, значенія которой мы изображаемъ отрѣзками.

Если бы на нашемъ чертежѣ 1-омъ, мы пожелали нанести температуру воздуха въ утренніе часы, напримѣръ, въ 6 или 5 часовъ утра, т.-е. болѣе ранніе сравнительно съ 7-ю часами утра, то понятно, что мы должны продолжить прямую, на которой намѣчали часы, влѣво отъ точки, гдѣ отмѣчены 7 часовъ. Принявъ эту точку за начало, мы будемъ намѣчать влѣво отъ нея всѣ часы до 7 часовъ утра. Что же касается температуры, то она будетъ такъ же, какъ и раньше, представляться перпендикулярами къ послѣдней прямой.

Говоря до сихъ поръ о геометрическомъ изображеніи функцій, мы брали такъ называемыя *эмпирическія* функціи, для которыхъ мы не знаемъ точнаго математическаго выраженія, но

можемъ находить только изъ наблюденій или изъ опытовъ отдѣльныя числовыя значенія, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ независимой перемѣной.

Однако указанныя построенія легко примѣняются къ какимъ угодно функціямъ, опредѣляемымъ уравненіями.



Черт. 2.

Возьмемъ, напримѣръ, указанную выше функцію

$$y = x^2.$$

Проводимъ ось OX (черт. 2), которую принимаемъ за основаніе. Ширину каждой клѣтки, вдоль этой оси, принимаемъ за изображеніе единицы значенія перемѣнной x, а высоту клѣтки (равную ея ширинѣ) принимаемъ за единицу значенія перемѣнной y. Откладываемъ по оси OX значенія независимой перемѣнной x, указанныя въ первой строкѣ таблицы на страницѣ 120-ой; изъ полученныхъ, такимъ образомъ, точекъ на оси OX возстановляемъ къ ней перпендикуляры, длина которыхъ (въ принятыхъ нами единицахъ длины) представляетъ значенія y-овъ, указанныя во второй строкѣ той же таблицы. При помощи сдѣланныхъ построеній опредѣляется рядъ точекъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...,

который мы можемъ продолжить какъ угодно далеко.

Откладывая такимъ же образомъ указанныя во второй таблицѣ, на страницѣ 121-ой, отрицательныя значенія x влѣво отъ точки O и возстановивъ изъ нихъ перпендикуляры, равные соотвѣтствующимъ значеніямъ y, мы получаемъ второй рядъ точекъ

1', 2', 3', 4', 5', 6', 7',...,

который также можетъ быть продолженъ какъ угодно далеко. Точки послѣдняго ряда расположены соотвѣтственно на одинаковой высотѣ съ прежними точками. Если изъ точки O построимъ прямую OY, перпендикулярную къ оси OX, то точки второго ряда находятся на равномъ разстояніи отъ оси OY съ точками

перваго ряда, или, какъ говорятъ, *симметричны* съ ними относительно оси OY.

Соединяя отрѣзками прямыхъ линій найденныя точки, мы получаемъ ломанную кривую, которая, однако, очень мало отличается отъ непрерывной кривой. Изломы въ точкахъ, опредѣленныхъ изъ даннаго выраженія функціи, настолько незначительны, что, несмотря на небольшое число намѣченныхъ точекъ, начерченная на нашемъ чертежѣ кривая линія производитъ впечатлѣніе непрерывной линіи.

Мы могли бы уменьшить масштабъ (т.-е. размѣръ принятой единицы длины) или опредѣлить еще рядъ промежуточныхъ точекъ кривой. Тогда полученная ломанная линія представляла бы достаточно точно кривую линію, которая называется *параболой*. Я говорю *достаточно точно*, потому что, если бы мы даже и сумѣли начертить параболу непрерывнымъ движеніемъ, то и тогда полученная кривая представляла бы только приближенное изображеніе нашей кривой, вслѣдствіе неизбѣжныхъ погрѣшностей, которыя вытекаютъ изъ несовершенства чертежныхъ приборовъ и толщины черты, наносимой карандашомъ или перомъ.

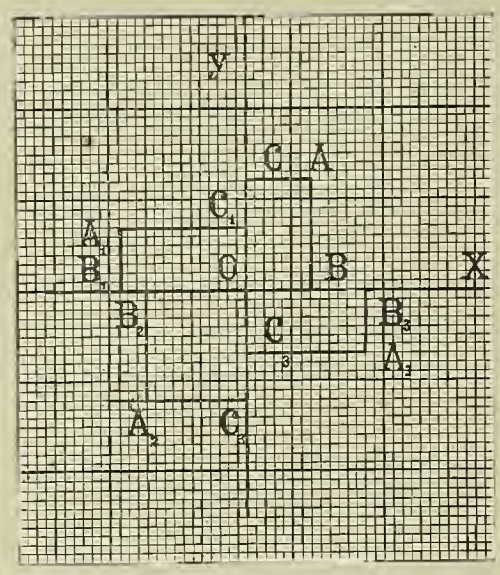
Каждый изъ концовъ параболы можетъ быть продолженъ какъ угодно далеко (они простираются до безконечности), и эта парабола представляетъ наглядное геометрическое изображеніе нашей функціи. При его помощи, для каждаго значенія независимой перемѣнной x, мы получаемъ графически достаточно точно соотвѣтствующую величину функціи y. Наконецъ, полученная парабола показываетъ наглядно, что, для всѣхъ положительныхъ значеній x, функція y возрастающая, а для отрицательныхъ значеній x функція y убывающая.

2. Координаты на плоскости. Кривыя линіи.

1. Декартова система координатъ. Аналитическая геометрія разсматриваетъ общіе способы изученія и рѣшенія геометрическихъ вопросовъ при помощи вычисленій. Эти вычисленія основываются на разсмотрѣніи *системъ координатъ*. Простѣйшая изъ нихъ, которую мы и приведемъ, была введена Декартомъ, извѣстнымъ французскимъ философомъ и математикомъ, жившимъ въ XVII столѣтіи.

Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныхъ оси OX и OY (черт. 3). Принимаемъ за начало каждой изъ обѣихъ осей точку ихъ пересѣченія O, которая называется *началомъ координатъ*. Оси OX и OY называются *координатными осями*. Положительныя направленія на оси OX считаемъ вправо отъ точки O, а на

оси OY—вверхъ отъ O. Направленіе отъ начала O влѣво представляетъ отрицательное направленіе оси OX, а направленіе отъ начала O внизъ является отрицательнымъ направленіемъ оси OY. Возьмемъ точку A, расположенную въ углу между положительными направленіями обѣихъ осей, и опустимъ изъ нея перпендикуляры, AB на ось OX и AC—на ось OY.



Черт. 3.

Будемъ считать размѣры квадратной клѣтки за единицу длины. Въ такомъ случаѣ получаемъ $OB=CA=7$, $OC=BA=12$.

Число 7 называется *абсциссой* точки A, а число 12—*ординатой* точки A. Оба числа вмѣстѣ называются *координатами* точки A.

Такъ какъ абсцисса откладывается по оси OX, то послѣдняя называется также *осью абсциссъ*, и потому же самому ось OY называется *осью ординатъ*.

Возьмемъ точку A_1, расположенную въ углу между отрицательнымъ направленіемъ оси OX и положительнымъ направленіемъ оси OY. Опускаемъ изъ точки A_1 перпендикуляръ A_1B_1 на ось OX и перпендикуляръ A_1C_1—на ось OY. Очевидно, что точка A_1 имѣетъ *абсциссой* число—14, а *ординатой* число—7.

Возьмемъ, наконецъ, точки A_2 и A_3, опускаемъ изъ нихъ перпендикуляры на оси OX и OY. *Абсцисса* точки A_2 равна числу—11, а *ордината*—числу 12. *Координаты* точки A_3 представляются соотвѣтственно числами 13 *(абсцисса)* и—7 *(ордината)*.

Изъ сказаннаго видно, какъ опредѣляются координаты любой точки на плоскости относительно данной системы координатъ.

Такъ же легко рѣшается вопросъ, какъ построить точку относительно данной системы координатъ, если координаты точки даны. Для этого достаточно провести двѣ параллельныхъ прямыхъ, одну параллельную оси OX, на разстояніи отъ нея, равномъ данной ординатѣ точки, а вторую параллельную оси OY на разстояніи отъ нея, равномъ данной абсциссѣ точки. Искомая точка находится на пересѣченіи проведенныхъ прямыхъ.

Въ аналитической геометріи говорятъ, что точка дана, если координаты ея даны, относительно какой-либо системы коорди-

нать, и точка неизвѣстна, если координаты ея должны быть найдены.

Если дана зависимость между двумя перемѣнными x и y, напримѣръ,

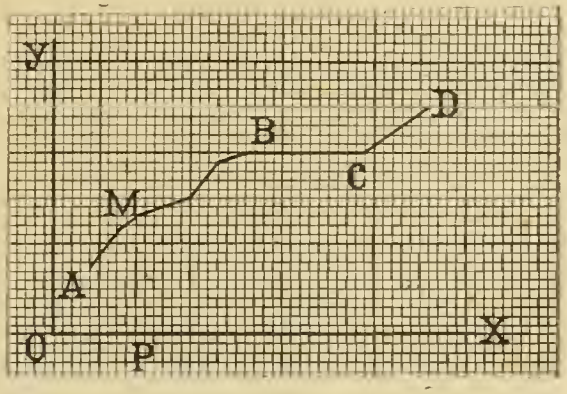
$$y=\frac{1}{x}\ ,\ \text{или}\ y=x^3\ ,$$

то мы разсматриваемъ x и y какъ координаты нѣкоторой точки относительно Декартовой системы координатъ. Давая независимой перемѣной x какое-либо данное численное значеніе, мы находимъ изъ написаннаго уравненія опредѣленное значеніе зависимой перемѣнной y, и опредѣляемъ, такимъ образомъ, точку на плоскости. Нѣтъ надобности повторять здѣсь разсужденій, которыми мы доказывали выше (см. стр. 126—127). что каждая функція, опредѣляемая уравненіемъ, представляется геометрически кривой линіей. Поэтому очевидно, что *уравненіе съ двумя перемѣнными x и y опредѣляетъ кривую линію на плоскости.*

Мы знаемъ также, какъ можно построить приближенно эту кривую по точкамъ. Такъ, напримѣръ, первое изъ уравненій представляетъ такъ называемую *равностороннюю гиперболу*, состоящую изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей, одной, соотвѣтствующей положительнымъ x, другой—отрицательнымъ x. Второе уравненіе представляетъ сплошную кривую линію, называемую *кубической параболой*. Читатель можетъ легко самъ построить ихъ на клѣтчатой бумагѣ.

Передъ читателемъ естественно возникаетъ другой вопросъ: пусть имѣемъ какую-либо кривую $ABCD$ на плоскости (черт. 4), возможно ли составить уравненіе, представляющее начерченную кривую?

Возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныхъ оси OX и OY въ плоскости данной кривой линіи; изъ какой-либо точки P на оси OX возставляемъ къ ней перпендикуляръ до пересѣченія съ данной кривой $ABCD$ въ точкѣ M. Обозначимъ черезъ x и y числа, выражающія соотвѣтственно величину координатъ точки M (OP и PM). Любой точкѣ на оси OX, т.-е любому значенію x, соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе y; такъ, напримѣръ, абсциссѣ точки M, равной 9, на чертежѣ соотвѣтствуетъ ордината PM,

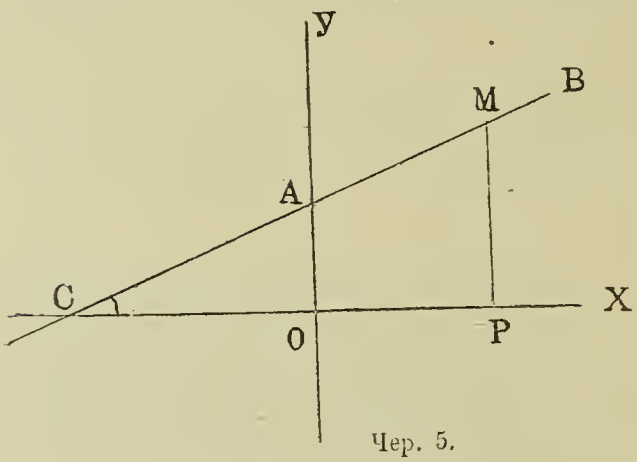


Чер. 4.

равная 13. Значеніе y опредѣляетъ разстояніе точки M данной кривой линіи отъ оси OX. Такимъ образомъ, благодаря нашей кривой $ABCD$, каждому значенію перемѣнной x соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе перемѣнной y, т.-е. (см. стр. 119) x и y связаны между собой функціональной зависимостью, или y является функціей независимой перемѣнной x. Поэтому мы приходимъ къ новому заключенію, *что каждая кривая линія на плоскости выражаетъ функціональною зависимостью между двумя перемѣнными x и y.*

Практическое рѣшеніе вопроса о составленіи между перемѣнными x и y уравненія, опредѣляющаго данную кривую линію, зависитъ отъ слѣдующаго. Если происхожденіе или геометрическія свойства кривой $ABCD$ выражаются какимъ-либо опредѣляемымъ геометрическимъ закономъ, то въ такомъ случаѣ задача заключается въ составленіи уравненія между (ср. стр. 138) координатами точки, выражающаго этотъ законъ. Мы дадимъ сейчасъ нѣсколько примѣровъ такого составленія уравненій кривыхъ линій.

Если же данная кривая $ABCD$ представляетъ рядъ отдѣльныхъ точекъ, не подчиненныхъ какому-либо опредѣленному закону, то въ этомъ случаѣ составленіе уравненія данной кривой линіи представляетъ такъ называемую задачу *интерполированія*, или вычисленія уравненія кривой линіи, проходящей черезъ данныя точки. Послѣдней задачѣ посвящается также отдѣльная статья (см. стр. 142).



Чер. 5.

2. Прямая линія. Составимъ уравненіе прямой линіи AB (чер. 5) относительно системы координатъ XOY. Назовемъ $OP=x$ и соотвѣтствующую ординату $PM=y$. Такъ какъ $\triangle PMC$ подобенъ [1]) $\triangle OAC$, то сходственныя стороны ихъ пропорціональны [2]), и мы получаемъ, что

$$\frac{PM}{OA}=\frac{CP}{CO}, \text{ или } \frac{y}{OA}=\frac{x+CO}{CO}, \text{ т.-е.}$$

$$y=\frac{OA}{CO}\,x+OA.$$

[1]) См. стр. 80. [2]) См. стр. 80.

Очевидно, что прямая AB отсѣкаетъ постоянные отрѣзки OA и CO отъ координатныхъ осей. Называя численную величину отрѣзковъ $OA = c$, $CO = b$, представимъ послѣднее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$y = \frac{c}{b}\, x + c, \text{ или } y = m\, x + c, \quad (1)$$

при чемъ m обозначаетъ величину отношенія $\frac{c}{b}$. Такъ какъ въ прямоугольномъ $\triangle$—кѣ OAC отрѣзки c и b представляютъ катеты и катетъ c лежитъ противъ угла C [1]), то величина m выражается слѣдующимъ образомъ черезъ уголъ C

$$m = \frac{c}{b} = tgC.$$

Уголъ C считается за положительный отъ оси OX къ оси OY, т.-е. въ сторону противоположную вращенію часовой стрѣлки.

Полученная зависимость между координатами x и y любой точки M, взятой совершенно произвольно на прямой AB, представляетъ искомое уравненіе прямой линіи AB. Постоянные коэффиціенты входящіе въ уравненіе, m и c, называются *параметрами* прямой линіи, опредѣляющими ея положеніе на плоскости. Параметръ m называется *угловымъ коэффиціентомъ* прямой, c — *ординатой въ началѣ*.

Отмѣтимъ нѣсколько частныхъ случаевъ. Если прямая AB проходитъ черезъ начало координатъ O, т.-е. точка A совпадаетъ съ O, то $c = o$, и уравненіе прямой (1) становится

$$y = m\, x.$$

Если прямая дѣлитъ $\angle XOY$ пополамъ, т.-е. $\angle C = 45°$, тогда $tg\ 45° = 1$ [2]), и уравненіе прямой принимаетъ видъ

$$y = x.$$

Если прямая дѣлитъ пополамъ $\angle COY$, т.-е. $\angle C = 135°$, то $tg\ 135° = -1$ (см. стр. 114 и 115) уравненіе прямой становится

$$x = -x.$$

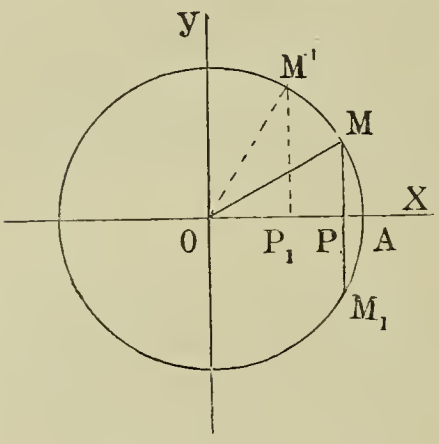
Если прямая параллельна оси OX и проходитъ отъ нея на разстояніи $OA = c$, тогда, очевидно, уравненіе такой прямой представляется равенствомъ $y = c$. Если прямая параллельна оси OY и проходитъ на разстояніи отъ нея равномъ b, то представляется уравненіемъ $x = b$.

Кромѣ выведеннаго уравненія прямой линіи очень часто пользуются уравненіями прямой линіи другого вида, при чемъ параметрами прямой линіи служатъ новыя величины. Чтобы познакомиться съ ними отсылаемъ читателя къ книгѣ Д. Горячева «Основанія аналитической геометріи на плоскости» (стр. 25).

[1]) См. стр. 117. [2]) См. стр. 115.

Очень легко доказать, что всякое уравненіе первой степени относительно послѣднихъ, двухъ перемѣнныхъ x и y представляетъ прямую линію.

3. Окружность. Чтобы составить уравненіе данной окружности, описанной изъ центра O (чер. 6) радіусомъ OA, замѣтимъ, что каждая изъ точекъ окружности $M, M_1 \ldots$ находится отъ центра O на данномъ разстояніи OA, которое назовемъ черезъ R, т.-е.



Чер. 6.

$$OM = OM' = \ldots = OA = R.$$

Строимъ координаты точки M ($OP = x$ и $PM = y$). Разстояніе точки M отъ центра O представляетъ гипотенузу прямоугольнаго $\triangle OMP$, катетами котораго служатъ координаты x и y. Поэтому, по теоремѣ Пифагора (см. стр. 81), мы получаемъ

$$OM^2 = OP^2 + PM^2, \text{ или } OM^2 = x^2 + y^2.$$

Такъ какъ послѣднее разстояніе OM должно быть постоянной величиной R для любой точки окружности, то, слѣдовательно,

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Послѣднее равенство и представляетъ искомое уравненіе. Мы можемъ написать полученное уравненіе также слѣдующимъ образомъ

$$y^2 = R^2 - x^2, \text{ или } y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Двойной знакъ при радикалѣ показываетъ, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ два разныхъ значенія y, одно положительное и второе отрицательное. Положительное значеніе y представляетъ ординату PM, а отрицательное y — равную и прямо противоположную по знаку ординату PM_1 точки M_1.

Поэтому, если бы мы пожелали разсматривать только часть дуги окружности, соотвѣтствующую положительнымъ ординатамъ, то должны были бы взять уравненіе съ однимъ знакомъ $+$ при радикалѣ.

4. Эллипсъ. *Эллипсомъ называется кривая линія, всѣ точки которой обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что сумма разстояній ихъ отъ двухъ данныхъ точекъ имѣетъ постоянную величину.*

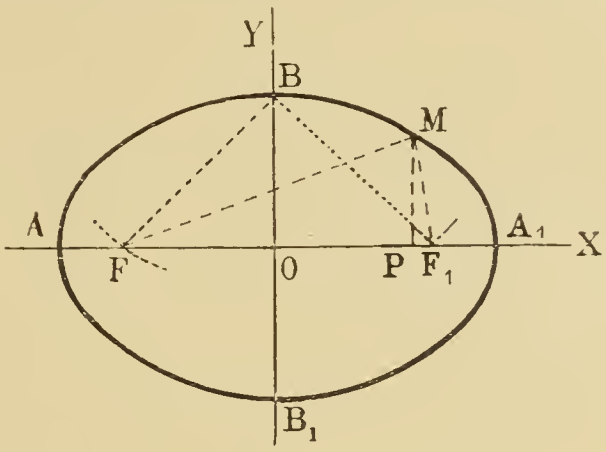
Эти двѣ данныхъ точки называются *фокусами* эллипса. На чертежѣ 7-омъ представленъ эллипсъ, фокусами котораго служатъ точки F и F_1. Прямая AA_1 называется *большой осью*, а BB_1—*малой осью* эллипса. Относительно обѣихъ осей точки эл-

липса расположены симметрично. Точка O, дѣлящая пополамъ разстояніе между фокусами, называется *центромъ*, а точки A, A_1, B и B_1—*вершинами эллипса*.

Если назовемъ черезъ M какую-либо точку эллипса, то отрѣзки FM и F_1M представляютъ разстоянія ея отъ фокусовъ; сумма этихъ разстояній равна постоянной величинѣ $2a$, т.-е.

$$FM+F_1M=2a,$$

при чемъ $2a$ представляетъ длину большой оси эллипса AA_1.



Чер. .

Пользуясь этимъ опредѣленіемъ эллипса, легко начертить его непрерывнымъ движеніемъ. Для этого возьмемъ нить данной длины $2a$, и одинъ конецъ ее укрѣпимъ неподвижно въ фокусѣ F, а другой—въ фокусѣ F_1. Если затѣмъ, захвативъ нить концомъ пера или остріемъ карандаша, натянемъ ее и будемъ двигать перо или нашъ карандашъ такъ, чтобы обѣ части нити оставались всегда натянутыми, то пишущее остріе начертитъ эллипсъ.

Даннымъ опредѣленіемъ эллипса легко воспользоваться для вывода уравненія эллипса. Принимаемъ центръ эллипса за начало координатъ O, а оси эллипса за оси координатъ OX и OY. Назовемъ координаты OP и PM какой-либо точки эллипса M соотвѣтственно черезъ x и y, черезъ c—величину каждаго изъ двухъ равныхъ отрѣзковъ FO и OF_1, на которые дѣлится разстояніе FF_1 точкой O. Въ прямоугольномъ треугольникѣ FMP одинъ катетъ FP равенъ $c+x$, а другой катетъ PM равняется y. Поэтому гипотенуза FM разсматриваемаго прямоугольнаго треугольника, на основаніи теоремы Пифагора (стр. 81), опредѣляется слѣдующимъ образомъ

$$FM^2=(c+x)^2+y^2, \text{ или } FM=\sqrt{(c+x)^2+y^2},$$

при чемъ передъ радикаломъ берется знакъ $+$, такъ какъ разсматривается только абсолютная величина разстоянія точки M отъ фокуса F.

Во второмъ прямоугольномъ треугольникѣ F_1MP одинъ изъ катетовъ PF_1 представляется разностью $c-x$, а второй катетъ PM равенъ y. Поэтому гипотенуза послѣдняго треугольника,

представляющая второе разсматриваемое разстояніе F_1M, выражается слѣдующей формулой

$$F_1M = \sqrt{(c-x)^2+y^2}.$$

Согласно съ даннымъ выше опредѣленіемъ эллипса, сумма разстояній $FM + F_1M$ должна, для каждой точки эллипса (x, y), равняться данной величинѣ $2a$. Поэтому, подставляя въ выраженіе этой суммы вычисленныя нами значенія ея слагаемыхъ и приравнивая ихъ сумму $2a$, приходимъ къ слѣдующему равенству

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a. \qquad (2)$$

Полученное уравненіе и должно представлять нашъ эллипсъ. Послѣднее уравненіе, однако, упрощается при помощи такъ называемаго *дѣйствія избавленія отъ радикаловъ*, входящихъ въ полученное уравненіе.

Съ этою цѣлью, умножая обѣ части послѣдняго равенства (2) на разность радикаловъ $\sqrt{(c+x)^2+y^2} - \sqrt{(c-x)^2+y^2}$, получаемъ въ первой части нашего равенства произведеніе суммы на разность тѣхъ же радикаловъ. Это произведеніе равно разности квадратовъ нашихъ радикаловъ [1]), т.-е. равняется выраженію

$$\left[\sqrt{(c+x)^2+y^2}\right]^2 - \left[\sqrt{(c-x)^2+y^2}\right]^2,$$

которое, послѣ возведенія въ квадратъ его частей, сокращенія подобныхъ членовъ и проведенія, становится равнымъ

$$4cx.$$

Поэтому, раздѣляя обѣ части преобразованнаго равенства (2) на $2a$ и помѣщая вторую часть его на первое мѣсто, получаемъ слѣдующее равенство

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} - \sqrt{(c-x)^2+y^2} = \frac{2c}{a}x.$$

Прибавляя части послѣдняго равенства къ соотвѣтственнымъ частямъ уравненія (2), и раздѣляя на 2 обѣ части полученнаго равенства, находимъ уравненіе, которое заключаетъ одинъ только радикалъ

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x.$$

Чтобы избавиться отъ радикала въ послѣднемъ уравненіи, остается возвести во вторую степень каждую изъ его частей. Мы получаемъ, такимъ образомъ, уравненіе

$$(c+x)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2.$$

---

[1]) См. стр. 39—40.

Написавъ значенія квадратовъ перваго и послѣдняго двухчлена и совершивъ сокращенія и приведенія подобныхъ членовъ, представляемъ наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{(a^2-c^2)}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2.$$

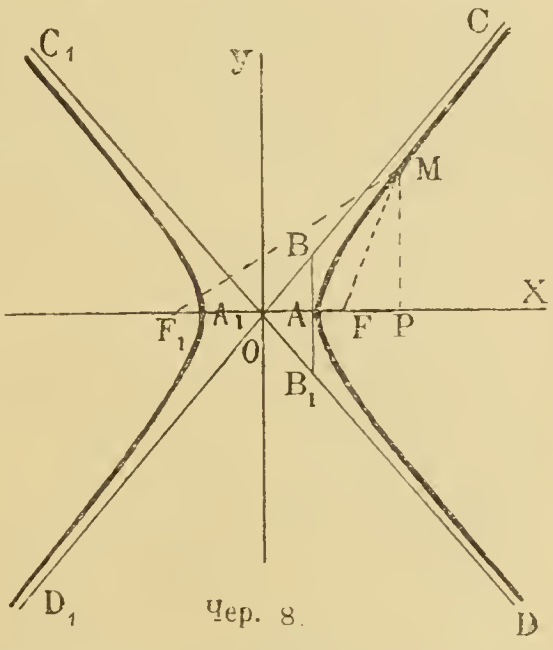
Наконецъ, раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на разность a^2-c^2, получаемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

гдѣ введено слѣдующее обозначеніе

$$a^2-c^2=b^2, \text{ или } c^2+b^2=a^2. \qquad (3)$$

Эта послѣдняя зависимость между отрѣзкомъ c и полуосями эллипса a и b показываетъ, какъ построить фокусы F и F_1 эллипса съ данными полуосями a и b. Изъ нашей зависимости (3) видно, что полуось a представляетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катетами котораго служатъ полуось b и отрѣзокъ c. Поэтому, если вокругъ вершины B (или B_1), какъ около центра, опишемъ радіусомъ равнымъ a, дугу окружности, то она пересѣчетъ большую ось эллипса въ его фокусахъ F и F_1. Это слѣдуетъ изъ того, что въ прямоугольномъ треугольникѣ OBF гипотенуза BF равна a, катетъ OB равенъ b, слѣдовательно, въ силу зависимости $c^2+b^2=a^2$, второй катетъ OF равенъ c. Такимъ же образомъ заключаемъ изъ разсмотрѣнія треугольника OBF_1, что отрѣзокъ OF_1 тоже равенъ c.



Чер. 8.

5. Гипербола. Кривая линія, которая называется *гиперболой*, представлена на черт. 8-омъ. Эта кривая опредѣляется тѣмъ свойствомъ, что *разность разстояній каждой ея точки отъ двухъ фокусовъ F и F_1 имѣетъ постоянную величину*, равную отрѣзку AA_1, который назовемъ черезъ $2a$.

Легко воспользоваться даннымъ опредѣленіемъ гиперболы для черченія ея непрерывнымъ движеніемъ. Съ этою цѣлью возьмемъ два неравныхъ отрѣзка нити, разность которыхъ должна равняться данной длинѣ $2a$. По одному концу каждаго изъ этихъ отрѣзковъ укрѣпимъ въ одномъ изъ данныхъ фокусовъ

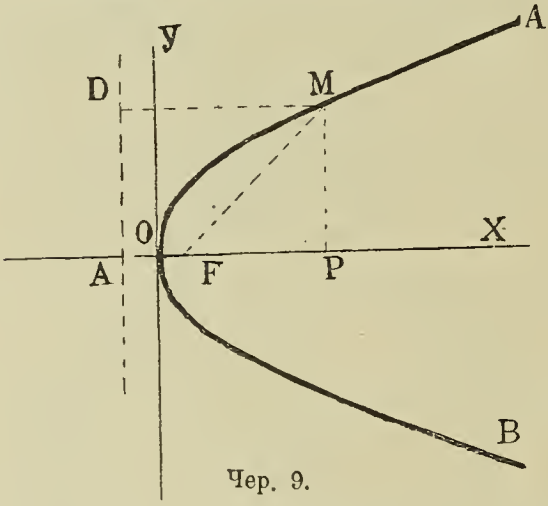
гиперболы. Затѣмъ, перекинувъ каждый изъ отрѣзковъ нити черезъ чертящее остріе, выравняемъ ихъ два свободныхъ конца и зажмемъ имъ вмѣстѣ въ одной рукѣ. Ведя другой рукой чертящее остріе такъ, чтобы оба конца нити были натянуты, мы будемъ чертить гиперболу, при чемъ, конечно, вторая рука, сжимающая свободные концы нитей, должна также передвигаться за чертящей рукой, натягивая нити.

Гипербола представляетъ незамкнутую кривую линію и состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ кривыхъ линій, или, какъ говорятъ, вѣтвей, изъ которыхъ одна расположена внутри угла COD, а другая—внутри угла C_1OD_1, при чемъ оба конца каждой вѣтви простираются въ безконечность. Прямыя CD_1 и C_1D называются *асимптотами* гиперболы [1]).

Если координаты OP и PM точки M, относительно системы координатъ XOY назовемъ черезъ x и y, то уравненіе нашей гиперболы выражается слѣдующимъ образомъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

при чемъ $2b$ представляетъ длину отрѣзка BB_1. Это уравненіе составляется совершенно такъ же, какъ и уравненіе эллипса, такъ что читатель можетъ составить его самостоятельно, повторяя вычисленія, которыя мы дѣлали выше.



Чер. 9.

6. Парабола. *Парабола* представляетъ кривую линію, изображенную на черт. 9-омъ. *Парабола опредѣляется условіемъ, что всѣ точки ея находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ даннаго фокуса F и данной прямой линіи AD, называемой директрисой.*

Парабола представляетъ незамкнутую кривую линію AOB, при чемъ оба конца ея A и B простираются въ безконечность. Если координаты OP и PM точки M, относительно координатныхъ осей XOY, назовемъ черезъ x и y, то уравненіе параболы имѣетъ видъ

$$y^2=2px,$$

---

1) Въ частномъ случаѣ, когда асимптоты взаимно перпендикулярны, то гипербола называется равносторонпею. Асимптоты ея взаимно перпендикулярны. Если ихъ взять за оси координатъ, то уравненіе равносторонней гиперболы приводится къ слѣдующему виду $yx=1$.

при чемъ p представляетъ разстояніе AF *фокуса* F отъ *директрисы* AD и называется *параметромъ* параболы. Это разстояніе дѣлится *вершиной* параболы O пополамъ.

7. Коническія сѣченія. Эллипсъ, гипербола и парабола извѣстны съ древнихъ временъ. Древніе греки называли ихъ однимъ общимъ названіемъ *коническія сѣченія*, разсматривая ихъ какъ сѣченія кругового конуса плоскостями. Если сѣкущая плоскость образуетъ острый уголъ съ осью конуса, то сѣченіе послѣдняго представляетъ эллипсъ. Если сѣкущая плоскость параллельна оси конуса, то полученное сѣченіе его представляетъ гиперболу. Наконецъ, если сѣкущая плоскость параллельна образующей конуса, то полученное сѣченіе представляетъ параболу.

Въ настоящее время коническія сѣченія называются также *кривыми линіями второго порядка*, такъ какъ представляются уравненіями второй степени относительно координатъ.

Уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными x и y имѣютъ слѣдующій общій видъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

при чемъ A, B, C, D, E и F представляютъ постоянныя величины. Англійскій математикъ Валлисъ, жившій въ XVII вѣкѣ, первый изучалъ кривыя второго порядка, исходя изъ послѣдняго уравненія и получилъ слѣдующія *необходимыя* условія: написанное уравненіе опредѣляетъ *эллипсъ*, если величина $B^2 - 4AC$ *имѣетъ отрицательное значеніе*, — *гиперболу*, если послѣднее выраженіе *положительное* и, наконецъ,—*параболу*, если разсматриваемое выраженіе равно нулю.

Чтобы указать на значеніе, которое имѣютъ кривыя линіи второго порядка, достаточно сказать, что планеты движутся по эллипсу вокругъ солнца, которое находится въ одномъ изъ его фокусовъ. Нѣкоторыя же кометы, появившись однажды въ солнечной системѣ и обогнувъ солнце, исчезаютъ, описывая гиперболу или параболу.

3. Координаты въ пространствѣ. Поверхности.

1. Декартова система. Плоскость. Прямая. Поверхности второго порядка. Опредѣленіе системы координатъ на плоскости распространяется на пространство. Возьмемъ три взаимно перпендикулярныхъ плоскости, пересѣкающихся въ одной точкѣ пространства. Эти три плоскости образуютъ такъ называемую Декартову систему координатъ въ пространствѣ. Точка ихъ пересѣченія называется *началомъ координатъ*, каждая изъ плоскостей называется *координатной*, а прямыя пересѣченія ихъ называются *координатными осями*. На каждой изъ координат-

ныхъ осей мы условливаемся одно изъ направленій, отъ начала координатъ, считать *положительнымъ*, а прямо противоположное ему направленіе—*отрицательнымъ*. Положеніе каждой точки въ пространствѣ мы будемъ опредѣлять разстояніями ея отъ координатныхъ плоскостей и называть эти разстоянія соотвѣтственно черезъ x, y и z. Такимъ образомъ каждой точкѣ въ пространствѣ соотвѣтствуетъ три числа, измѣряющихъ ея разстоянія отъ координатныхъ плоскостей. Эти числа называются *координатами* нашей точки.

Уравненіе всякой плоскости относительно разсматриваемой системы координатъ представляется въ видѣ уравненія слѣдующаго вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

гдѣ A, B, C и D представляютъ четыре постоянныхъ величины.

Такъ какъ прямую линію мы можемъ опредѣлять какъ линію пересѣченія двухъ плоскостей, то уравненіе прямой въ пространствѣ выражается совокупностью уравненій двухъ плоскостей.

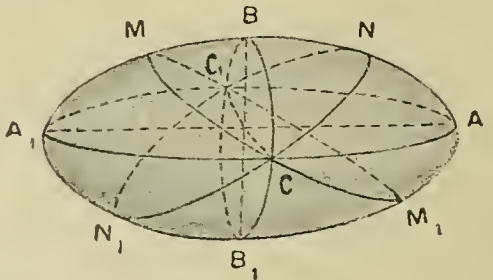
Вообще всякая поверхность въ пространствѣ представляется однимъ уравненіемъ между координатами, а кривая линія—двумя уравненіями.

Особенный интересъ представляютъ такъ называемыя поверхности второго порядка. Онѣ опредѣляются уравненіемъ второй степени относительно координатъ x, y, z, которое представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Kx + Jy + Mz + N = 0.$$

Знаменитый математикъ Эйлеръ, жившій въ концѣ XVIII и началѣ XIX столѣтія, показалъ, что изъ написаннаго уравненія получаются поверхности только пяти различныхъ видовъ: *эллипсоидъ, гиперболоиды однополый и двуполый, параболоиды эллиптическій и гиперболическій.*

2. Эллипсоидъ. На чертежѣ 10-омъ представленъ эллипсоидъ. Точки его A, A_1, B, B_1, C, C_1 называются *вершинами*, а прямыя соединяющія ихъ AA_1, BB_1, CC_1 называются *осями эллипса*, которыя *взаимно-перпендикулярны*; точка ихъ пересѣченія называется *центромъ эллипса*. Всѣ сѣченія нашего эллипсоида взаимно-перпендикулярными плоскостями, проходящими черезъ каждыя его двѣ оси, называются *главными сѣченіями* и представляютъ эллипсы



Чер. 10.

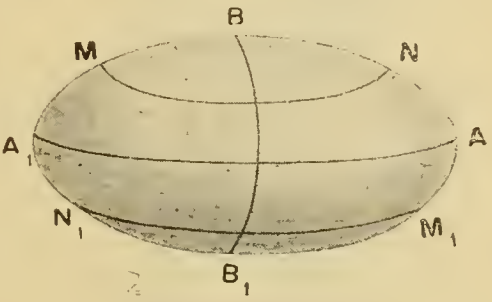
эллипсы, раздѣляющіе эллипсоидъ на равныя части. Всѣ сѣченія эллипсоида плоскостями параллельными главнымъ сѣченіямъ, представляютъ также эллипсы, которые, однако, меньше главныхъ сѣченій. Особенность эллипсоида заключается въ томъ, что сѣченія его, отмѣченныя на чертежѣ буквами MM_1 и NN_1 представляютъ круги, пересѣкающіяся по оси CC_1, средней по величинѣ изъ всѣхъ трехъ осей. Всѣ сѣченія эллипсоида, параллельныя послѣднимъ, представляютъ также круги все уменьшающихся радіусовъ. Такихъ системъ круговыхъ сѣченій двѣ, соотвѣтствующихъ двумъ показаннымъ на чертежѣ пересѣкающимся кругамъ. Четыре точки касанія касательныхъ плоскостей, параллельныхъ круговымъ сѣченіямъ, называются *точками округленія* эллипсоида.

Уравненіе эллипсоида, относительно координатной системы, совпадающей съ его главными сѣченіями, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

гдѣ a, b, c суть полуоси эллипсовъ, представляющихъ главныя сѣченія.

На чертежѣ 11-омъ представленъ частный случай эллипсоида, такъ называемый *эллипсоидъ вращенія*, получаемый отъ вращенія эллипса ABA_1B_1, расположеннаго въ плоскости чертежа, вокругъ оси BB_1, которую будемъ называть осью z. Поэтому главное сѣченіе и всѣ параллельныя ему сѣченія, перпендикулярныя оси вращенія, представляютъ круги. Особенно интереснымъ представляется эллипсоидъ вращенія, потому что обитаемая нами земля и другія небесныя планеты представляютъ тѣла очень близко напоминающія эллипсоиды вращенія, впрочемъ, не настолько *сплюснутые*, какъ эллипсоидъ, представленный на нашемъ чертежѣ. Уравненіе эллипсоида вращенія имѣетъ видъ



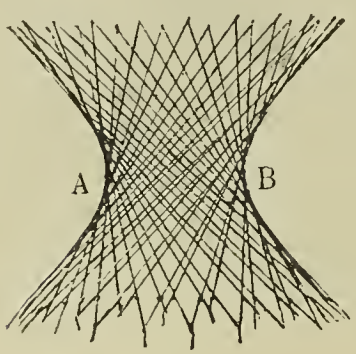
Чер. 11.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

гдѣ a обозначаетъ радіусъ главнаго кругового сѣченія.

3. Гиперболоиды. *Гиперболоиды однополый и двуполый* представлены соотвѣтственно на чертежахъ 12-омъ и 13-омъ. Если читатель поставитъ книгу вертикально и вообразитъ объ по верхности стоящими вертикально, то сѣченія ихъ горизонтальными плоскостями представляютъ эллипсы, центры которыхъ лежатъ

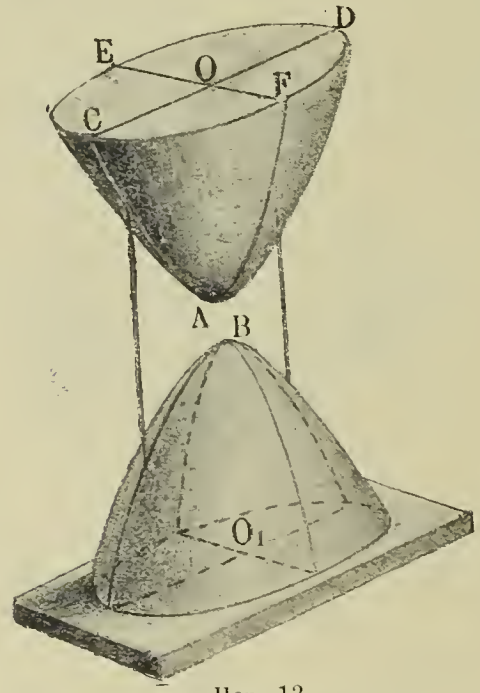
на одной вертикальной оси, которая называется *главной осью* каждой изъ разсматриваемыхъ поверхностей. Наименьшее изъ горизонтальныхъ сѣченій однополаго гиперболоида (черт. 12), которое проходитъ черезъ его точки A и B, представляетъ такъ называемый *горловой эллипсъ*. Его оси называются также главными осями, такъ что однополый гиперболоидъ имѣетъ три главныхъ оси, которыя образуютъ три взаимно-перпендикулярныхъ направленія, пересѣкающихся въ точкѣ, представляющей *центръ поверхности*.



Чер. 12.

Каждая изъ поверхностей второго порядка имѣетъ такихъ три взаимно-перпендикулярныхъ главныхъ оси. Но только эллипсоидъ и оба гиперболоида имѣютъ центры.

Въ *двуполомъ гиперболоидѣ* (черт. 13) его двѣ вершины A и B лежатъ на главной оси, проходящей черезъ центры нашихъ горизонтальныхъ эллиптическихъ сѣченій. Центръ разсматриваемаго двухполаго гиперболоида дѣлитъ разстояніе между вершинами A и B пополамъ, и двѣ остальныхъ главныхъ оси проходятъ черезъ центръ, параллельно главнымъ осямъ CD и EF горизонтальныхъ сѣченій. Главныя сѣченія обоихъ гиперболоидовъ плоскостями, проходящими черезъ оси горизонтальныхъ эллиптическихъ сѣченій, представляютъ гиперболы. *Однополый гиперболоидъ* (черт. 12) имѣетъ особенность въ видѣ круговыхъ сѣченій. Кромѣ того, онъ представляетъ такъ называемую линейчатую поверхность, образованную изъ прямолинейныхъ образующихъ, которыя, какъ показано на чертежѣ, взаимно пересѣкаются. Уравненіе однополаго гиперболоида, главныя оси котораго взяты за координатныя оси, представляется слѣдующимъ образомъ



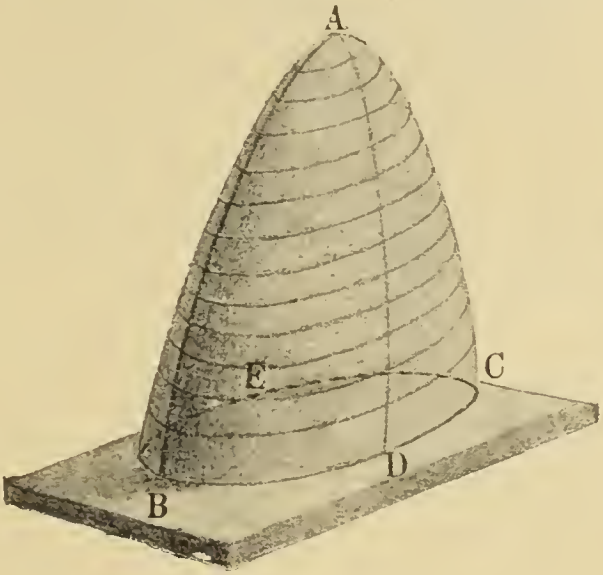
Чер. 13.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Уравненіе двуполаго гиперболоида, отнесеннаго къ его осямъ, принятымъ за координатныя оси, представляется въ видѣ

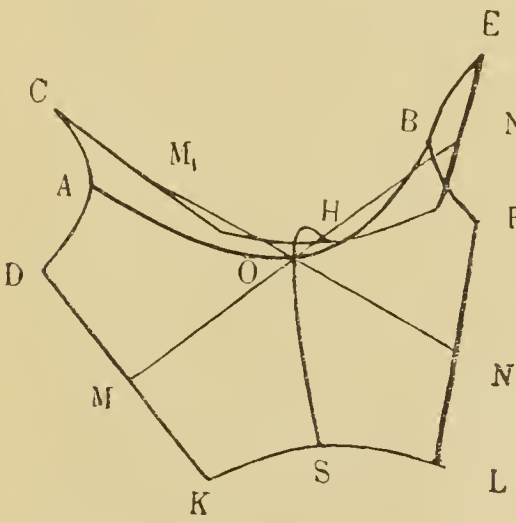
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

4. Параболоиды. Оба *параболоида* представлены на чертежахъ 14-мъ, 15-мъ и 16-мъ. Если читатель поставитъ книгу вертикально и представитъ себѣ наши поверхности поставленными вертикально, то горизонтальныя сѣченія *эллиптическаго параболоида* (чер. 14) представляютъ *эллипсы*. Горизонтальныя сѣченія гиперболическаго параболоида (чер. 15) представляютъ гиперболы; такъ, напримѣръ, кривая *CADEBF* представляетъ отрѣзки гиперболы. Равно *KSL* представляетъ также отрѣзокъ одной вѣтви гиперболы.



Чер. 14.

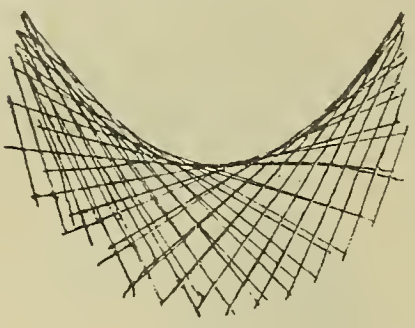
Взаимно-перпендикулярныя сѣченія, проходящія черезъ оси эллиптическихъ сѣченій эллиптическаго параболоида (черт. 14), представляютъ параболы *BAC* и *DAE*. Оси этихъ параболъ представляютъ для нашей поверхности *три главныхъ оси*, образующихъ три взаимно-перпендикулярныхъ направленія, пересѣкающихся въ вершинѣ параболоида *A*.



Черт. 15.

Взаимно-перпендикулярныя сѣченія, проходящія черезъ оси гиперболическихъ сѣченій *гиперболическаго параболоида* (черт. 15) представляютъ главныя сѣченія, пересѣкающія нашу поверхность по параболамъ *AOB* и *SOH*. Оси этихъ главныхъ сѣченій представляютъ три взаимно перпендикулярныхъ главныхъ оси нашей

поверхности, пересѣкающихся въ вершинѣ ея O. На чертежѣ 16-омъ того же гиперболическаго параболоида видно, что онъ представляетъ линейчатую поверхность, образованную сѣтью двухъ системъ взаимно-пересѣкающихся прямолинейныхъ образующихъ. Двѣ изъ нихъ нанесены также на чертежѣ 15-омъ гиперболическаго параболоида и представлены прямыми линіями MN и M_1N_1, которыя пересѣкаются въ вершинѣ поверхности O.



Чер. 16.

Уравненіе эллиптическаго параболоида, отнесеннаго къ его главнымъ осямъ, какъ къ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ координатнымъ осямъ, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$

Уравненіе гиперболическаго параболоида, отнесеннаго къ его главнымъ осямъ, какъ къ тремъ координатнымъ осямъ, выражается въ видѣ

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

Рекомендуемыя руководства.

1) *Д. Горячевъ.* Основанія Аналитической Геометріи на плоскости. Москва. 1909 г. Ц. 70 к.

2) *К. А. Андреевъ.* Основной Курсъ Аналитической Геометріи. Москва. Изд. 4-ое. 1905. Ц. 3 р. 50 к.

VI. ИНТЕРПОЛИРОВАНІЕ.

1. **Опредѣленіе.** Задача интерполированія состоитъ въ опредѣленіи линіи, проходящей черезъ нѣсколько данныхъ точекъ. Если припомнимъ (см. стр. 129—130), что всякая линія должна представляться уравненіемъ $y=f(x)$, то видимъ, что интерполированіе приводится къ разысканію функціи $f(x)$, если извѣстны значенія, которыя она принимаетъ для нѣсколькихъ опредѣленныхъ значеній перемѣнной x. Но черезъ нѣсколько данныхъ точекъ (будетъ ихъ 2, 3 или сколько угодно) можно провести безчисленное множество самыхъ разнообразныхъ линій.

Отсюда очевидно, что въ указанномъ выше видѣ задача интерполированія является неопредѣленной. Для полнаго опредѣленія функціи, необходимо дать дополнительныя указанія. Такъ, напримѣръ, задача интерполированія становится вполнѣ опре-

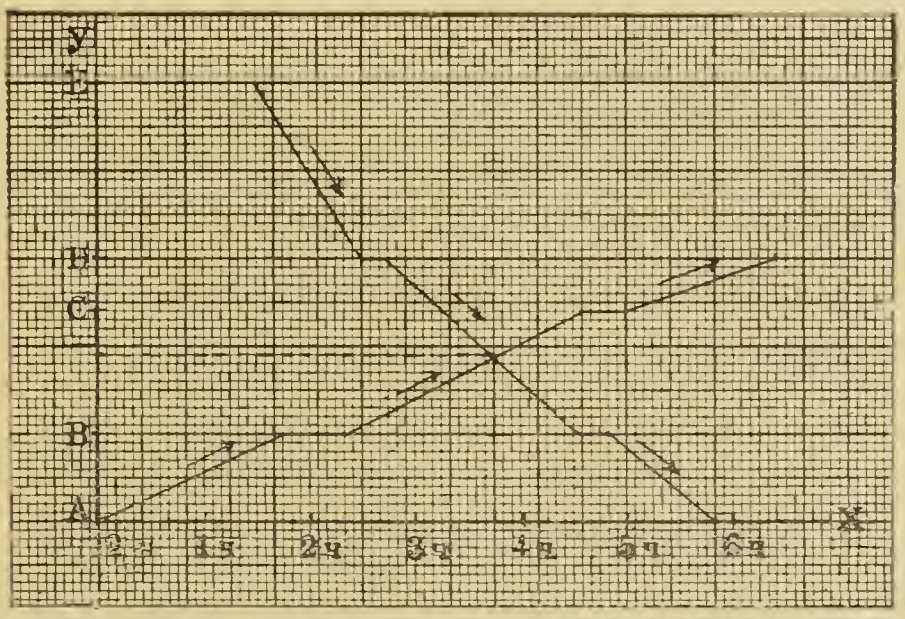
дѣленной, если скажемъ, что искомая функція должна представляться отрѣзками прямыхъ линій.

2. Прямолинейное интерполированіе. При прямолинейномъ интерполированіи предполагается, что искомая функція *графически* представляется въ видѣ ломанной линіи, вершинами которой должны быть данныя точки; въ такомъ случаѣ для построенія *графика* (т.-е. графическаго изображенія) неизвѣстной функціи достаточно соединить между собой сосѣднія точки прямыми линіями.

Для примѣра составимъ *графикъ* движенія двухъ поѣздовъ, пассажирскаго и курьерскаго, движущихся по двумъ параллельнымъ колеямъ дороги навстрѣчу другъ къ другу по слѣдующему росписанію поѣздовъ, между станціями *A* и *E*.

Пассажирскій.		Версты.	Станціи.	Курьерскій.	
Приходъ.	Отходъ.			Приходъ.	Отходъ.
—	12 ч. —	—	*A*	5 ч. 50 м.	—
1 ч. 45 м.	2 ч. 15 м.	50	*B*	4 ч. 35 м.	4 ч. 50 м.
4 ч. 35 м.	5 ч. —	120	*C*	—	—
6 ч. 25 м.	—	150	*D*	2 ч. 30 м.	2 ч. 45 м.
—	—	200	*E*	—	1 ч. 30 м.

Для составленія графика (чер. 1), на оси OX откладываемъ часы, считая ширину каждой клѣтки за 5 минутъ. На оси OY откладываемъ версты, считая высоту клѣтки за 5 верстъ. и



Чер. 1.

отмѣчаемъ станціи. Предполагая, что движеніе поѣзда приближенно представляется прямыми линіями, которыя соединяютъ станціи остановки, мы можемъ тогда найти версту, на которой находится поѣздъ въ любой моментъ времени. Такъ какъ поѣзда движутся навстрѣчу другъ другу, то мы найдемъ мѣсто ихъ встрѣчи, представляемое точкой пересѣченія обѣихъ ломанныхъ линій. Абсцисса искомой точки указываетъ время встрѣчи, а ордината—мѣсто встрѣчи; такъ, наши поѣзда встрѣтятся въ 3 ч. 45 м. на разстояніи 95 в. отъ станціи A.

Слѣдуетъ замѣтить, что, представляя прямой линіей законъ движенія поѣзда между двумя станціями, мы дѣлаемъ предположеніе, что поѣзда движутся *равномѣрно* [1]), что не вполнѣ соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Поэтому графикъ нашъ не вполнѣ соотвѣтствуетъ дѣйствительности, но тѣмъ не менѣе для практическихъ надобностей удовлетворителенъ. Вообще въ практикѣ почти не встрѣчаются функціи, которыя графически изображались бы ломанными линіями. Но въ виду чрезвычайной простоты прямолинейнаго интерполированія, его примѣняютъ въ тѣхъ случаяхъ, когда разница между искомой функціей и изображенный нашей ломанной настолько мала, что ею можно пренебречь. Въ этомъ случаѣ интерполированіе называютъ *приближеннымъ*.

3. Параболическое интерполированіе. Задача интерполированія станетъ также вполнѣ опредѣленной, если мы поставимъ условіемъ, чтобы искомая функція *представляла многочленъ наименьшей степени, который при заданныхъ значеніяхъ независимой перемѣнной a, b, c.... принимаетъ соотвѣтственно данныя значенія A, B, C,...*

Разрѣшеніе этой задачи называется *многочленнымъ* или *параболическимъ* [2]) интерполированіемъ.

Легко сразу написать многочленъ *первой* степени $f(x)$, который при $x=a$ обращается въ A, а при $x=b$ обращается въ B. Въ самомъ дѣлѣ, напишите двучленъ

$$f(x)=A\,\frac{x-b}{a-b}+B\,\frac{x-a}{b-a}.$$

Вы сейчасъ же видите, что при $x=a$

$$f(a)=A\,\frac{a-b}{a-b}+B\,\frac{a-a}{b-a}=A.\,1+B.\,0=A,$$

т.-е. при $x=a$ функція $f(x)$ становится равной A; точно такъ же для $x=b$ получаемъ $f(b)=A\,\frac{b-b}{a-b}+B\,\frac{b-a}{b-a}=B.$

---

[1]) Для объясненія этого понятія отсылаемъ читателя къ отдѣлу механики.

[2]) Параболической называется всякая функція, выражающая зависимую перемѣнную въ видѣ многочлена цѣлыхъ степеней независимой перемѣнной.

Подобнымъ же образомъ составляется многочленъ 2-ой степени, который при $x=a$ становится равнымъ A, при $x=b$ становится равнымъ B, и при $x=c$ становится равнымъ C. По примѣру предыдущаго составьте три выраженія

$$\frac{(x-b)\,(x-c)}{(a-b)\,(a-c)},\qquad \frac{(x-a)\,(x-c)}{(b-a)\,(b-c)},\qquad \frac{(x-a)\,(x-b)}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Каждое изъ этихъ выраженій, разсматриваемое какъ функція x, есть многочленъ 2 степени; при этомъ первое выраженіе при $x=a$ равно 1, а при $x=b$ и $x=c$ равно нулю. Второе выраженіе равно 1, при $x=b$, и равно нулю, при $x=a$ и $x=c$. Наконецъ, послѣднее выраженіе равно 1, при $x=c$, и равно 0, при $x=b$ и $x=c$. Поэтому, если составимъ сумму

$$f(x)=A\,\frac{(x-b)\,(x-c)}{(a-b)\,(a-c)}+B\,\frac{(x-a)\,(x-c)}{(b-a)\,(b-c)}+C\,\frac{(x-a)\,(x-b)}{(c-a)\,(c-b)},$$

то видимъ, что $f(x)$ есть многочленъ 2-ой степени, который, при $x=a$, равенъ A, при $x=b$, равенъ B, при $x=c$, равенъ C. Совершенно такимъ же точно способомъ можно построить многочленъ *3-ей степени*, который при 4-хъ значеніяхъ перемѣнной принимаетъ напередъ заданныя значенія и т. д.

Эти формулы были указаны знаменитымъ французскимъ математикомъ конца XVIII столѣтія *Лагранжемъ*.

VII. ТЕОРІЯ ПРЕДѢЛОВЪ И ЕЯ ПРИЛОЖЕНІЯ.

1. Опредѣленія. Теорія предѣловъ основана на разсмотрѣніи перемѣнныхъ и такъ называемыхъ безконечно-малыхъ величинъ. Еще древніе математики пользовались ими для вычисленія длины линій, площадей и объемовъ тѣлъ. Для выясненія этого новаго понятія разсмотримъ слѣдующій примѣръ.

Возьмемъ отрѣзокъ OA (чер. 1) равный единицѣ. Беремъ середину его M, затѣмъ беремъ середину M_1 отрѣзка MA, далѣе—середину M_2 отрѣзка M_1A и т. д. Если мы разсматриваемъ измѣняющійся отрѣзокъ, имѣющій одинъ конецъ въ точкѣ O, а другой конецъ сначала въ M, потомъ въ M_1, въ M_2 и т. д., то величина разсматриваемаго отрѣзка постепенно мѣняется (увеличивается) и представляетъ собой *перемѣнную величину* въ противоположность длинѣ отрѣзка OA, которая не измѣняется, оставаясь все время нашего разсужденія *постоянной величиной*.

Чер 1.

Замѣтимъ при этомъ, что нашъ измѣняющійся отрѣзокъ, хотя и остается все время меньше OA, тѣмъ не менѣе будетъ отъ него сколь угодно мало отличаться, если мы будемъ его послѣдовательно увеличивать указаннымъ образомъ. Дѣйствительно, если мы беремъ отрѣзокъ OM, ему не хватаетъ до OA куска $MA=\frac{1}{2}$, но затѣмъ мы беремъ OM_1, и недостающій кусокъ M_1A уменьшается вдвое (такъ какъ M_1 середина MA), т.-е. равняется $\frac{1}{4}$; при слѣдующемъ измѣненіи недостающая часть уменьшается еще вдвое, такъ что для третьяго отрѣзка она равна $\frac{1}{4.2}=\frac{1}{2^3}$, для четвертаго $\frac{1}{2^3.2}=\frac{1}{2^4}$ и т. д. *Если*, какъ въ данномъ примѣрѣ, *перемѣнная величина, постепенно измѣняясь, сколь угодно приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ, то эта послѣдняя называется предѣломъ разсматриваемой перемѣнной величины.* Такимъ образомъ OA является предѣломъ разсматриваемаго нами перемѣннаго отрѣзка.

Если перемѣнная величина имѣетъ предѣломъ нуль, т.-е. измѣняясь становится менѣе всякой данной величины, то ее называютъ безконечно-малой. Пользуясь этимъ опредѣленіемъ, можно сказать, что разность между перемѣнной величиной и ея предѣломъ есть безконечно-малая величина. Напримѣръ, перемѣнная величина $1+\frac{1}{n}$ имѣетъ предѣломъ 1, когда n безгранично увеличивается, при этомъ $\frac{1}{n}$ сколько угодно приближается къ нулю, т.-е. $\frac{1}{n}$ является въ данномъ случаѣ безконечно-малой величиной.

Способъ предѣловъ основывается на слѣдующихъ теоремахъ, показывающихъ, какъ выражается зависимость между предѣлами перемѣнныхъ величинъ, на основаніи зависимостей между послѣдними:

1) Если двѣ перемѣнныя при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ равны, то и предѣлы ихъ равны.

2) Предѣлъ суммы двухъ перемѣнныхъ величинъ равенъ суммѣ предѣловъ этихъ величинъ.

3) Предѣлъ произведенія двухъ перемѣнныхъ величинъ равенъ произведенію предѣловъ этихъ величинъ.

4) Предѣлъ отношенія двухъ перемѣнныхъ величинъ равенъ отношенію предѣловъ, если только предѣлъ знаменателя не равенъ нулю.

Всѣ эти теоремы доказываются однимъ и тѣмъ же пріемомъ. Для примѣра возьмемъ второе предложеніе. Пусть одна изъ перемѣнныхъ величинъ x, другая y. Предѣлъ первой A, предѣлъ второй B. Требуется доказать, что предѣлъ суммы $x+y$ равняется $A+B$. Въ самомъ дѣлѣ,

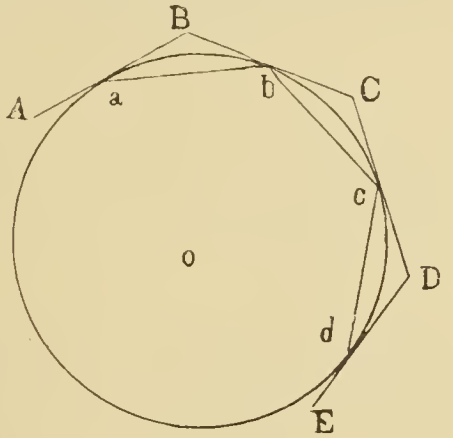
$$x=A+\alpha, \quad y=B+\beta,$$

гдѣ α и β представляютъ безконечно-малыя величины. Слѣдовательно,

$$x+y=(A+B)+(\alpha+\beta).$$

Такъ какъ $(\alpha+\beta)$ тоже безконечно малая величина, то это равенство показываетъ, что $x+y$ имѣетъ предѣломъ $A+B$.

2. Длина окружности. Пусть имѣемъ окружность радіуса R (чер. 2). Впишемъ и опишемъ вокругъ нее какой-нибудь правильный многоугольникъ съ n сторонами.



Чер. 2.

Если P_n есть периметръ описаннаго многоугольника, p_n — периметръ вписаннаго, C — длина окружности, то, *каково бы ни было число сторонъ n, длина окружности заключается между периметрами вписаннаго и описаннаго многоугольника*, т.-е.

$$P_n > C > p_n.$$

Если будемъ увеличивать число сторонъ, напримѣръ, удваивать, то многоугольники $ABCDE\ldots$ и $abcd\ldots$ будутъ *сближаться*, разность между P_n и p_n будетъ убывать, а величина C будетъ между P_n и p_n, каково бы ни было число n. Слѣдовательно, разность между постояннымъ количествомъ C и перемѣннымъ p_n будетъ стремиться къ нулю, т.-е.

$$\text{пред.}_{n=\infty} p_n = C.$$

Итакъ, *длина окружности есть предѣлъ, къ которому стремится периметръ вписаннаго* (а также описаннаго) *правильнаго многоугольника при безконечномъ возрастаніи числа его сторонъ.*

Теорема. *Отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная.*

Въ окружности данныхъ радіусовъ R и r будемъ вписывать правильные 6-ти, затѣмъ 12-ти, 24-хъ и т. д. многоуголь-

ники и составлять ихъ периметры P_6, P_{12}, P_{24}... и p_6, p_{12}, p_{24}... Какъ извѣстно,

$$\frac{P_6}{p_6}=\frac{R}{r};\ \frac{P_{12}}{p_{12}}=\frac{R}{r};\ \frac{P_{24}}{p_{24}}=\frac{R}{r}\ldots,\ \text{т.-е.}\ \frac{P_6}{p_6}=\frac{P_{12}}{p_{12}}=\frac{P_{24}}{p_{24}}=\ldots=\frac{R}{r}.$$

Слѣдовательно, перемѣнныя P и p таковы, что *измѣняясь, находятся въ* постоянномъ *отношеніи* $\frac{R}{r}$. Но первый рядъ перемѣнныхъ стремится къ предѣлу C (длина 1-ой окружности); второй — къ предѣлу c (длина 2-ой окружности). На основаніи теоремы 4-ой (стр. 146) о предѣлахъ, утверждаемъ, что въ такомъ же отношеніи находятся и ихъ предѣлы, т.-е.

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r},\ \text{откуда}\ \frac{C}{R}=\frac{c}{r},\ \text{или}\ \frac{C}{2R}=\frac{c}{2r},$$

т.-е. отношеніе окружности къ своему діаметру есть величина постоянная для *любой* окружности. *Величину этого отношенія принято изображать греческой буквой* π, т.-е. $\frac{C}{2R}=\pi$ [1]).

Очевидно, что если бы мы сумѣли вычислить число π, то сумѣли бы вычислить какъ длину окружности, такъ и любой ея части на основаніи слѣдующаго:

Изъ опредѣленія числа π слѣдуетъ, что *длина окружности* $C=2\pi R$.

Такъ какъ длина всей окружности $=2\pi R$, то длина дуги въ $1^\circ=\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$; длина дуги въ n° равняется выраженію $\frac{\pi R n}{180}$.

Древніе іудеи, какъ это видно изъ Библіи и изъ Талмуда, принимали за π число 3, т.-е. считали, что окружность въ три раза больше своего діаметра. Но уже *Амесъ* (за 1700 л. до Р. Х.) принимаетъ $\pi=3{,}1604$.

Всѣ эти вычисленія носили болѣе практическій характеръ, и впервые научный методъ былъ примѣненъ великимъ математикомъ *Архимедомъ* ($3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$).

Если діаметръ круга принять за единицу, то $C=\pi$, т.-е. π *есть длина окружности круга, діаметръ котораго равенъ единицѣ.*

---

[1]) Символъ π, какъ постоянное отношеніе $\frac{C}{2R}$, введенъ впервые *Джонсомъ* въ Лондонѣ въ 1706 г.

Для опредѣленія π приведемъ слѣдующую таблицу значеній периметровъ, описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ.

Число сторонъ.	P	$> C = \pi <$	p	$P-p$
6	3,4641016		3,0000000	0,4641016
12	3,2153903		3,1058285	0,1095618
24	3,1596599		3,1326286	0,0270313
48	3,1460862		3,1393502	0,0067360
96	3,1427146	$> \pi <$	3,1410319	0,0016827
192	3,1418730		3,1414524	0,0004206
384	3,1416627		3,1415576	0,0001051
768	3,1416101		3,1415838	0,0000263
1536	3,1415970		3,1415904	0,0000066

Значенія P идутъ въ этой таблицѣ убывая, а p—увеличиваясь. Разница между P и p убываетъ все больше и больше; такъ, изъ нашей таблицы получаемъ

$$P_6 - p_6 = 0{,}4641016. \qquad P_{1536} - p_{1536} = 0{,}0000066.$$

Такъ какъ истинное значеніе π *заключается между* P_n *и* p_n, *то очевидно, что разница между* π *и* p *еще меньше, чѣмъ между* P *и* p. Поэтому

$$\pi - p_6 < 0{,}4641016, \qquad \pi - p_{1536} < 0{,}0000066,$$

т.-е. *если вмѣсто истиннаго значенія* π *взять* $p_{1536} = 3{,}1415904$, *то мы сдѣлаемъ ошибку меньше чѣмъ въ* 0,0000066. Если бы мы продолжали вычисленія дальше, то ошибка уменьшилась бы еще больше.

Для практическихъ цѣлей принимаютъ $\pi = 3{,}14$ или $\frac{22}{7}$, число Архимеда (съ точностью до 0,01). Для цѣлей, требующихъ большей точности, берутъ или $\pi = \frac{355}{113}$ (найдено *Адріаномъ Меціемъ*) или, всего чаще, въ видѣ десятичной дроби (съ точностью до 0,00001)

$$\pi = 3{,}14159\ ^{1}).$$

3. Площадь круга. Для опредѣленія площади S круга, замѣчаемъ, что она является предѣломъ площади S_n правильнаго вписаннаго n-угольника, когда n безгранично возрастаетъ. Но

---

[1]) Принявъ $\pi = 3{,}14159$, мы при вычисленіи длины круга, описаннаго радіусомъ въ *1 версту*, сдѣлаемъ ошибку *меньше чѣмъ* въ 0,01 *сажени*.

площадь многоугольника равна $S_n = \frac{1}{2} a_n P_n$, гдѣ a_n есть апофема, P_n — периметръ этого многоугольника. Поэтому, такъ какъ предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, предѣлъ $S_n = \frac{1}{2}$ (пред. a_n). (пред. P_n). Слѣдовательно, искомая площадь S равняется половинѣ произведенія радіуса R на длину окружности C, т.-е. $S = \frac{1}{2} R.\ C$, такъ какъ апофема, очевидно, имѣетъ предѣломъ радіусъ, а периметръ — окружность.

Подставляя въ выраженіе S опредѣленное выше значеніе C, (стр. 148), находимъ

$$S = \frac{1}{2} R.\ 2\pi R = \pi R^2.$$

Изъ пріемовъ, примѣняемыхъ для квадратуры круга, т.-е. для построенія прямоугольника, равновеликаго кругу, укажемъ способъ, предложенный знаменитымъ итальянскимъ художникомъ и ученымъ Леонардо-да-Винчи (жившемъ въ 1452—1519 году). Пусть требуется опредѣлить площадь круга радіуса R. Строимъ для этого цилиндръ, имѣющій основаніемъ этотъ кругъ и высоту, равную $\frac{R}{2}$; въ такомъ случаѣ боковая поверхность цилиндра (см. стр. 151) будетъ равна $2\pi R.\ \frac{R}{2} = \pi R^2$, т.-е. равна площади даннаго круга. Послѣ этого беремъ бумажную прямоугольную ленту шириной $\frac{R}{2}$ и обматываемъ ею цилиндръ; площадь бумажнаго прямоугольника, точно закрывающаго цилиндръ, равна его боковой поверхности, т.-е. площади. Изъ современныхъ приборовъ для квадратуры круга наиболѣе удобнымъ является *интеграфъ*, изобрѣтенный русскимъ инженеромъ Абданкъ Абакановичемъ (1889). Точная же квадратура круга, при помощи циркуля и линейки, какъ это доказалъ Линдеманнъ въ 1882 году, невозможна.

4. Объемы и поверхности геометрическихъ тѣлъ. На основаніи теоріи предѣловъ доказываютъ, что *двѣ треугольныхъ пирамиды съ одинаковыми основаніями и высотами равновелики*, и что поэтому *всякая треугольная призма состоитъ изъ трехъ равновеликихъ треугольныхъ пирамидъ*. Отсюда слѣдуетъ, что *объемъ всякой пирамиды* (см. стр. 97, чер. 60—61) *равенъ произведенію ея основанія на треть высоты*.

Мы разсматриваемъ *цилиндръ* (стр. 98, чер. 64) какъ предѣлъ вписанной въ него призмы, число граней которой безпредѣльно возрастаетъ, а *конусъ* (стр. 98, чер. 66)—какъ предѣлъ вписан-

ной въ него пирамиды съ безпредѣльно возрастающимъ числомъ граней. Поэтому приходимъ къ заключенію, что *боковая поверхность прямого круглаго цилиндра равна произведенію длины окружности основанія на высоту*, а *объемъ того же цилиндра равенъ произведенію площади основанія на высоту. Боковая поверхность прямого круглаго конуса равна произведенію длины окружности основанія на половину образующей*, а *объемъ этого конуса равенъ произведенію площади основанія на треть высоты.*

Разсѣкая *шаръ* (стр. 99, чер. 67) параллельными плоскостями, разсматриваютъ его поверхность какъ предѣлъ ряда боковыхъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ, а объемъ—какъ предѣлъ ряда цилиндрическихъ слоевъ. Поэтому доказываютъ, что *поверхность шара равна произведенію длины окружности его большого круга на діаметръ*, а *объемъ шара равенъ произведенію его поверхности на треть радіуса.*

VIII. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

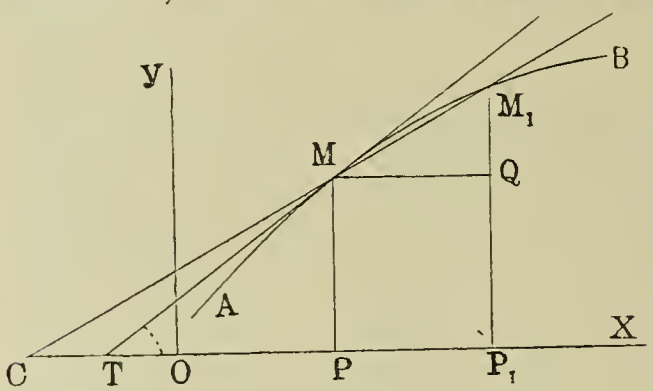
1. Функціи непрерывныя и прерывныя. Однимъ изъ самыхъ мощныхъ орудій современной науки является дифференціальное и интегральное исчисленіе, или анализъ безконечно-малыхъ величинъ. Это исчисленіе было открыто во второй половинѣ XVII-го столѣтія почти одновременно англійскимъ ученымъ *Ньютономъ* (жившимъ въ 1642 — 1727 годахъ; его портретъ здѣсь прилагается) и нѣмецкимъ философомъ *Лейбницемъ* (жившимъ въ 1646 — 1716 годахъ). Великія открытія, производящія переворотъ въ наукѣ и философіи, совершаются не сразу. У Ньютона и Лейбница былъ рядъ великихъ предшественниковъ, которые примѣняли къ задачамъ геометріи, физики и астрономіи пріемы, подготовившіе открытіе общей теоріи. Упомянемъ здѣсь лишь имена итальянскаго математика *Кавальери* (жившаго въ 1564 — 1642 годахъ) и французскаго математика *Ферма* (жившаго въ 1601—1665 годахъ). Зачатки анализа безконечно-малыхъ мы находимъ еще у древне-греческихъ математиковъ и, въ особенности, у величайшаго изъ нихъ Архимеда (жившаго въ 287—212 до Р. Х.), который разрѣшилъ нѣсколько задачъ интегральнаго исчисленія, напримѣръ, опредѣленіе объема шара и цилиндра.

Дифференціальное и интегральное исчисленіе представляютъ развитіе ученія о безконечно-малыхъ величинахъ и основываются

на понятіи о функціяхъ. Читатель хорошо знаетъ [1]), что если двѣ перемѣнныхъ величины x и y, связаны между собой такимъ образомъ, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе y, и измѣненіе x влечетъ за собой измѣненіе y, то говорятъ, что y есть функція перемѣнной x, и это условіе обозначаютъ формулой $y=f(x)$.

Среди функцій особый интересъ представляютъ такъ называемыя непрерывныя функціи. *Функція $y=f(x)$ называется непрерывной, если въ то время, какъ x, измѣняясь, стремится къ нѣкоторому предѣлу a* (см. стр. 146), *y также стремится къ предѣлу b, при чемъ $b=f(a)$.*

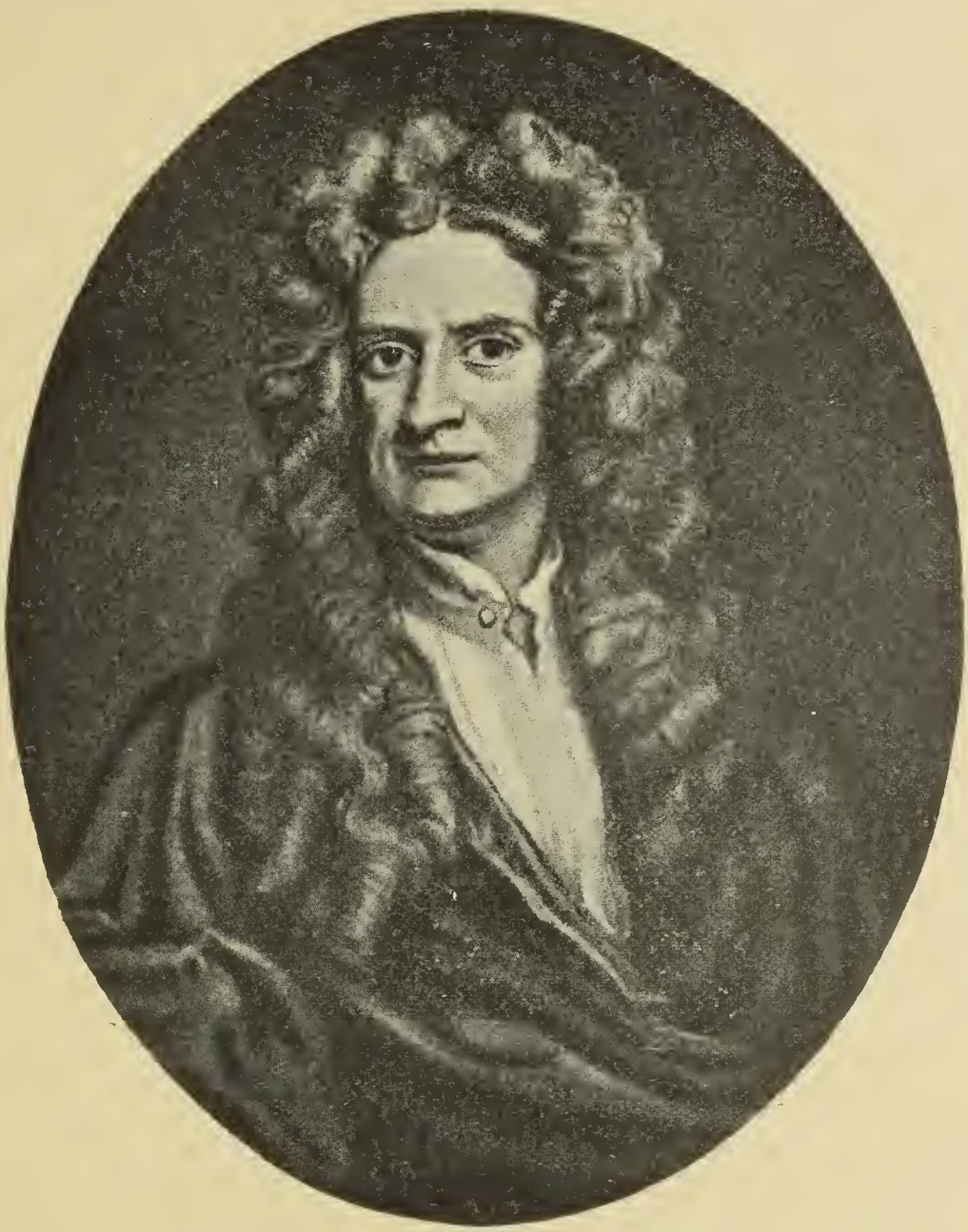
Если мы имѣемъ, напримѣръ, два круга, при чемъ радіусъ одного равенъ x и радіусъ другого — a, то въ то время, какъ радіусъ x перваго круга будетъ, измѣняясь безгранично, приближаться къ радіусу a второго круга, его площадь, $y=\pi x^2$, будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ площади второго круга, $b=\pi a^2$. Опредѣленію непрерывной функціи часто придаютъ нѣсколько иную форму. А именно, если x имѣетъ предѣломъ a, то говорятъ, что $x-a=h$ представляетъ безконечно-малую величину. Такимъ же образомъ, если функція $y=f(x)$ имѣетъ предѣломъ b, такъ что $b=f(a)$, то говорятъ, что $y-b=f(x)-f(a)=k$ есть безконечно-малая величина. Поэтому можно сказать, *что y представляетъ непрерывную функцію независимой перемѣнной x, если безконечно-малому измѣненію или приращенію x соотвѣтствуетъ безконечно-малое измѣненіе или приращеніе y.* Изъ этого опредѣленія видно, что геометрически непрерывная функція $y=f(x)$ представится въ видѣ непрерывной кривой линіи AB (чер. 1) такой, что безконечно-малому приращенію PP_1 абсциссы OP точки M, т.-е. абсциссѣ OP_1, соотвѣтствуетъ ордината P_1M_1, которая отличается отъ ординаты PM точки M на безконечно-малую величину QM_1.



Чер. 1.

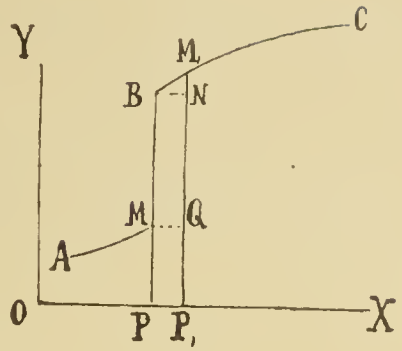
Въ этомъ послѣднемъ свойствѣ состоитъ отличительный признакъ непрерывной кривой AB отъ прерывной кривой $AMBM_1C$

[1]) См. стр. 117—127.



Ньютонъ.

(чер. 3), для которой безконечно-малому приращенію PP_1 абсциссы точки M соотвѣтствуетъ конечное приращеніе QM_1 ординаты PM точки P.



Чер. 2.

2. Производная и дифференціалъ. Основнымъ понятіемъ въ дифференціальномъ исчисленіи является такъ называемая *производная функція*, съ разсмотрѣнія которой мы и начнемъ.

Возьмемъ, напримѣръ, функцію $y = Ax^2$, гдѣ A какой-нибудь численный постоянный коэффиціентъ. Если x придать значеніе x_0, то y получаетъ значеніе $y_0 = Ax_0^2$. Положимъ теперь, что x, измѣняясь, вмѣсто x_0 получаетъ значеніе $x_0 + \Delta x$, гдѣ Δx нѣкоторая малая величина, называемая приращеніемъ x; тогда y также измѣнится и, предположимъ, станетъ равной $y_0 + \Delta y$, гдѣ Δy представляетъ приращеніе y_0, которое легко вычислить. Для этого замѣтимъ, что, на основаніи равенства $y = Ax^2$, имѣющаго мѣсто для всѣхъ значеній x, получаемъ

$$y_0 + \Delta y = A(x_0 + \Delta x)^2 = Ax_0^2 + 2Ax_0\Delta x + A\Delta x^2.$$

Такъ какъ $y_0 = Ax_0^2$, то, вычитая послѣднее равенство изъ предыдущаго, т.-е. изъ первой части отнимая y_0, а изъ второй — Ax_0^2, находимъ

$$\Delta y = A(x_0 + \Delta x)^2 - Ax_0^2 = 2Ax_0\Delta x + A\Delta x^2.$$

Изъ полученнаго выраженія Δy видно, что Δy становится равнымъ 0, когда Δx обращается въ 0. Отсюда и заключаемъ, что разсматриваемая функція y — непрерывная. Разсмотримъ далѣе величину отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, представляющаго отношеніе приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной. Очевидно, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2Ax_0\Delta x + A\Delta x^2}{\Delta x} = 2Ax_0 + A\Delta x.$$

Поэтому, когда Δx стремится къ нулю, отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имѣетъ предѣломъ $2Ax_0$. Этотъ предѣлъ называется производной функціи Ax^2, при x равномъ x_0. Вообще *производной функціи* $f(x)$ *при* $x = x_0$ *называется предѣлъ, къ которому стремится отношеніе приращенія функціи,* $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *къ приращенію* Δx *независимой перемѣнной, когда это послѣднее стремится къ нулю* [1]). При ка-

[1]) Возможны функціи, для которыхъ это отношеніе не стремится ни къ какому предѣлу; но въ большинствѣ случаевъ этотъ предѣлъ существуетъ.

ждомъ значеніи x, производная (т.-е. указанный предѣлъ) получаетъ опредѣленные значеніе. Слѣдовательно, производная представляетъ также функцію x. Напримѣръ, согласно нашему вычисленію, производная функціи Ax^2 при $x=x_0$ равняется $2Ax_0$, а при всякомъ x равна $2Ax$.

Если постоянный коэффиціентъ $A=\pi$, то наша функція πx^2 представляетъ площадь круга, а ея производная равная $2\pi x$ представляетъ длину данной окружности круга. Такимъ образомъ производною площади круга, разсматриваемой какъ функція радіуса, служитъ длина его окружности.

Производную функцію $f(x)$ обозначаютъ черезъ $f'(x)$, или y'. Согласно данному опредѣленію производной, мы имѣемъ, что

$$y'=f'(x)=\underset{\Delta x=0}{\text{пред.}}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Укажемъ производныя нѣкоторыхъ часто встрѣчающихся функцій, которыя вычисляются совершенно такъ же, какъ производная Ax^2. Именно, $(Ax)'=A$, $(Ax^2)'=2Ax$, $(Ax^3)'=3Ax^2$.

Какова бы ни была степень x, всегда имѣемъ $(Ax^m)'=mAx^{m-1}$.

Обозначая черезъ x уголъ между неподвижнымъ и подвижнымъ радіусомъ окружности, описанной радіусомъ, равнымъ единицѣ, заключаемъ (см. стр. 112) что $sin\ x$ и $cos\ x$ представляютъ непрерывныя функціи независимой перемѣнной x. Производныя ихъ имѣютъ слѣдующія значенія [1]).

$$(sin\ x)'=cosx,\quad (cosx)'=-sin\ x.$$

Замѣтимъ, что если постоянную величину a разсматривать какъ функцію x, которая при всѣхъ значеніяхъ x сохраняетъ одну и ту же величину, то ея производная равна нулю, такъ какъ при каждомъ приращеніи x, соотвѣтствующее приращеніе нашей функціи равно нулю. Если же мы имѣемъ функцію, которая, дѣйствительно, измѣняется вмѣстѣ съ x, то ея производная не можетъ все время быть равной нулю.

Укажемъ еще для вычисленія производныхъ сложныхъ [2]) функцій слѣдующія формулы

$$[f(x)+\varphi(x)]'=f'(x)+\varphi'(x),$$
$$[f(x)\ \varphi(x)]'=f'(x)\ \varphi(x)+\varphi'(x)\ f(x).$$

---

[1]) См. книгу Д. И. Горячевъ, «Основанія Анализа Безконечно-малыхъ». Изданіе 4-е. Москва 1911 г. Ц. 80 к., стр. 70.

[2]) *Сложными* называются функціи, которыя представляются въ видѣ функцій нѣсколькихъ новыхъ функцій. Напримѣръ, функція $f(x)+\varphi(x)$ представляетъ сложную функцію, состоящую изъ суммы двухъ функцій.

Первая изъ формулъ позволяетъ, напримѣръ, вычислять производныя какихъ угодно многочленовъ. Такъ, имѣемъ

$$(2x^3+x^2)' = (2x^3)' + (x^2)' = 2 \cdot 3x^2 + 2x = 6x^2 + 2x.$$
$$(x^2 - 3x + 1)' = (x^2)' - (3x)' + (1)' = 2x - 3.$$

Возвращаемая къ опредѣленію производной функціи $y = f(x)$. Обозначая черезъ Δx приращеніе независимой перемѣнной x и черезъ Δy—приращеніе y, напишемъ

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \qquad \text{или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

гдѣ α обозначаетъ безконечно-малую величину, обращающуюся въ нуль одновременно съ Δx. Но изъ послѣдняго равенства имѣемъ

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

при чемъ всѣ члены представляютъ безконечно-малыя величины. Но $\alpha \cdot \Delta x$, какъ произведеніе двухъ безконечно-малыхъ, считается безконечно-малой высшаго порядка сравнительно съ величиной $f'(x) \cdot \Delta x$, которая называется *главной частью* безконечно-малаго приращенія функціи Δy. Эта главная часть называется дифференціаломъ функціи y и обозначается черезъ dy, такъ что мы имѣемъ

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Если мы возьмемъ функцію $y = x$, то для нея $y' = 1$, а $dy = dx$. Поэтому для послѣдней функціи предыдущее равенство становится $dy = \Delta x$. Сравнивая оба послѣднихъ значенія dy, заключаемъ, что $\Delta x = dx$. Поэтому всегда пишутъ

$$dy = f'(x)\,dx,$$

а также вмѣсто обозначенія производной нашей функціи черезъ

$$f'(x), \text{ или } y' \text{ очень часто пишутъ } \frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{df(x)}{dx}.$$

3. Геометрическое значеніе производной. Разсмотримъ линію AB (см. черт. 1), изображающую функцію $y = f(x)$, и точку M на ней, соотвѣтствующую абсциссѣ $x = x_0$, представленной отрѣзкомъ OP. Въ силу уравненія нашей линіи, ордината PM точки M, которую обозначимъ черезъ y_0, равна $f(x_0)$. Если x_0 дадимъ приращеніе $\Delta x = PP_1$, то точка на линіи займетъ положеніе M_1 и ордината ея P_1M_1 будетъ больше ординаты PM на отрѣзокъ QM_1, который получимъ, проведя изъ точки M прямую MQ, параллельную оси абсциссъ. Такимъ образомъ приращеніе Δy функціи, соотвѣтствующее приращенію $\Delta x = PP_1 = MQ$ независимой перемѣн-

ной x, равно QM_1. Другими словами, въ прямоугольномъ треугольникѣ MQM_1, который получимъ, проведя хорду MM_1, катетъ $MQ=\Delta x$, катетъ $QM_1=\Delta y$. На основаніи извѣстной изъ тригонометріи (стр. 117) формулы, имѣемъ

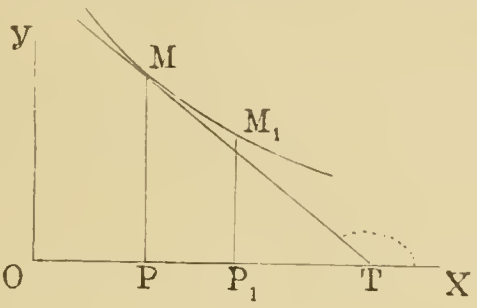
$$tgM_1MQ=\frac{QM_1}{MQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Продолжая хорду MM_1 до пересѣченія ея съ осью абсциссъ въ точкѣ C и замѣчая, что уголъ C равенъ углу M_1MQ, какъ соотвѣтственному, заключаемъ, что отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно tgC, т.-е. тангенсу угла между сѣкущей CM_1 и осью абсциссъ.

Если Δx стремится къ нулю, точка M_1 стремится совпасть съ точкой M и прямая CM_1 стремится совпасть съ касательной MT къ нашей кривой въ точкѣ M. Это слѣдуетъ изъ того, что касательной къ кривой линіи въ данной точкѣ M называется прямая, являющаяся предѣломъ сѣкущей, проходящей черезъ эту точку, когда и вторая точка ея пересѣченія съ кривой безконечно приближается къ данной точкѣ M. Слѣдовательно, предѣлъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx приближается къ нулю, есть tgT, т.-е. tg угла между касательной въ точкѣ M къ нашей кривой и осью абсциссъ. Итакъ, *производная*, которая, согласно данному выше опредѣленію, есть предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *равна тангенсу угла между касательной и осью абсциссъ*. Изъ этого видно, что задача нахожденія производной данной функціи и геометрическая задача построенія касательной къ линіи, изображающей данную функцію, суть задачи равнозначныя. Въ самомъ дѣлѣ, зная производную, мы имѣемъ значеніе угла между касательною и осью абсциссъ. Слѣдовательно, прямая, проходящая черезъ данную точку, образующая этотъ уголъ съ осью абсциссъ, и будетъ искомой касательной. Наоборотъ, если касательная построена, то tg угла между ней и осью абсциссъ даетъ намъ значеніе производной данной функціи въ разсматриваемой точкѣ.

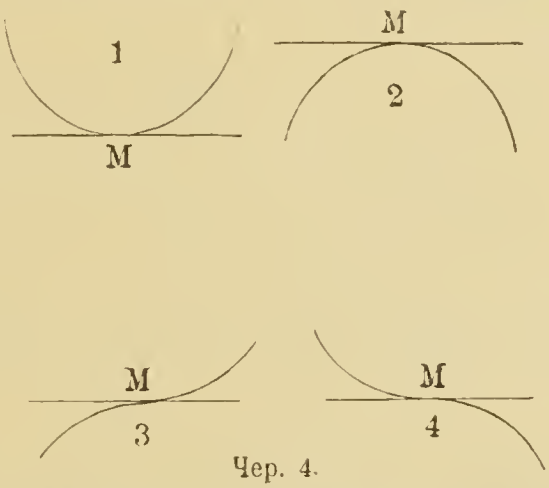
4. **Приложенія производныхъ.** Геометрическое изображеніе функціи и ея производной позволяетъ судить *по знаку производной о характерѣ измѣненія функціи*. Дѣйствительно, положимъ, что кривая AB (см. чер. 1) представляетъ функцію $y=f(x)$. Пусть въ точкѣ $M(x_0,y_0)$ производная $f'(x_0)$ положительная. Это значитъ, что касательная TM образуетъ острый уголъ съ осью Ox, т.-е. если двигать точку M по кривой такъ, чтобы абсцисса ея x возрастала, то точка будетъ подниматься, такъ какъ $P_1M_1>PM$. Слѣ-

довательно, *разсматриваемая функція, возрастающая* (см. стр. 120) *при* $x=x_0$, *если ея производная* $f'(x)$ *положительная, при этомъ значеніи* x. *Напротивъ, если производная отрицательная* (чер. 3), *то функція будетъ убывающей*, такъ какъ касательная TM, образующая съ осью абсциссъ уголъ, имѣющій отрицательный тангенсъ (см. таблицу на стр. 114), образуетъ тупой уголъ съ осью абсциссъ. Поэтому съ увеличеніемъ x кривая опускается, т.-е. функція y убываетъ, такъ какъ $P_1M_1<PM$.



Чер. 3.

Наконецъ возможенъ еще третій случай, когда въ данной точкѣ M производная, слѣдовательно, и тангенсъ угла, между касательной и осью абсциссъ, равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ касательная горизонтальна, и кривая около точки M имѣетъ одинъ изъ видовъ, указанныхъ на чертежѣ 4-омъ. Очевидно, кривая 3-ья представляетъ функцію возрастающую въ точкѣ M, а кривая 4-ая представляетъ убывающую функцію.



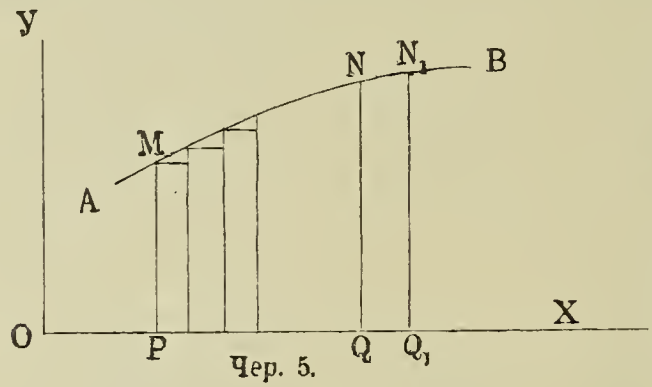
Чер. 4.

Что же касается кривой 1-ой, то очевидно, будетъ ли x возрастать или убывать, изображаемая нашей кривой функція y (ордината) будетъ всегда возрастать. Тогда говорятъ, что въ точкѣ M функція представляетъ *минимумъ* или имѣетъ *наименьшее значеніе*. Наоборотъ, очевидно, что кривая 2-ая представляетъ функцію, которая въ точкѣ M имѣетъ *наибольшее значеніе*, или, какъ говорятъ, представляетъ *максимумъ*.

Такимъ образомъ, *функція можетъ имѣть максимумъ или минимумъ только въ точкахъ, гдѣ производная равняется нулю*. Поэтому, если требуется опредѣлить максимумы и минимумы данной функціи $f(x)$, необходимо, прежде всего, опредѣлить, при какихъ значеніяхъ x производная $f'(x)$ равна нулю, т.-е. нужно рѣшить уравненіе $f'(x)=0$. Пусть x_1 будетъ корнемъ этого уравненія $f'(x_1)=0$; тогда, чтобъ выяснить, имѣемъ ли мы максимумъ или минимумъ при $x=x_1$, можно поступить слѣдующимъ обра-

зомъ. Вычисляемъ значеніе $f(x_1)$, а также $f(x'_1)$ и $f(x''_1)$, гдѣ x'_1 и x''_1 два какихъ-нибудь значенія x, одно меньше x_1, другое больше x_1, обращая лишь вниманіе на то, чтобы между ними и x_1 не было другихъ корней уравненія $f'(x)=o$. Если окажется, что $f(x_1)$ больше значеній $f(x'_1)$ и $f(x''_1)$, то $f(x_1)$ будетъ максимумомъ. Если $f(x_1)$ меньше и того и другого, то $f(x_1)$ будетъ представлять минимумъ, если же $f(x_1)$ окажется больше одного и меньше другого значенія, то наша функція не будетъ представлять ни максимума ни минимума.

5. Интегралъ и его свойства. Задача интегральнаго исчисленія заключается въ опредѣленіи функціи по данной ея производной или дифференціалу. Эта задача равнозначна опредѣленію площадей какихъ угодно фигуръ или, какъ говорятъ, квадратурѣ этихъ фигуръ. Мы покажемъ сейчасъ, что эта задача является обратною задачѣ отысканія производной совершенно такъ же, какъ, напримѣръ, задача дѣленія обратна задачѣ умноженія.



Чер. 5.

Пусть кривая линія AB (чер. 5) представляетъ функцію $y=f(x)$; *требуется опредѣлить площадь* $MNQP$.

Дѣлимъ PQ на нѣсколько частей, называя черезъ x_0 абсциссу точки P, черезъ x — абсциссу точки Q, а черезъ x_1, x_2,.. x_{n-1} абсциссы промежуточныхъ точекъ дѣленія. Изъ каждой точки дѣленія возставляемъ ординаты до пресѣченія съ нашей кривой линіей и строимъ на нихъ прямоугольники указаннымъ на чертежѣ образомъ, проводя отрѣзки прямыхъ линій параллельно оси абсциссъ. Беремъ сумму площадей всѣхъ этихъ прямоугольниковъ и затѣмъ ищемъ предѣлъ этой суммы, при предположеніи, что основаніе каждаго прямоугольника стремится къ нулю, при чемъ число прямоугольниковъ возрастаетъ безгранично. Что этотъ предѣлъ существуетъ, это можно считать почти очевиднымъ, такъ какъ онъ долженъ представлять площадь данной фигуры $MNQP$. Однако вполнѣ строгое доказательство этого недостаточно кратко для того, чтобъ приводить его здѣсь. Выражая разсматриваемую площадь алгебраической формулой, такъ какъ площадь каждаго прямоугольника выражается произведеніемъ его основанія на высоту, получаемъ, что

Площ. $(MNQP)$=Пред. $[f(x_0).(x_1-x_0)+f(x_1).(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1}).(x-x_{n-1})]$, при чемъ всѣ разности $x_i - x_{i-1}$ стремятся къ нулю. Вторую часть равенства условились писать сокращенно [1]) слѣдующимъ образомъ

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

и называютъ *опредѣленнымъ интеграломъ функціи $f(x)$, взятымъ между предѣлами отъ x_0 до x*. Числа x_0 и x называются нижнимъ и верхнимъ предѣломъ интегрированія; функція $f(x)$ называется подинтегральной функціей. Если интегралъ или площадь нужно вычислить только приближенно, то можно раздѣлить промежутокъ $PQ=x-x_0$ на n равныхъ частей и за приближенное значеніе площади принять не предѣлъ суммы, а самую сумму прямоугольниковъ, соотвѣтствующихъ этому дѣленію.

Докажемъ, что площадь фигуры $MNQP$ равна площади *прямоугольника, имѣющаго основаніе PQ, а высоту p, заключенную между наименьшей и наибольшей ординатой кривой MN.*

Если на основаніи PQ построить прямоугольникъ, имѣющій высотой наименьшую ординату линіи MN, то онъ весь будетъ внутри фигуры $MNQP$, и потому площадь его будетъ менѣе площади этой послѣдней. Напротивъ, если на томъ же основаніи PQ построить прямоугольникъ, котораго высота была бы равна наибольшей ординатѣ кривой линіи MN, то онъ окажется больше фигуры $MNQP$, которая будетъ помѣщаться внутри его. Поэтому площадь прямоугольника, имѣющаго основаніемъ PQ, можетъ оказаться равной нашей фигурѣ только въ томъ случаѣ, если высота его будетъ заключена между высотами разсмотрѣнныхъ нами прямоугольниковъ. Поэтому можемъ написать, что

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = (x-x_0).p\,,$$

гдѣ p есть нѣкоторое число, заключенное между наибольшимъ и наименьшимъ значеніемъ функціи $f(x)$, въ промежуткѣ отъ x_0 до x.

Замѣтимъ далѣе, что съ измѣненіемъ верхняго предѣла x нашего интеграла измѣняется и его значеніе. Слѣдовательно, интегралъ есть функція своего верхняго предѣла. При этомъ, если верхній предѣлъ дѣлается равнымъ нижнему, $x=x_0$, то интегралъ обращается въ нуль, такъ какъ вся фигура обращается въ линію PM, т.-е. разсматриваемая площадь обращается въ нуль. Докажемъ теперь теорему, что *производная интеграла*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

---

[1]) Знакъ $\int$ представляетъ растянутую первую букву S французскаго слова сумма.

разсматриваемаго какъ функція его верхняго предѣла, равна подинтегральной функціи $f(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы дадимъ верхнему предѣлу приращеніе Δx, такъ что вмѣсто x онъ обратится въ $x+\Delta x$, то площадь $MNQP$ замѣнится площадью, ограниченной попрежнему сверху данной кривой линіей, снизу осью абсциссъ, слѣва ординатой MP, но только справа вмѣсто NQ новая площадь будетъ ограничена прямой N_1Q_1. Такимъ образомъ приращеніе ΔS площади или интеграла S, соотвѣтствующее увеличенію верхняго предѣла интегрированія на Δx, равно площади NN_1Q_1Q, которая въ свою очередь можетъ быть выражена слѣдующимъ интеграломъ.

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx.$$

Этотъ интегралъ, въ силу предыдущаго, представится также формулой

$$\Delta S = (x + \Delta x - x)\,p_1 = p_1 \Delta x\ ,$$

гдѣ p_1 представляетъ число, заключенное между наибольшимъ и наименьшимъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ отъ значенія x до $x+\Delta x$. Поэтому величина отношенія приращенія функціи ΔS къ приращенію независимой перемѣнной Δx равна

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{p_1 \Delta x}{\Delta x} = p_1.$$

Предѣломъ же величины p_1, когда Δx стремится къ нулю, т.-е производной нашего интеграла, будетъ, очевидно, значеніе NQ; такъ какъ по мѣрѣ уменьшенія величины $\Delta x = QQ_1$, какъ наибольшее, такъ и наименьшее значеніе функціи на этомъ промежуткѣ будетъ стремиться къ величинѣ NQ, представляющей значеніе функціи $f(x)$, вслѣдствіе ея непрерывности.

Такимъ образомъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ обладаетъ двумя свойствами: *во-первыхъ, его производная равна* $f(x)$; *во-вторыхъ, онъ обращается въ нуль при* $x = x_0$. Этими двумя свойствами, какъ мы сейчасъ увидимъ, интегралъ вполнѣ опредѣляется и, на основаніи ихъ, можетъ быть вычисленъ. Предположимъ, дѣйствительно, что мы знаемъ какую-нибудь функцію $\varphi(x)$, производная которой равна $f(x)$. Ясно, что функція $\varphi(x)+C$, гдѣ C какая-нибудь постоянная величина, будетъ также имѣть производною $f(x)$, такъ какъ производная $\varphi(x)+C$ равна суммѣ производной $\varphi(x)$ и производной постоянной величины C, которая равна нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что и нашъ интегралъ имѣетъ слѣдующій видъ

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Остается опредѣлить постоянную C на основаніи второго условія, что, при $x=x_0$, нашъ интегралъ равенъ нулю. Слѣдовательно, должно имѣть мѣсто условіе $\varphi(x_0)+C=0$, которое показываетъ, что

$$C=-\varphi(x_0).$$

Подставляя опредѣленное такимъ образомъ значеніе C, находимъ окончательную формулу

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\varphi(x)-\varphi(x_0).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что *задача квадратуры площадей или вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ сводится къ вычисленію функціи по ея производной и затѣмъ къ составленію разности ея значенія для верхняго и нижняго предѣловъ интеграла.* Замѣтимъ, что функція $\varphi(x)+C$, которой производная равна $f(x)$, носитъ названіе *неопредѣленнаго интеграла* и обозначается знакомъ $\int f(x)dx$, такъ что пишутъ $\int f(x)dx=\varphi(x)+C$.

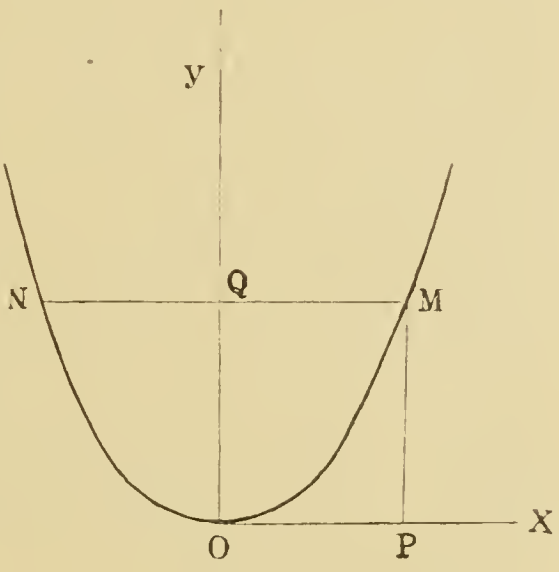
Укажемъ нѣсколько формулъ, которыя легко провѣрить, пользуясь извѣстными формулами дифференцированія,

$$\int A\,dx=Ax+C.\quad \int Ax\,dx=\frac{Ax^2}{2}+C.\quad \int Ax^m dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C.$$

6. Приложенія. Вычислимъ площадь сегмента NOM параболы (чер. 6), представленной уравненіемъ

$$y=Ax^2,$$

при чемъ NM параллельна оси абсциссъ. Вслѣдствіе симметріи параболы можемъ ограничиться вычисленіемъ площади MQO, а для этого достаточно вычислить площадь OMP и отнять ее изъ прямоугольника $OQMP$. Но площадь $OMP=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a Ax^2\,dx=\frac{Aa^3}{3}$, гдѣ a



Чер. 6

обозначаетъ величину отрѣзка OP или QM. Замѣчая далѣе, что $Aa^2=b$, гдѣ b обозначаетъ ординату PM, или отрѣзокъ OQ, въ силу уравненія параболы, получимъ, что площадь $OMP=\frac{Aa^2.a}{3}=\frac{b.a}{3}$, т.-е. что площадь разсматриваемаго криволинейнаго треугольника равна $\frac{1}{3}$ произведенія его основанія на вы-

соту. А такъ какъ площадь прямоугольника $OQMP$ равна ab, то площадь $MQO = ab - \frac{ab}{3} = \frac{2ab}{3}$. Откуда заключаемъ, что площадь всего искомаго параболическаго сегмента NOM равна $\frac{4}{3}$ произведенія его основанія NM на высоту OQ.

Рекомендуемыя руководства.

1) *Д. И. Горячевъ.* — Основанія Анализа Безконечно-малыхъ. 4-ое изданіе. Москва. 1911 г. Ц. 80 к.

2) *Г. Буркхардтъ.* — Начала Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленій и ихъ приложенія къ описанію явленій природы. Переводъ съ нѣмецкаго. Петербургъ. 1909 г. Ц. 2 р.

IX. ТЕОРІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

1. Опредѣленіе вѣроятностей.

Теорія вѣроятностей очень часто возбуждаетъ интересъ болѣе другихъ отдѣловъ математики. Въ самомъ названіи теоріи указывается, что предметомъ ея изученія служатъ неуловимыя, но важныя въ жизни понятія, какъ вѣроятность, возможность и случайность. Кажется, что цѣлью теоріи вѣроятностей служитъ желаніе угадать то, чего нельзя знать съ достовѣрностью. Въ этомъ кроется загадочность и привлекательность этой теоріи, возбуждающая въ то же время недовѣріе. Неужели есть наука, которая позволяетъ, напримѣръ, предсказать, который изъ двухъ игроковъ, садящихся за азартную игру (т.-е. за игру, исходъ которой зависитъ только отъ случая), обыграетъ другого?

Интересно выяснить, въ какой мѣрѣ и при какихъ условіяхъ выводы теоріи вѣроятностей могутъ имѣть практическое значеніе.

Прежде всего припомнимъ обычное употребленіе слова «вѣроятность». Вынимая одну карту изъ колоды (въ 52 карты), я считаю *мало вѣроятнымъ* угадать, что это будетъ за карта; *болѣе вѣроятно*, что я ошибусь.

Въ нашей жизни на каждомъ шагу сознательно или безсознательно (инстинктивно) мы оцѣниваемъ вѣроятности будущихъ событій и сообразно этому дѣйствуемъ.

Теорія вѣроятностей и есть та наука, которая устанавливаетъ общіе пріемы для сравненія степени вѣроятности различныхъ событій.

Положимъ, что вамъ предлагаютъ взять одинъ изъ пяти нумерованныхъ цифрами 1, 2, 3, 4, 5 свернутыхъ билетиковъ, ничѣмъ

не отличающихся по внѣшнему виду. Нѣтъ никакого основанія предполагать, что вы предпочтительнѣе вытянете одинъ номеръ, чѣмъ другой; появленіе каждаго номера слѣдуетъ считать *равно вѣроятнымъ* или *равно возможнымъ*. Выражаясь математическимъ языкомъ, можно сказать, что вѣроятности каждаго изъ этихъ пяти случаевъ равны между собой. Вмѣстѣ всѣ эти случаи являются *единственно возможными*, такъ какъ выборъ ограниченъ только этими пятью билетиками. Если вамъ скажутъ, что только № 1 даетъ вамъ право на выигрышъ нѣкоторой суммы денегъ, вы, конечно, будете считать свой выигрышъ болѣе вѣроятнымъ, если число всѣхъ билетовъ равно 5, чѣмъ если это число будетъ увеличено до 10. Однако, если вы будете знать, что № 6 изъ прибавленныхъ тоже выигрышный (на ту же сумму), то вы согласитесь, что ваши шансы (вѣроятность) на выигрышъ остались тѣ же, и вамъ совершенно безразлично, предлагаютъ ли вамъ вытягивать изъ 5 билетовъ съ однимъ выигрышнымъ или изъ 10 билетовъ съ двумя, или изъ 15 билетовъ съ тремя и т. д. Такимъ образомъ, вѣроятность какого-нибудь событія A (выигрыша) зависитъ только отъ отношенія числа случаевъ, благопріятствующихъ событію (выигрышныхъ билетовъ) A, къ общему числу равновозможныхъ и единственно возможныхъ случаевъ. Чѣмъ это отношеніе, т.-е. дробь, у которой числителемъ служитъ число благопріятныхъ случаевъ, а знаменателемъ — общее число случаевъ, больше, тѣмъ вѣроятность въ общепринятомъ смыслѣ больше. Такимъ образомъ, это отношеніе можетъ вполнѣ служить мѣрой для сравненія степени вѣроятности различныхъ событій. Поэтому математики условились называть *математической вѣроятностью событія* A указанное выше *отношеніе числа случаевъ, благопріятныхъ событію* A, *къ общему числу всѣхъ равно возможныхъ случаевъ*.

Слѣдовательно, математическая вѣроятность всегда выражается правильною дробью (положительнымъ числомъ, меньшимъ единицы). Если событіе непзбѣжно, т.-е. достовѣрно, то его вѣроятность равна единицѣ, такъ какъ *всѣ* возможные случаи ему благопріятствуютъ. Напротивъ, если событіе невозможно, то математическая вѣроятность его равна нулю, такъ какъ число случаевъ, благопріятныхъ ему, равно нулю.

Теперь легко отдать себѣ отчетъ, въ чемъ долженъ заключаться основной пріемъ вычисленія вѣроятностей. *Необходимо прежде всего установить общее число всѣхъ случаевъ, признаваемыхъ равновозможными, которые могутъ представиться*, а затѣмъ пересчитать число только тѣхъ *изъ нихъ, при которыхъ событіе* A *происходитъ*. Если число первыхъ обозначимъ черезъ n, а

число вторыхъ—черезъ m, то *тогда вѣроятность событія A равна* $\frac{m}{n}$. Напримѣръ, я бросаю двѣ кости (костью называется кубикъ, у котораго на каждой сторонѣ поставлены соотвѣтственно цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6, обозначающія число очковъ). Требуется опредѣлить, какова вѣроятность, что сумма очковъ на верхнихъ сторонахъ обѣихъ костей составитъ 10. Мы полагаемъ равно вѣроятнымъ, что каждая кость упадетъ на любую изъ шести сторонъ. Поэтому можетъ представиться всего только 36 различныхъ равновозможныхъ случаевъ, такъ какъ каждому изъ 6-ти различныхъ очковъ одной кости можетъ соотвѣтствовать одинъ любой изъ 6-ти очковъ второй кости.

Изъ всѣхъ 36 равновозможныхъ случаевъ выпаденію требуемой суммы 10 благопріятствуютъ только слѣдующихъ три случая: 1) 1-ая кость—6, 2-ая кость—4; 2) 1-ая кость—5, 2-ая кость—5; 3) 1-ая кость—4, 2-ая кость—6. Такъ какъ на общее число 36 всѣхъ равновозможныхъ случаевъ только 3 случая являются благопріятствующими ожидаемому событію, то его искомая вѣроятность равна

$$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

Вообще, сумма выпадающихъ на костяхъ очковъ можетъ быть равна одному изъ 11 слѣдующихъ чиселъ: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Обозначая черезъ p_2 вѣроятность суммы 2, черезъ p_3—вѣроятность суммы 3 и т. д., наконецъ, обозначая черезъ p_{12} вѣроятность суммы 12, найдемъ, точно такъ же подсчитывая число случаевъ, благопріятныхъ данной суммѣ (общее число случаевъ *36* остается неизмѣнно), что

$$p_2=\frac{1}{36};\quad p_3=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};\quad p_4=\frac{3}{36}=\frac{1}{12};\quad p_5=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

$$p_6=\frac{5}{36};\quad p_7=\frac{6}{36}=\frac{1}{6};\quad p_8=\frac{5}{36};\quad p_9=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

$$p_{10}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12};\quad p_{11}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18};\quad p_{12}=\frac{1}{36}.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что вѣроятности выпаденія на костяхъ той или иной суммы очковъ, далеко не равны, какъ это могло бы показаться поверхностному наблюдателю. Оказывается, что наиболѣе вѣроятно выпаденіе суммы 7, такъ какъ вѣроятность этого имѣетъ наибольшую величину, $p_7=\frac{1}{6}$. Наименѣе вѣроятно наступленіе суммы 2 и суммы 12 $\left(p_2=p_{12}=\frac{1}{36}\right)$. Въ виду того, что непосредственный подсчетъ всѣхъ равно воз-

можныхъ случаевъ и тѣхъ изъ нихъ, которые благопріятствуютъ данному событію, часто бываетъ затруднителенъ, то для облегченія вычисленія вѣроятности обыкновенно пользуются *теоремами о сложеніи и умноженіи вѣроятностей*.

2. Сложеніе вѣроятностей.

Если вѣроятность событія A равна числу p, а вѣроятность событія A_1 равна числу p_1, при чемъ оба эти событія несовмѣстимы (т.-е. A не можетъ наступить, если наступило A_1, и наоборотъ), то вѣроятность P того, что наступитъ, по крайней мѣрѣ, одно изъ событій A или A_1, равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій, т.-е. $P=p+p_1$.

Напримѣръ, если изъ ста билетовъ лотереи [1]) я купилъ три билета, а мой товарищъ — семь, тогда вѣроятность p моего выигрыша, который я назову событіемъ A, равняется $p=\frac{3}{100}$ (такъ какъ изъ ста равновозможныхъ случаевъ только три благопріятствуютъ событію A). Вѣроятность p_1 выигрыша моего товарища (событіе A_1) равняется $p_1=\frac{7}{100}$. Вѣроятность P, что выиграетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ насъ двоихъ, получится, если замѣтить, что у насъ обоихъ вмѣстѣ билетовъ всего десять $(7+3)$, т.-е. 10 случаевъ изъ 100 благопріятствуютъ тому, чтобы выигрышъ остался за кѣмъ-нибудь изъ насъ двоихъ.

Поэтому $P=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. Но это число есть не что иное, какъ сумма $p+p_1=\frac{3}{100}+\frac{7}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$.

Точно такъ же, если разсматриваемъ нѣсколько несовмѣстимыхъ событій, A_1 съ вѣроятностью p_1, A_2 съ вѣроятностью p_2, A_3 съ вѣроятностью p_3, то вѣроятность P, что наступитъ одно изъ этихъ событій, равняется $P=p_1+p_2+p_3$. Напримѣръ, вѣроятность p_1, что я выну изъ колоды въ 52 карты короля, равняется $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, такъ какъ въ колодѣ 4 короля. Вѣроятность p_2 вынуть даму также равна $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Наконецъ вѣроятность p_3 вынуть ва-

[1]) Лотереей называется игра, которая заключается въ томъ, что какое-нибудь лицо, общество или государство, продаетъ опредѣленное число нумерованныхъ билетовъ; затѣмъ производится *тиражъ* (т.-е. вытягиваніе номеровъ какимъ-нибудь способомъ, обезпечивающимъ равную вѣроятность всѣмъ номерамъ). Обладатель вытянутаго номера получаетъ опредѣленный выигрышъ.

лета тоже равняется $\frac{1}{13}$. Слѣдовательно, вѣроятность P вынуть какую-нибудь фигуру (короля, даму или валета) равняется $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}$, т.-е. $P=\frac{3}{13}$. Въ частномъ случаѣ, если одно изъ событій *непремѣнно* должно произойти, т.-е. событія A_1, A_2, A_3 *единственно возможныя*, такъ что одно изъ нихъ (неизвѣстно—какое) должно наступить непремѣнно, то $P=1$. Другими словами, *сумма вѣроятностей единственно возможныхъ, несовмѣстимыхъ событій равна единицѣ.*

Напримѣръ, мы видѣли (стр. 164), что, при бросаніи двухъ костей, число очковъ на верхнихъ сторонахъ обѣихъ костей должно непремѣнно составить одну изъ одиннадцати суммъ: 2, 3, 4... или 12. Слѣдовательно, легко видѣть, что $p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8+p_9+p_{10}+p_{11}+p_{12}=1$. Дѣйствительно, согласно вычисленнымъ значеніямъ всѣхъ p, находимъ, что $\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=1$.

3. Умноженіе вѣроятностей.

Если вѣроятность нѣкотораго событія A равна p, а вѣроятность другого событія B, независящаго отъ A, равна q, то вѣроятность P, что произойдутъ оба событія (A и B) равна произведенію p.q.

Для того, чтобъ убѣдиться въ правильности высказанной теоремы, разсмотримъ такой примѣръ. Я покупаю 1 билетъ одной лотереи, въ которой всего 25 номеровъ, и изъ которыхъ одинъ только выигрываетъ. Кромѣ того, я покупаю 3 билета другой лотереи, въ которой на 60 номеровъ также только одинъ выигрышный. Спрашивается, какова вѣроятность выиграть и въ одной и въ другой лотереяхъ. Ясно, что вѣроятность выигрыша въ первой лотереѣ $p=\frac{1}{25}$; а вѣроятность выигрыша во второй лотереѣ $q=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$. Вычислимъ далѣе, сколько всего можетъ представиться равно возможныхъ случаевъ.

Въ первой лотереѣ вытягивается 1 номеръ, во второй — любой изъ 60 номеровъ (60 случаевъ).

Въ первой лотереѣ вытягивается 2 номеръ, во второй—любой изъ 60 номеровъ (60 случаевъ) и т. д.

Въ первой лотереѣ вытягивается 25 номеръ, во второй—любой изъ 60 (60 случаевъ).

Итого случаевъ можетъ быть $60\times 25=1.500$.

Благопріятныхъ же случаевъ будетъ всего 3, когда въ первой лотереѣ вытянутъ единственный имѣющійся у меня на рукахъ номеръ и въ то же время и во второй лотереѣ вытянутъ одинъ изъ трехъ моихъ номеровъ. Поэтому вѣроятность одновременнаго выигрыша въ обѣихъ лотереяхъ равна $P=\frac{3}{1500}=$ $=\frac{1}{500}$ (эта вѣроятность такъ же мала, какъ если бъ я купилъ 1 билетъ лотереи съ 500 номерами при одномъ выигрышномъ). Но это число $P=\frac{1}{500}$ равно какъ разъ *произведенію вѣроятностей* $pq=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{500}$.

Изъ теоремы умноженія вѣроятностей вытекаетъ, между прочимъ, что вѣроятность наступленія двухъ независимыхъ событій всегда меньше, чѣмъ вѣроятность каждаго изъ нихъ (если только событія эти не достовѣрны), такъ какъ произведеніе двухъ правильныхъ дробей $p.q$ всегда меньше каждаго изъ сомножителей.

Само собой понятно, что если вмѣсто двухъ событій мы будемъ разсматривать какое угодно число независимыхъ событій, то вѣроятность наступленія, напримѣръ, трехъ событій, имѣющихъ соотвѣтственно вѣроятности p_1, p_2, p_3, выразится произведеніемъ $p_1.p_2.p_3$. Напримѣръ, если я бросаю 3 монеты (одновременно или одну и ту же монету три раза подъ рядъ), какова вѣроятность, что всѣ три монеты упадутъ «орломъ» вверхъ? Вѣроятность, что первая монета упадетъ орломъ вверхъ, равна $\frac{1}{2}$, та же вѣроятность для второй монеты — тоже $\frac{1}{2}$, и для третьей равна тоже $\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, вѣроятность P наступленія всѣхъ трехъ этихъ событій выражается формулой произведенія вѣроятностей: $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. Точно такъ же увидимъ, что при бросаніи монеты 10 разъ подъ рядъ вѣроятность, что она всѣ 10 разъ упадетъ «орломъ» вверхъ, будетъ равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$. Такимъ образомъ, вѣроятность этого событія немного менѣе вѣроятности выиграть въ лотерею съ 1.000 нумерами при одномъ выигрышѣ.

На основаніи вышеизложеннаго, читатель самъ сумѣетъ рѣшать задачи въ родѣ слѣдующихъ: Какова вѣроятность p, что, при бросаніи монеты два раза, 1 разъ выпадетъ «орелъ» и 1 разъ

«рѣшетка»? (Отвѣтъ, $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$). Какова вѣроятность p, что при бросаніи монеты 4 раза, по крайней мѣрѣ, 1 разъ выйдетъ «орелъ»? (Отвѣтъ. $p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$).

Для примѣра разсмотримъ слѣдующую игру въ карты: изъ игральной колоды въ 52 карты вы вынимаете по одной картѣ; за неугаданную карту я вамъ плачу 1 копѣйку, и за угаданную карту вы платите мнѣ 1 рубль.

Ограничимся вычисленіемъ вѣроятности вашего выигрыша, если мы сыграемъ сто партій. Для того, чтобъ вы не остались въ убыткѣ, *необходимо, чтобъ вы выиграли всѣ сто партій*, такъ какъ достаточно вамъ проиграть хоть одну, чтобъ вы должны были уплатить мнѣ 1 рубль, и тогда, даже выигрывая остальныя 99 партій, вы за нихъ получите только 99 копѣекъ и, слѣдовательно, вашъ убытокъ все же составитъ 1 копѣйку. (Разумѣется, если бъ вы проиграли болѣе одной партіи, то вашъ убытокъ могъ бы быть довольно значительнымъ).

Какъ же велика вѣроятность, что вы выиграете всѣ 100 партій? Вѣроятность выигрыша первой партіи, какъ и всякой отдѣльной партіи, равна $\frac{51}{52}$; исходъ каждой партіи совершенно не зависитъ отъ остальныхъ. Поэтому вѣроятность того, что произойдутъ два независимыхъ событія—выигрышъ вами первой и второй партіи, составитъ $\left(\frac{51}{52}\right) \cdot \left(\frac{51}{52}\right) = \left(\frac{51}{52}\right)^2$. Вѣроятность того, что вы выиграете три партіи подъ рядъ, составитъ $\left(\frac{51}{52}\right)^3$; наконецъ, вѣроятность, что произойдутъ всѣ сто независимыхъ событій, т.-е. что вы выиграете всѣ сто партій, равняется $\left(\frac{51}{52}\right)^{100}$. Вычисляя это число при помощи пятизначныхъ логарифмическихъ таблицъ находимъ

$$\left(\frac{51}{52}\right)^{100} = \frac{1}{7} \text{ (съ точностью до } {}^1/_{1000}).$$

Такимъ образомъ, вѣроятность удачнаго исхода игры для васъ такъ же мала, какъ если бъ вамъ предложили тянуть одинъ билетъ изъ семи, среди которыхъ *шесть пустыхъ и только одинъ выигрышный*. Можно доказать, какъ мы увидимъ дальше, что чѣмъ больше вы сыграете партій, тѣмъ больше вѣроятность, что вы останетесь въ убыткѣ и притомъ весьма значительномъ. Напримѣръ, вѣроятность, что послѣ 10.000 партій (если около мѣсяца всѣ вечера посвящать игрѣ), вы проиграете, по крайней мѣрѣ,

30 рублей, очень велика—она болѣе, чѣмъ 0,99997; вѣроятность же, что вы выиграете хоть 1 копѣйку менѣе, чѣмъ 0,00001, т.-е. она такъ же мала, какъ если бъ у васъ былъ одинъ билетъ изъ лотереи со 100.000 билетовъ. Вы увидите, что *по мѣрѣ увеличенія числа партій можно предсказать неизбѣжность вашего полнаго разоренія при игрѣ на предложенныхъ условіяхъ (какъ бы вы ни были богаты).*

Наиболѣе важная задача теоріи вѣроятностей именно заключается въ изслѣдованіи такихъ событій B, связанныхъ съ событіемъ A, имѣющимъ извѣстную вѣроятность, которыя являются столь вѣроятными, что на практикѣ наступленіе ихъ можно считать достовѣрнымъ. Въ разсмотрѣнномъ выше примѣрѣ событіемъ A служилъ выигрышъ вами одной партіи, вѣроятность котораго $\frac{51}{52}$, событіемъ B служилъ неудачный окончательный исходъ игры для васъ на предложенныхъ условіяхъ, если число сыгранныхъ партій становится чрезвычайно велико.

Теорія вѣроятностей прекрасно позволяетъ уяснить себѣ этотъ постепенный переходъ отъ вѣроятности къ достовѣрности, отъ незнанія—къ знанію... Я бросаю кость; вѣроятность, что на верхней ея сторонѣ будетъ 6 очковъ, равна $\frac{1}{6}$; никто не станетъ отрицать, что это легко можетъ случиться. Вѣроятность, что, бросая кость два раза подъ рядъ, я получу по шести очковъ, равна $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$; это тоже можетъ случиться. Но вѣроятность, что сторона съ 6 очками выпадетъ 10 разъ подъ рядъ, равна уже всего $\left(\frac{1}{6}\right)^{10} < \frac{1}{60.000.000}$ (одна шестидесятимилліонная). Вѣроятность этого событія очень мала. Однако все-таки возможно себѣ представить, что подобный случай можетъ произойти. Но если кость совершенно правильна, то я готовъ считать невозможнымъ, чтобъ бросая ее въ теченіе двухъ часовъ (примѣрно, сто разъ подъ рядъ), я постоянно получалъ бы *шесть* очковъ; вѣроятность этого событія равна $\left(\frac{1}{6}\right)^{100}$, т.-е. выражается дробью, числитель которой равенъ единицѣ, а знаменатель—число, состоящее изъ 78 цифръ. Приведенные примѣры показываютъ, какъ изъ разсмотрѣнія вѣроятностей ряда событій можно выводить невозможность или неизбѣжность наступленія нѣкоторыхъ другихъ событій[1]). Вышеизложенное приводитъ къ слѣдующему заключенію:

[1]) Съ той достовѣрностью, какая вообще доступна человѣческому знанію.

Если при нѣкоторомъ опытѣ событіе A (6 очковъ на верхней сторонѣ кости) можетъ произойти или не произойти, то при единичномъ опытѣ нельзя опредѣленно сказать, произойдетъ оно или нѣтъ; но, повторяя опытъ достаточно большое число разъ, можно съ вѣроятностью, граничащею съ достовѣрностью, утверждать, что событіе A не будетъ повторяться каждый разъ.

Болѣе того, можно дать болѣе точныя указанія, чтобы судить, какъ часто должно происходить событіе A при многократномъ повтореніи опыта, если вѣроятность событія A намъ извѣстна. Эти указанія даетъ теорема, открытая болѣе двухсотъ лѣтъ тому назадъ Яковомъ *Бернулли*, которая представляетъ собой простѣйшій случай такъ называемаго *закона большихъ чиселъ*.

4. Теорема Бернулли.

Если при нѣкоторомъ опытѣ вѣроятность событія A равна p, то, повторяя опытъ достаточно большое число разъ, можно утверждать, что отношеніе числа опытовъ, при которыхъ событіе A произойдетъ, къ общему числу произведенныхъ опытовъ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ числа p.

Напримѣръ, при бросаніи кости весьма большое число разъ, можно утверждать, что *приблизительно* $\frac{1}{6}$ числа всѣхъ бросаній приведетъ къ сторонѣ съ шестью очками; такая же доля прійдется и на сторону съ пятью очками и на каждую изъ остальныхъ; такъ, если число бросаній равно 18.000, то каждая сторона выпадетъ, приблизительно, $\frac{18000}{6} = 3.000$ разъ. Такимъ образомъ, равно вѣроятныя событія, при многократныхъ опытахъ, случаются, приблизительно, одинаково часто.

Здѣсь нѣтъ возможности приводить доказательства теоремы Бернулли; замѣчу только, что выраженію «приблизительно», встрѣчающемуся нѣсколько разъ въ предыдущихъ строкахъ, можно придать вполнѣ точный математическій смыслъ. А именно, утверждать, что сторона шесть выпадетъ ровно 3.000 разъ, въ нашемъ примѣрѣ, конечно, нельзя; но почти съ достовѣрностью можно сказать, что она выпадетъ не менѣе 2.500 разъ и не болѣе 3.500 разъ, т.-е., называя черезъ m число выпаденій шестерки, а черезъ n — число всѣхъ опытовъ, заключаемъ, что $3.500 > m > 2.500$. Поэтому отношеніе $\frac{m}{n}$ ($n = 18.000$) не болѣе, чѣмъ $\frac{3500}{18000} = \frac{7}{36}$, и не менѣе, чѣмъ $\frac{2500}{18000} = \frac{5}{36}$. Итакъ, мы утвер-

ждаемъ, что $\frac{7}{36} > \frac{m}{n} > \frac{5}{36}$. Слѣдовательно, отношеніе числа выпаденій стороны шесть къ общему числу бросаній отличается отъ вѣроятности $p = \frac{1}{6}$, выпаденія шестерки при одномъ метаніи кости, меньше, чѣмъ на $\frac{1}{36}$ $\left(\text{такъ какъ } \frac{7}{36} - \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ и } \frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36}\right)$.

Если бы число опытовъ еще увеличить, то можно было бы утверждать, что разность между отношеніемъ $\frac{m}{n}$, числа выпаденій стороны шесть къ общему числу бросаній, и дробью $\frac{1}{6}$ $\left(p = \frac{1}{6}\right)$ должна стать еще меньше. Такъ, напримѣръ, если $n = 450.000$, то эта разность меньше $\frac{1}{180}$ и т. д.

Различныя обобщенія теоремы Бернулли были предметомъ изслѣдованій многихъ выдающихся математиковъ, изъ которыхъ первое мѣсто (послѣ Бернулли) занимаетъ французскій ученый Лапласъ (1749—1827 г.). Изъ русскихъ математиковъ въ разсматриваемой области особенно знаменитъ П. Л. Чебышевъ (1821—1894 г.).

5. Математическое ожиданіе.

Если при нѣкоторомъ опытѣ, въ случаѣ появленія событія A, котораго вѣроятность равна p, я выигрываю k копѣекъ, то говорятъ, что при данномъ опытѣ (или игрѣ) мое *математическое ожиданіе* выигрыша равно $p \cdot k$, т.-е. *произведенію выигрываемой суммы на вѣроятность выигрыша.* Если же, въ случаѣ появленія событія A, я проигрываю k копѣекъ, то говорятъ, что мое математическое ожиданіе проигрыша равно $p \cdot k$.

Если математическое ожиданіе выигрыша каждой отдѣльной партіи для какого-нибудь игрока болѣе математическаго ожиданія проигрыша, то можно почти съ достовѣрностью утверждать, что послѣ достаточно значительнаго числа сыгранныхъ партій онъ останется въ выигрышѣ; напротивъ, если математическое ожиданіе проигрыша превышаетъ математическое ожиданіе выигрыша, то игрокъ останется въ убыткѣ. Въ первомъ случаѣ игру называютъ выгодной для нашего игрока, во второмъ—невыгодной.

Для того, чтобъ убѣдиться въ правильности высказаннаго положенія, разсмотримъ нашъ прежній примѣръ (см. стр. 168). По условію предложенной мной игры вѣроятность, что вы проиграете

1 рубль (100 копѣекъ) составляетъ $\frac{1}{52}$, такъ что ваше математическое ожиданіе проигрыша равно $\frac{1}{52} \cdot 100 = \frac{100}{52}$. Съ другой стороны, вѣроятность выиграть 1 копѣйку равна $\frac{51}{52}$; поэтому ваше математическое ожиданіе выигрыша составитъ $\frac{51}{52} \cdot 1 = \frac{51}{52}$. Такимъ образомъ, мы видимъ, что ваше математическое ожиданіе проигрыша больше, чѣмъ математическое ожиданіе выигрыша $\left(\frac{100}{52} > \frac{51}{52}\right)$. Но, на основаніи теоремы Бернулли, мы можемъ сказать, что, при весьма большомъ числѣ партій, приблизительно $\frac{1}{52}$ всѣхъ партій будетъ проиграна вами; напротивъ, гораздо большее число партій, приблизительно $\frac{51}{52}$ всего числа, будетъ вами выиграна. Слѣдовательно, если обозначимъ черезъ n число сыгранныхъ партій, то весь вашъ (валовой) проигрышъ, приблизительно, составитъ $\frac{n}{52} \cdot 100$ копѣекъ (т.-е. произведеніе числа проигранныхъ партій на сумму отдѣльнаго проигрыша); весь же (валовой) выигрышъ составитъ $\frac{51n}{52}$ копѣекъ. Такимъ образомъ послѣ очень большого числа n партій вашъ убытокъ будетъ, приблизительно, равенъ

$$\frac{n}{52} \cdot 100 - \frac{51n}{52} = \frac{49n}{52}$$ копѣйкамъ.

Напримѣръ, послѣ 10.000 партій вы проиграете, вѣроятно, около [1]) $\frac{49 \cdot 10000}{52}$ копѣекъ, что составитъ 94 р. 23 к.

Ясно, что если въ игрѣ выигрышъ одного игрока равенъ проигрышу другого, то игра, выгодная для одного, невыгодна для другого. Игра будетъ безобидной только въ томъ случаѣ, если математическое ожиданіе выигрыша каждаго игрока равно математическому ожиданію его проигрыша. Напримѣръ, указанная выше игра была бы безобидной, если бы вмѣсто рубля вы уплачивали бы своему партнеру только 51 копѣйку; при такихъ условіяхъ математическое ожиданіе выигрыша, такъ же, какъ и проигрыша, для каждаго изъ васъ составляетъ $\frac{51}{52}$.

---

[1]) Быть-можетъ, вы проиграете меньше, а, можетъ-быть, и больше; во всякомъ случаѣ, въ проигрышѣ, по крайней мѣрѣ 30 руб. (см. стр. 168—169), вы можете быть увѣрены.

Не слѣдуетъ думать, однако, что, повторяя очень большое число разъ безобидную игру, вы ничѣмъ не рискуете. Напротивъ, можно доказать, что и въ безобидной игрѣ одинъ изъ игроковъ (только неизвѣстно—который, если игра совершенно безобидна) послѣ достаточно большого числа партій непремѣнно будетъ въ проигрышѣ.

6. О страхованіи.

Теорія страхованія основывается на тѣхъ же положеніяхъ, что и теорія азартныхъ игръ; нужно только уяснить себѣ, какъ можетъ быть вычислена вѣроятность такихъ случайныхъ явленій, какъ смерть, болѣзнь, пожаръ и т. д.

До того, какъ мы познакомились съ теоремой Бернулли, у насъ не было другого способа для вычисленія вѣроятности, кромѣ подсчета общаго числа всѣхъ равно возможныхъ случаевъ и тѣхъ изъ нихъ, которые благопріятствуютъ разсматриваемому событію. Но этотъ пріемъ не всегда примѣнимъ. Какъ опредѣлить, напримѣръ, какова вѣроятность, что я умру въ теченіе этого года? Для рѣшенія этого и подобныхъ ему вопросовъ мы воспользуемся слѣдующей теоремой, обратной теоремѣ Бернулли:

Если при многократномъ повтореніи нѣкотораго опыта отношеніе числа появленій событія A къ общему числу опытовъ весьма мало отличается отъ дроби p, то съ вѣроятностью, граничащей съ достовѣрностью, можно утверждать, что вѣроятность появленія событія A, при единичномъ опытѣ, равна приблизительно p.

Извѣстно, напримѣръ, что если съ начала года (мысленно) выдѣлить значительную группу лицъ опредѣленнаго возраста, то отношеніе числа лицъ данной группы, умершей до конца года, къ общему разсматриваемому числу всегда приблизительно одно и то же (для даннаго возраста и въ данной странѣ). Такъ, въ Россіи изъ тысячи человѣкъ 20-ти лѣтъ въ теченіе года умираетъ приблизительно 7 человѣкъ, изъ тысячи человѣкъ 60-ти лѣтъ въ теченіе года умираетъ 35 человѣкъ. Въ первомъ случаѣ, при тысячѣ опытовъ, наступаетъ 7 смертей, слѣдовательно, вѣроятность умереть въ теченіе года для 20-лѣтняго юноши равна, приблизительно, 0,007; напротивъ, для шестидесятилѣтняго старика эта вѣроятность составляетъ 0,035 (въ 5 разъ больше) и затѣмъ быстро растетъ съ каждымъ годомъ.

Благодаря тому, что вѣроятность смерти для лицъ даннаго возраста выражается болѣе или менѣе опредѣленнымъ числомъ, возможно существованіе и процвѣтаніе такъ называемыхъ *Страховыхъ Обществъ*. Одинъ изъ наиболѣе распространенныхъ видовъ страхованія жизни заключается въ томъ, что лицо (страхователь),

желающее обезпечить свою семью опредѣленной суммой денегъ, которую въ случаѣ его смерти должно уплатить Страховое Общество, дѣлаетъ этому послѣднему ежегодные взносы. Очевидно, что эту сдѣлку можно разсматривать какъ азартную игру, въ которой Страховое Общество получаетъ ежегодный выигрышъ въ видѣ взноса. Слѣдовательно, вѣроятность каждаго выигрыша равна вѣроятности, что страхователь доживетъ до назначеннаго при взносѣ срока. Напротивъ, проигрышъ Общества равенъ суммѣ, которую оно обязуется уплатить наслѣдникамъ послѣ смерти страхователя. Не вдаваясь въ подробности вычисленія, которыя нѣсколько усложняются коммерческими расчетами процентовъ, мы видимъ, что размѣръ ежегоднаго взноса можетъ быть всегда такъ опредѣленъ, чтобы сдѣлка между страхователемъ и Страховымъ Обществомъ была безобидна въ указанномъ выше смыслѣ, т.-е. математическое ожиданіе выигрыша для каждаго изъ участниковъ сдѣлки должно быть равно математическому ожиданію его проигрыша. Въ дѣйствительности, взносы разсчитываются такъ, чтобы «игра» была выгодной для Страхового Общества, какъ для всякаго коммерческаго предпріятія, которое должно покрывать свои расходы и получать нѣкоторую прибыль, а также и для того, чтобъ обезпечить Страховое Общество и страхователя отъ возможности стеченія несчастныхъ обстоятельствъ (напримѣръ, эпидемій, временно увеличивающихъ смертность населенія), такъ какъ необходимо, чтобы Страховое Общество могло и при этихъ неблагопріятныхъ обстоятельствахъ немедленно выполнять взятыя имъ обязательства.

Предположимъ, напримѣръ, что старикъ 60-ти лѣтъ страхуетъ свою жизнь только на одинъ годъ на сумму 10.000 руб. (т.-е. сумма 10.000 руб. должна быть уплачена его семьѣ лишь въ случаѣ, если онъ умретъ въ теченіе года). Такъ какъ взносъ, который обозначимъ черезъ x, онъ дѣлаетъ немедленно, то вѣроятность выигрыша для Страхового Общества равна единицѣ (достовѣрность), а математическое ожиданіе выигрыша равно $1 . x = x$. Съ другой стороны, Страховое Общество проиграетъ 10.000 рублей, если старикъ умретъ въ теченіе года; но вѣроятность этого, какъ мы видѣли, равна 0,035; поэтому математическое ожиданіе проигрыша составляетъ $0{,}035 . 10000 = 350$. Для безобидности нужно, чтобъ $x = 350$ рублямъ. Въ дѣйствительности, по указаннымъ выше причинамъ, взносъ будетъ нѣсколько больше. Очевидно, что если страхователь моложе, то его взносъ долженъ быть меньше, такъ какъ вѣроятность его смерти также меньше.

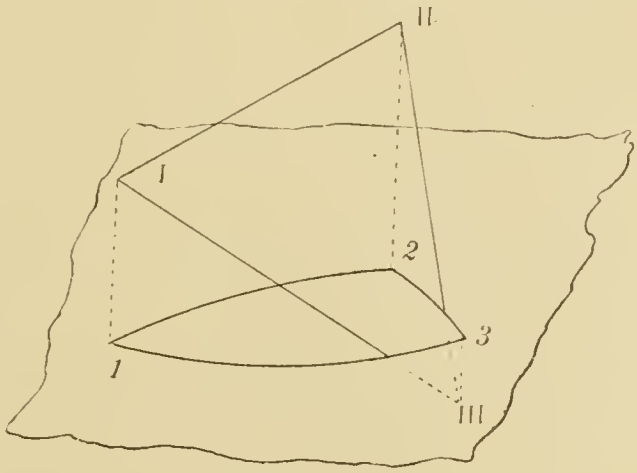
Землемѣріе.

1. Карта и планъ.

Земля похожа на малоотличающійся отъ шара эллипсоидъ вращенія, сжатый у полюсовъ [1]). Сжатіе и всѣ неровности ея поверхности слишкомъ незначительны сравнительно съ величиною ея. Если бы для изображенія земли взять глобусъ діаметромъ въ 1 метръ, то достаточно было бы отъ экватора къ полюсамъ снять постепенно увеличивающійся и достигающій толщины около $1^1/_2$ mm слой, чтобы представить сжатіе земли, и сдѣлать возвышенія или углубленія не болѣе $^2/_3$ mm, чтобы изобразить неровности видимой, такъ называемой физической поверхности.

При разсмотрѣніи многихъ вопросовъ эллипсоидъ съ такимъ небольшимъ сжатіемъ можно считать шаромъ.

Если черезъ точки I, II, III (черт. 1) физической поверхности земли проведемъ отвѣсныя линіи, то онѣ направятся по радіусамъ этого шара и встрѣтятъ его поверхность въ точкахъ 1, 2, 3. Проведя дуги большихъ круговъ черезъ эти точки, образуемъ фигуру 1, 2, 3, называемую горизонтальной *сферической проекціею* фигуры I, II, III... Если знать эту проекцію, то можно изобразить ее на глобусѣ; если затѣмъ въ этихъ точкахъ глобуса наложить возвышенія соотвѣтствующія 1I, 2II, и сдѣлать углубленія соотвѣтственно 3III, то получимъ изображеніе части физической поверхности земли.

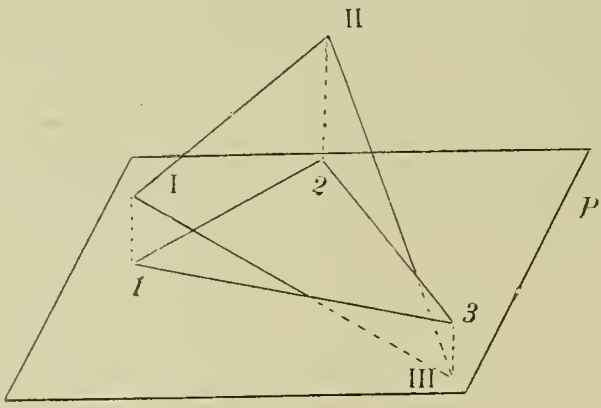


Черт. 1.

---

[1]) При вращеніи круга около діаметра образуется шаръ; если же станемъ вращать эллипсъ (см. стр. 133 черт. 7) вокругъ малой оси, то образуется тѣло, называемое сжатымъ эллипсоидомъ вращенія (см. стр. 139, черт. 11).

Глобусъ нужно было бы сдѣлать слишкомъ большимъ, чтобы отчетливо представить даже крупные участки земли, а большой глобусъ было бы неудобно разсматривать. Поэтому поверхность земли необходимо изображать по частямъ на плоскости, напримѣръ, на бумагѣ. Но такъ какъ поверхность шара или его часть нельзя развернуть такъ, чтобы она вполнѣ сливалась съ плоскостью, то при изображеніи на бумагѣ видъ сферической проекціи приходится измѣнять по опредѣленнымъ правиламъ. Такое нѣсколько измѣненное изображеніе сферической проекціи физической поверхности земли называется *картою*. Такъ какъ радіусъ земли болѣе 6.000 километровъ, то небольшія части сферической поверхности можно принимать за плоскія. На такихъ небольшихъ разстояніяхъ отвѣсныя линіи можно считать параллельными и плоскую горизонтальную проекцію можно образовать слѣдующимъ образомъ: вообразимъ горизонтальную плоскость (черт. 2) *P*, и изъ точекъ I, II, III опустимъ на эту плоскость перпендикуляры, пересѣкающіе ее въ точкахъ 1, 2, 3; фигура 1, 2, 3... и будетъ плоской горизонтальной проекціей I, II, III. Если черезъ I проведемъ отвѣсныя плоскости, проходящія черезъ II и III, то они образуютъ двугранный уголъ (см. стр. 93), линейный уголъ его 2 1 3 служитъ угломъ проекціи; такіе углы называются горизонтальными. Линія 1 2 представляетъ горизонтальный катетъ (см. стр. 64) прямоугольнаго треугольника, гипотенузой котораго является I II; 1 2 наз. горизонтальною проекціей I II. Если начертимъ уменьшенную фигуру, подобную (см. стр. 80) горизонтальной проекціи, то получимъ *планъ* мѣстности.



Черт. 2

Одной только горизонтальной проекціи недостаточно для полнаго представленія о физической поверхности земли, необходимо еще знать, насколько одна точка выше или ниже другой. Эти превышенія точекъ можно или выразить числами, или представить въ видѣ разрѣзовъ вертикальными плоскостями, или изобразить на планѣ условными знаками.

Наука, которая учитъ составлять планы и опредѣлять въ нихъ предѣлахъ неровности мѣстности, называется *топографіей* или *низшей геодезіей;* она разсматриваетъ тѣ случаи, въ которыхъ

горизонтальную проекцію мѣстности можно принимать за плоскость.

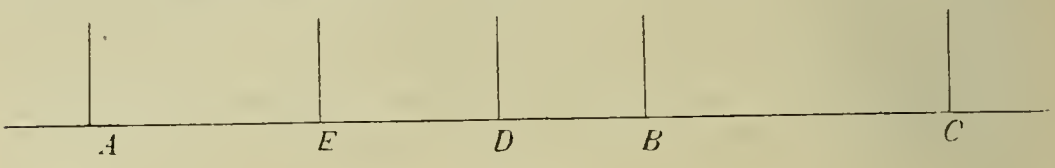
Тѣ дѣйствія, которыя для цѣлей низшей геодезіи производятся на поверхности земли, называются *съемкою*; для опредѣленія горизонтальной проекціи съемка состоитъ въ измѣреніи горизонтальныхъ угловъ и горизонтальныхъ проекцій линій.

Горизонтальная проекція представляется на планѣ въ уменьшенномъ видѣ. Та дробь, на которую нужно помножить длину горизонтальной проекціи каждой линіи мѣстности, чтобы получить соотвѣтствующую длину на планѣ, называется *численнымъ масштабомъ;* напримѣръ, если всѣ линіи плана въ 8.400 разъ менѣе соотвѣтствующихъ горизонтальныхъ проекцій линіи на землѣ, то масштабъ равенъ $\frac{1}{8400}$. Такъ какъ было бы неудобно всегда дѣлать такое умноженіе, то на планѣ дается обыкновенно отрѣзокъ прямой, въ которомъ заключается опредѣленное число единицъ длины соотвѣтствующихъ линій на мѣстности, напримѣръ, сказано сколько верстъ въ дюймѣ, метровъ въ сантиметрѣ; достаточно при этомъ измѣрить этой мѣрой линію на планѣ, чтобы тотчасъ знать ея длину на мѣстности. Такая линія съ подраздѣленіями, иногда съ приспособленіемъ для увеличенія точности отчета, называется *линейнымъ масштабомъ*. Отъ линейнаго масштаба къ численному и обратно перейти легко: если, напримѣръ, въ 1 дюймѣ заключается 100 саженъ, то длины уменьшены въ 84.100=8400 разъ, т.-е. численный масштабъ равенъ $\frac{1}{8400}$. Можно опредѣлить теперь, сколько метровъ на такомъ планѣ заключается въ сантиметрѣ: въ метрѣ 100 сантиметровъ, слѣдовательно, 1 метръ изображается длиною $\frac{100}{8400}$ сант. $= \frac{1}{84}$ сант., слѣдовательно, 1 сант. изображаетъ 84 метра.

2. Вѣшеніе и измѣреніе линій.

Иногда тѣ точки, положеніе которыхъ нужно отмѣтить на планѣ, легко видѣть издали, напримѣръ, углы зданій, деревья; но нерѣдко нужно въ точкѣ поставить какой-либо знакъ, чтобы сдѣлать ее замѣтной изъ другихъ точекъ; такими знаками служатъ *вѣхи* и *колья*. Вѣхи представляютъ жерди отъ 1 до 3 саж. длиною, на верхушкахъ ихъ привязываютъ пучки соломы, куски матеріи; *колья* представляютъ небольшіе шесты около 1 сажени длиною, одинаковой толщины, съ желѣзными наконечниками.

Очень часто на мѣстности приходится провести прямую линію, для чего нужно отмѣтить кольями рядъ точекъ на этой прямой или, какъ говорятъ, *провѣшить* линію. При этомъ приходится или продолжать прямую, отмѣченную двумя кольями, или вставлять колья между двумя точками. Чтобы продолжить прямую AB (черт. 3), съемщикъ, отойдя на желаемое разстояніе, около 30 саж., выбираетъ такую точку C, изъ которой колъ A



Черт. 3.

закрывался бы коломъ B; поставивъ здѣсь колъ, онъ отступаетъ на нѣсколько шаговъ и по двумъ сторонамъ провѣряетъ, покрываетъ ли новый колъ два первыхъ. Слѣдующіе колья устанавливаются подобнымъ же способомъ.

Если нужно провѣшить прямую между A и B, то можно сначала продолжить ее въ обѣ стороны, а затѣмъ по этимъ продолженіямъ выставлять колья внутри промежутка AB. Скорѣе можно притти къ цѣли, если съемщикъ станетъ въ A и будетъ направлять помощника съ коломъ D, пока колъ D будетъ казаться покрывающимъ B; затѣмъ выставляется колъ E и т. д. Установивши всѣ колья, съемщикъ провѣряетъ ихъ положеніе, отступивъ на нѣсколько шаговъ за колъ A.

Послѣ провѣшиванія линіи можно приступить къ измѣренію ея, для чего можно воспользоваться *мѣрной лентою*, т.-е. стальною лентою въ 10 саж. длиною, при чемъ на ней сдѣланы мѣтки черезъ 0,1 саж. Лента оканчивается кольцами, которыя можно надѣвать на особые цѣпные колья съ поперечинами, мѣшающими лентѣ соскользнуть. Для измѣренія линіи двое рабочихъ несутъ ленту, надѣтую на колья, при чемъ передній беретъ съ собою 10 колышковъ или проволочныхъ шпилекъ. Задній рабочій устанавливаетъ начало ленты въ начальную точку измѣряемой длины, а передній вытягиваетъ ленту по направленію къ ближайшей вѣхѣ на линіи. Задній рабочій, такъ же, какъ при привѣшиваніи, перемѣщаетъ цѣпной колъ передняго, пока онъ станетъ на измѣряемой линіи. Тогда передній рабочій вынимаетъ цѣпной колъ, втыкаетъ на его мѣсто шпильку, и ленту несутъ далѣе; когда задній рабочій дойдетъ до оставленной шпильки, онъ вынимаетъ ее, ставитъ свой колъ, и измѣреніе продолжается описаннымъ способомъ. Число шпилекъ, собранныхъ заднимъ рабочимъ, указываетъ число уложенныхъ лентъ;

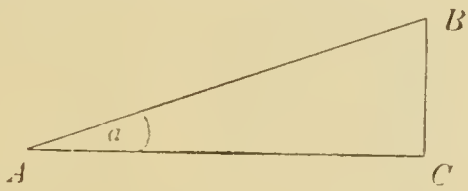
когда онъ соберетъ всѣ 10 шпилекъ, то передаетъ ихъ переднему, а съемщикъ отмѣчаетъ передачу въ записной книжкѣ. Если, напримѣръ, при измѣреніи какой-либо прямой отмѣчено 2 передачи, у задняго рабочаго оказалось 6 шпилекъ, и на лентѣ, протянутой за конечную точку, противъ нея стояло 5,35 саж., то опредѣляемая длина будетъ

$$100 \text{ с.} + 100 \text{ с.} + 10 . 6 \text{ с.} + 5{,}35 \text{ с.} = 265{,}35 \text{ с.}$$

Вмѣсто ленты употребляется также мѣрная цѣпь изъ проволочныхъ звеньевъ или смоленая проваренная въ маслѣ бечевка. Измѣреніе ими производится такъ же, какъ и лентою.

Ленту, цѣпь или бечевку необходимо провѣрить. Для этого можно съ помощью вѣрной сажени отмѣтить на землѣ или стѣнѣ дома линію въ 10 саж. и вдоль нея вытянуть мѣрную ленту. Если бы она оказалась, напримѣръ, на 0,04 саж. длиннѣе 10 саж., то въ приведенномъ примѣрѣ пришлось бы придать къ измѣренной длинѣ $0{,}04 . 26 - 0.02 = 1{,}06$ саж.

Если измѣрена длина линіи и уголъ ея наклоненія къ горизонту, то можно получить горизонтальную проекцію разстоянія между точками, которую нужно знать для составленія плана. Дѣйствительно, прямая AB, наклоненная къ горизонту на уголъ a, представляетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника ABC (черт. 4), а ея горизонтальная проекція—катетъ того же треугольника. Вмѣсто того, чтобы въ каждомъ частномъ случаѣ вычислять непосредственно по гипотенузѣ и углу катетъ, составляютъ таблицу поправокъ, которыя нужно вычитать изъ длины наклонной линіи, чтобы получить ея горизонтальную проекцію. Привожу въ сокращенномъ видѣ такую таблицу (изъ курса геодезіи Соловьева).



Черт. 4.

Наклонная длина 10 сант.

Уголъ наклоненія	1^0	2^0	3^0	7^0	10^0	15^0	20^0	25^0
Поправка въ сажеяхъ	0,00	0,01	0,01	0,07	0,15	0,34	0,60	0,94

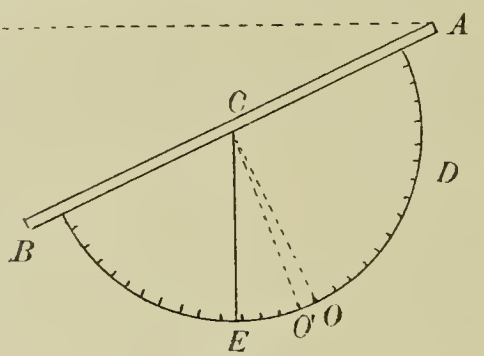
Если въ приведенномъ выше примѣрѣ наклонъ линіи 10^0, то ея горизонтальная проекція равна.

$$266{,}41 \text{ с.} - 0{,}15 . 26{,}64 \text{ с.} = 266{,}41 \text{ с.} - 4{,}00 \text{ с.} = 262{,}41.$$

Опредѣлить уголъ наклоненія прямой линіи къ горизонту можно *эклиметромъ*. Онъ состоитъ изъ линейки AB и полукруга (черт. 5), раздѣленнаго на градусы такъ, что O стоитъ на концѣ радіуса CO, перпендикулярнаго къ верхнему краю линейки, а дѣ-

ленія увеличиваются въ обѣ стороны; вокругъ центра вращается отвѣсъ CE. Если HA горизонтальная линія, то $\angle HAB = \angle OCE$, потому что $CO \perp AB$ и $CE \perp HA$ [1]); слѣдовательно, то дѣленіе, противъ котораго стоитъ отвѣсъ, показываетъ наклонъ AB къ горизонту.

Чтобы этимъ инструментомъ измѣрить наклонъ какой-либо прямой, ставятъ на концахъ ея колья съ мѣтками на одинаковой высотѣ надъ землею; тогда прямая, соединяющая мѣтки, наклонена къ горизонту на такой же уголъ, какъ и данная, Поэтому, если къ одной изъ мѣтокъ приложить эклиметръ и направить верхній край линейки на другую, то отсчетъ покажетъ искомый уголъ наклоненія. Если нуль дѣленій по ошибкѣ поставленъ не на перпендикулярномъ къ линейкѣ радіусѣ, а передвинутъ въ O' на величину a, то отсчетъ будетъ менѣе искомой наклонности на эту неизвѣстную величину a. Если, однако, эклиметръ держать такъ, чтобы къ противоположному концу линіи была обращена точка A, а къ глазу B, то отвѣсъ окажется на дугѣ OD, и отсчетъ будетъ больше истинной наклонности на то же число градусовъ a; слѣдовательно, если наклонность x, первый отсчетъ b, второй c, то



Черт. 5.

$x = b + a$

$x = c - a$

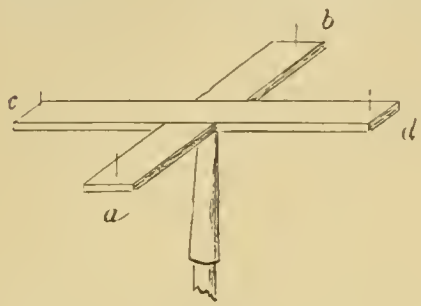
отсюда $x = \frac{b+c}{2}$, $a = \frac{c-b}{2}$. Итакъ, несмотря на погрѣшность въ устройствѣ инструмента, можно найти и уголъ наклоненія прямой къ горизонту и величину погрѣшности.

3. Экеръ и съемка имъ.

Умѣя провѣшивать и измѣрять линіи, можно было бы дѣлать съемки. Съ большимъ удобствомъ можно произвести съемку, примѣняя не только измѣреніе длины линіи, но и пользуясь, кромѣ того, простымъ инструментомъ, дающимъ возможность на мѣстности проводить взаимно-перпендикулярныя прямыя; такой инструментъ наз. *экеромъ*. Простѣйшій экеръ—состоитъ изъ двухъ

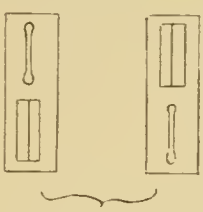
[1]) Ясно, что $\angle HAB$ и $\angle OCE$ дополняютъ одинъ и тотъ же уголъ $\angle BCE$ до прямого, стало-быть, эти углы равны.

линеекъ (черт. 6), укрѣпленныхъ на пустой трубкѣ, которою инструментъ можно насадить на палку. На концахъ линеекъ стоятъ 4 шпильки такъ, что ab и cd взаимно перпендикулярны.

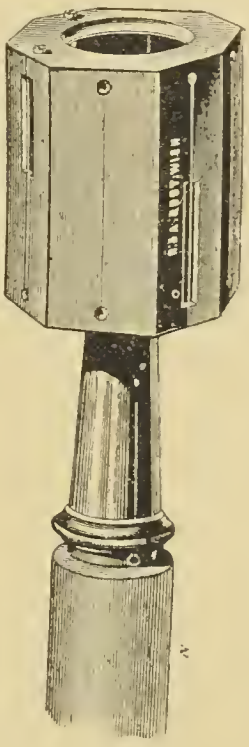


Черт. 6.

Если выставить колья по направленію шпилекъ a и b, затѣмъ c и d, то отвѣсныя плоскости, проходящія черезъ колья и точку, въ которой помѣщенъ экеръ, взаимно перпендикулярны. Шпильки лучше замѣнить *діоптрами* (черт. 7), т.-е. пластинками, перпендикулярными къ линейкамъ; въ одной изъ нихъ сдѣланъ узкій прорѣзъ, въ другой—рамка съ натянутымъ волоскомъ. Если смотрѣть, или, какъ говорятъ, визировать черезъ прорѣзъ и поворачивать линейку, пока волосокъ покроетъ наблюдаемую точку, то прорѣзъ, волосокъ и эта точка будутъ расположены въ одной отвѣсной плоскости. Для того, чтобы можно было визировать по противоположнымъ направленіямъ діоптры дѣлаются двойными: для этого надъ волоскомъ одного ставятъ щели дополнительнаго и обратно.


Черт. 7.

Экеры нерѣдко дѣлаются въ видѣ восьмигранныхъ призмъ или цилиндровъ, въ которыхъ по взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ устроены діоптры (черт. 8).

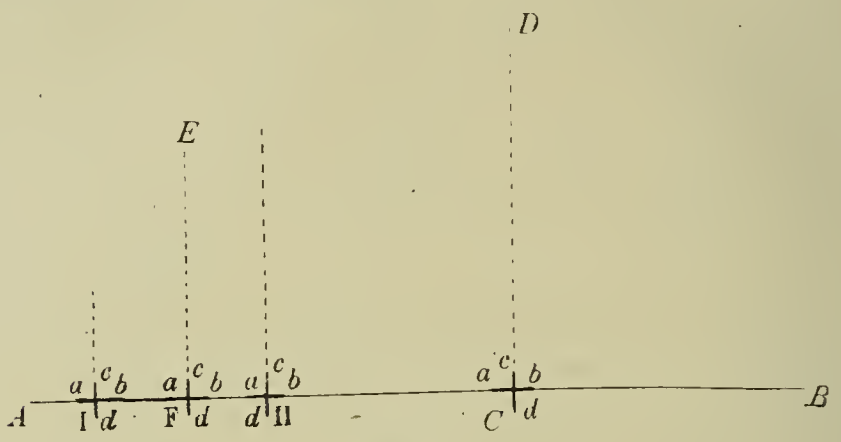

Черт. 8.

Чтобы возставить къ какой-либо прямой AB (черт. 9) перпендикуляръ въ точкѣ C, ставятъ въ эту точку палку съ экеромъ, затѣмъ поворачиваютъ инструментъ, пока, смотря черезъ прорѣзъ a, увидятъ, что волосокъ b покрываетъ колъ B. Затѣмъ визируютъ черезъ d на c, а помощникъ переставливаетъ колъ D, пока волосокъ покроетъ его; тогда $DC \perp AB$.

Если изъ E нужно опустить перпендикуляръ на AB, то сначала приблизительно опредѣляютъ основаніе этого перпендикуляра, положимъ I; установивши въ этой точкѣ описаннымъ способомъ экеръ, убѣждаются, что волосокъ c не покрываетъ E. Переставливаютъ инструментъ въ точку II и т. д., пока, наконецъ, при направленіи ab по пря-

мой AB, волосокъ діоптровъ cd покроетъ точку E; тогда $EF \perp AB$.

Чтобы построеніе перпендикуляровъ было правильнымъ, нужно экеръ провѣрить. Прежде всего слѣдуетъ убѣдиться, что волосокъ и щель каждаго діоптра лежатъ въ одной плос-

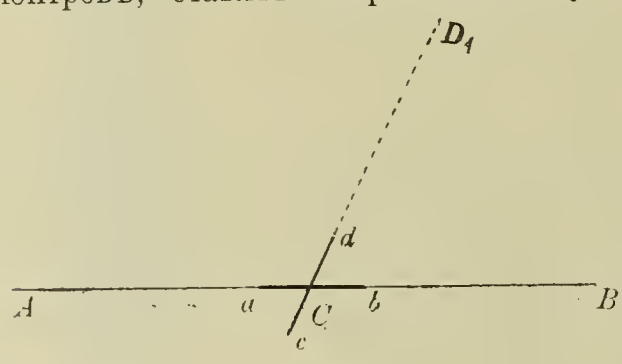


Черт. 9.

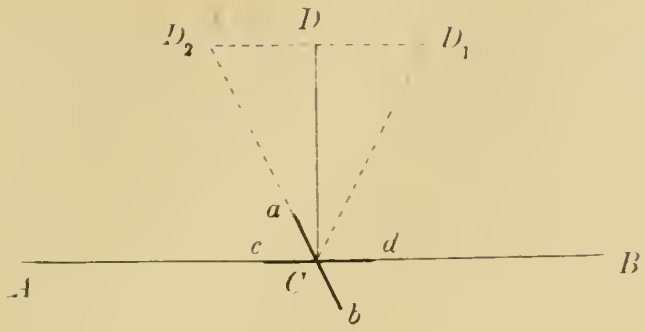
кости. Для повѣрки достаточно установить экеръ и направить діоптры на отвѣсъ; если волосокъ совпадаетъ съ отвѣсомъ, то положеніе его правильно, если пересѣкаетъ, то неправильно. Если, при перемѣщеніи глаза вдоль щели, волосокъ не сходитъ съ отвѣса, то и прорѣзъ устроенъ правильно.

Затѣмъ нужно убѣдиться, что верхняя и нижняя пары діоптровъ находятся въ одной плоскости. Для этого провѣшиваютъ тремя кольями прямую, вмѣсто средняго кола ставятъ экеръ, и нижнюю пару діоптровъ направляютъ на одну изъ конечныхъ точекъ прямой; если при этомъ черезъ верхнюю пару увидятъ вѣху на другомъ концѣ, то обѣ пары діоптровъ лежатъ въ одной плоскости.

Чтобы провѣрить взаимную перпендикулярность плоскостей діоптровъ, ставятъ экеръ въ точку C (черт. 10a), визируютъ черезъ ab на B, а по направленію cd выставляютъ колъ D_1. Затѣмъ направляютъ діоптры cd на B (чертежъ 10b), выставляютъ колъ D_2 по ab. Если dCb не прямой уголъ, то D_1 и D_2 не совпадутъ, при чемъ



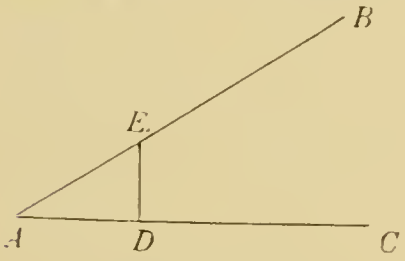
Черт. 10a.



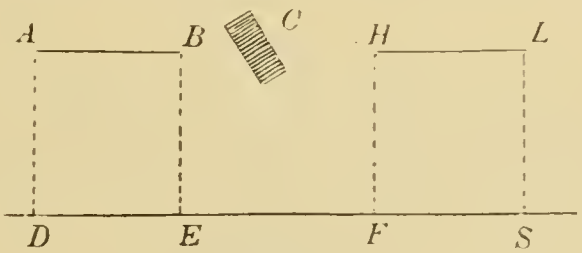
Черт. 10b.

$\angle D_1CB = \angle D_2CA$. Если теперь отложить цѣпью равные отрѣзки CD_1 и CD_2, и выставить D такъ, чтобы $D_2D = DD_1$, то $DC \perp AB$, такъ какъ DC представляетъ высоту равнобедреннаго треугольника (стр. 64). Экеръ нужно исправить, перемѣщая діоптры такъ, чтобы при визированіи черезъ cd на B, ab направлялась на D.

Съ помощью экера и мѣрной ленты можно всякій горизонтальный уголъ BAC (черт. 11) выразить въ градусахъ или перенести на чертежъ. Для этого возставимъ въ D перпендикуляръ къ AC до пересѣченія въ E съ AB и измѣримъ AD и ED. По двумъ сторонамъ прямоугольнаго треугольника можно вычислить уголъ A или построить его, откладывая въ принятомъ масштабѣ AD и ED.



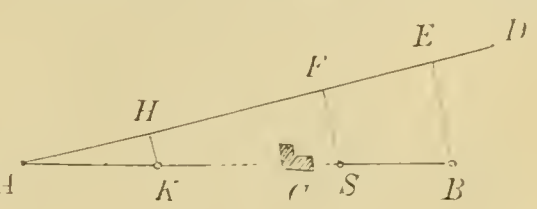
Черт. 11.



Черт. 12.

Съ помощью экера и ленты можно провѣшить прямую, когда на ней расположено какое-либо препятствіе, напримѣръ, домъ, лѣсъ,... (черт. 12). Положимъ, AB нужно продолжить за C. Провѣшиваемъ $AD \perp AB$ и $BE \perp AB$, отмѣриваемъ $AD = BE$; тогда $DE \parallel AB$. Провѣшимъ DE и въ точкахъ F и S возставимъ къ ней перпендикуляры. Если отложить $HF = LS = AD = BE$, то HL служитъ продолженіемъ AB.

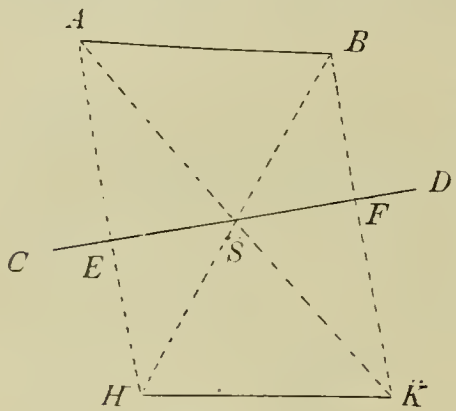
Если нужно провѣшить AB (черт. 13), при чемъ изъ A нельзя видѣть B вслѣдствіе препятствія C, то провѣшиваемъ AD, и находимъ на ней основаніе E опущеннаго на нее изъ B перпендикуляра BE. Вообразимъ два перпендикуляра SF и KH къ AD; такъ какъ треугольники AEB, AFS и AHK по-



Черт. 13.

добны (см. стр. 80), то $\frac{KH}{AH}=\frac{SF}{AF}=\frac{BE}{AE}$. Поэтому, если на перпендикулярахъ, возстановленныхъ въ какихъ-либо точкахъ H и F прямой AD, отложимъ $KH=AH.\frac{BE}{AE}$ и $SF=AF.\frac{BE}{AE}$, то точки K и E будутъ находиться на искомой прямой; если въ нихъ поставить колья, то прямая будетъ отмѣчена точками A, K, S, B.

Пользуясь экеромъ можно измѣрить прямую совершенно или частью недоступную. Напримѣръ, на черт. 12-мъ вмѣсто BH можно измѣрить параллельный и равный ей отрѣзокъ EF.

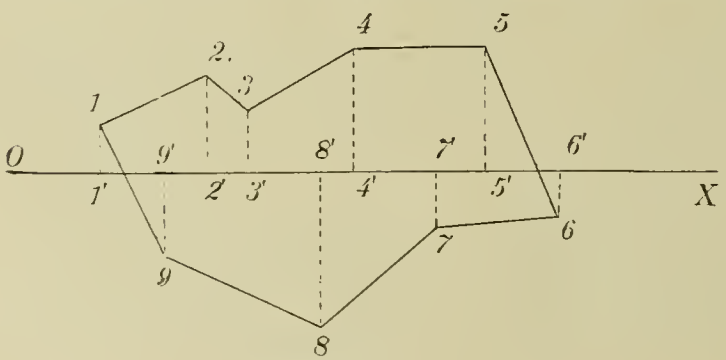


Черт. 14.

Если A и B совершенно недоступны, то провѣшиваютъ CD (черт. 14) и экеромъ находятъ на ней основанія E и F перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ A и B. Раздѣливъ EF въ точкѣ S пополамъ, провѣшиваютъ BS и AS до пересѣченія въ точкахъ H и K съ AE и BF.

Прямоугольные треугольники AES и SFK имѣютъ равные катеты ES и SF и равные острые углы при S; поэтому $\triangle AES=\triangle SFK$, слѣдовательно, $AS=SK$. Далѣе $\triangle SEH=\triangle SFB$, слѣдовательно, $SH=SB$. Разсматривая теперь треугольники ASB и HSK, видимъ, что они равны, потому что имѣютъ по равному углу, заключенному между равными сторонами. Поэтому $AB=HK$, т.-е. недоступный отрѣзокъ AB перенесенъ въ доступное мѣсто, гдѣ его можно измѣрить.

Чтобы экеромъ и мѣрной лентой снять планъ какого-либо участка, можно провѣшить прямую OX (черт. 15), называемую *осью* или *магистралью*, опускать экеромъ на нее перпендикуляры изъ различныхъ точекъ мѣстности и измѣрять какъ разстоянія отъ O до основаній этихъ перпендикуляровъ, такъ и длину ихъ.

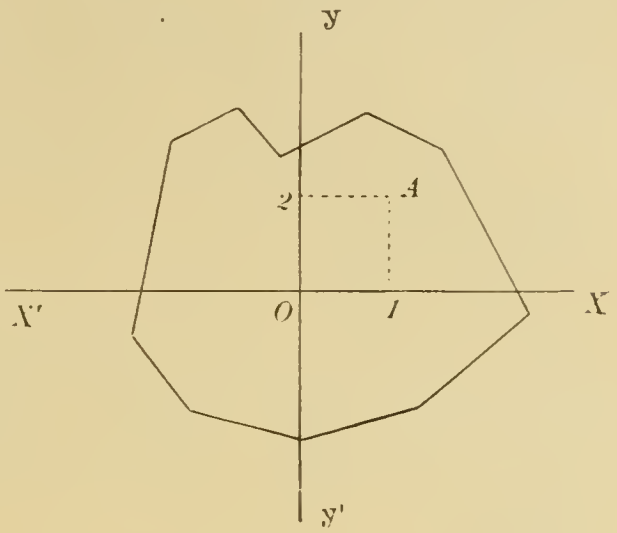


Черт. 15.

Затѣмъ нужно только на чертежѣ провести прямую, отъ какой-либо точки ея отложить въ принятомъ масштабѣ разстоянія до основаній перпендикуляровъ и ве-

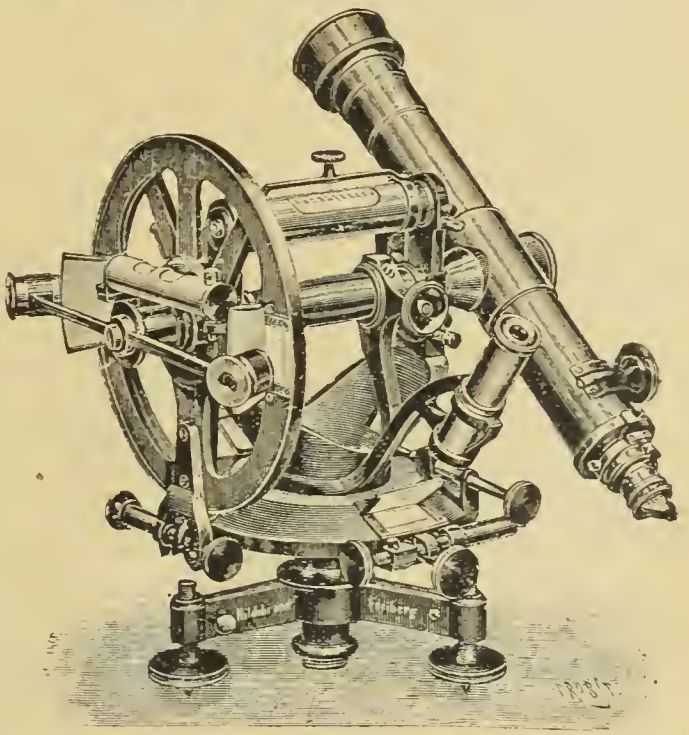
личины перпендикуляровъ, чтобы получить изображеніе точекъ мѣстности,

Можно провѣшить двѣ взаимно перпендикулярныхъ оси XX', YY' (черт. 16) и, опуская изъ точекъ перпендикуляры на эти прямыя, измѣрять разстояніе основаній перпендикуляровъ отъ O, напримѣръ, $O1$ и $O2$. Для построенія на бумагѣ положенія точекъ нужно провести двѣ перпендикулярныхъ линіи, отложить отъ пересѣченія ихъ въ принятомъ масштабѣ отрѣзки $O1$ и $O2$, и возставить въ 1 и 2 перпендикуляры къ осямъ; они пересѣкутся въ точкѣ, представляющей изображеніе A.



Черт. 16.

Въ болѣе сложныхъ случаяхъ приходится проводить нѣсколько магистралей, образующихъ между собою углы, которые можно опредѣлить съ помощью экера и цѣпи. Проведя подъ тѣми же углами оси на бумагѣ, можно построить относительно ихъ перпендикулярами изображенія точекъ мѣстности. Опредѣленіе произвольнаго угла экеромъ, какъ мы видѣли, довольно хлопотливо, такъ какъ для этого требуется возставить перпендикуляръ, измѣрить двѣ прямыхъ и вычислить или построить прямоугольный треугольникъ. Поэтому для измѣренія угловъ пользуются другими инструментами—астролябіей, теодолитомъ. Въ теодолитѣ (черт. 17) діоптры за-

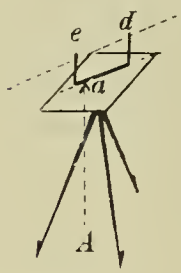

Черт. 17.

мѣнены зрительной трубой, вращающейся вокругъ горизонтальной оси, при чемъ послѣдняя можетъ вращаться вокругъ вертикальной оси. Перпендикулярно къ осямъ расположены круги, раздѣленные на градусы и доли ихъ. Когда труба вращается вокругъ горизонтальной оси, она описываетъ отвѣсную плоскость; измѣненія угла наклоненія къ горизонту узнаемъ, замѣчая дѣленія противъ указателя вертикальнаго круга. Если трубу теодолита, стоящаго въ точкѣ I (черт. 2) навести на точку II, затѣмъ на III, то вертикальная плоскость повернется на горизонтальный уголъ 2 1 3, который опредѣлится, если замѣтимъ при каждомъ положеніи отсчеты противъ указателя горизонтальнаго круга и вычтемъ одинъ изъ другого.

4. Мензула.

Съемка экеромъ или теодолитомъ при работѣ въ полѣ даетъ только числа, которыя служатъ впослѣдствіи для составленія чертежа. Существуетъ приборъ, называемый *мензулой*, дающій возможность получить планъ непосредственно при работѣ на мѣстности.

Мензула (черт. 18) представляетъ чертежную доску, которую можно установить горизонтально надъ любой точкой. На доскѣ натянута бумага, на которой въ соотвѣтствующемъ масштабѣ получается горизонтальная проекція мѣстности.

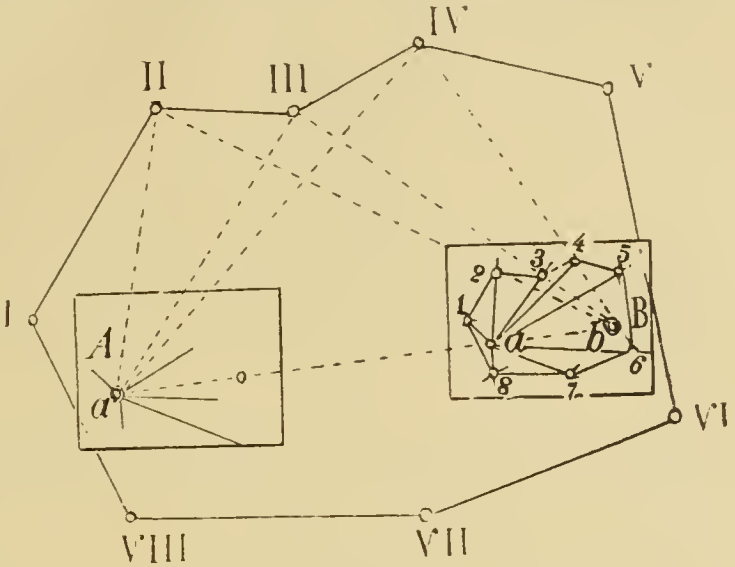


Черт. 18.

Къ мензулѣ прилагается *алидада*, т.-е. линейка съ прикрѣпленными на концахъ перпендикулярными къ ней діоптрами. Если установимъ мензулу горизонтально надъ точкой I (черт. 2), отмѣтимъ на бумагѣ точку, находящуюся по отвѣсу надъ I, и приставивши къ отмѣченной точкѣ алидаду станемъ ее поворачивать, пока черезъ діоптры увидимъ точку II, то плоскость діоптровъ совпадетъ съ отвѣсной плоскостью, проходящею черезъ I II. Проведя прямую по краю линейки, получимъ пересѣченіе плоскости діоптровъ съ горизонтальной. Отложивши затѣмъ отъ начальной точки на этой прямой длину горизонтальной проекціи I II, получимъ изображеніе проекціи точки II. Такимъ образомъ можно непосредственно на мѣстности начертить планъ ея.

Вмѣсто непосредственнаго нанесенія проекціи каждой измѣренной линіи на планъ, можно примѣнять и другіе способы. Напримѣръ, измѣряютъ длину линіи AB (черт. 19). Устанавливаютъ мензулу надъ A, отмѣчаютъ на бумагѣ a и, прикладывая къ a алидаду, прочерчиваютъ направленія на B, II, III, IV... На

первомъ направленіи откладываютъ длину ab, представляющую въ принятомъ масштабѣ измѣренную прямую AB, переносятъ мензулу въ B, и поворачиваютъ ее, приложивши алидаду къ ab, пока въ діоптры увидятъ A; затѣмъ черезъ b прочерчиваютъ направленія B II, B III, B IV... Въ пересѣченіи съ соотвѣтствующими прямыми, начерченными при положеніи мензулы въ A, получаютъ точки 2, 3, 4..., представляющія изображенія точекъ II, III, IV...



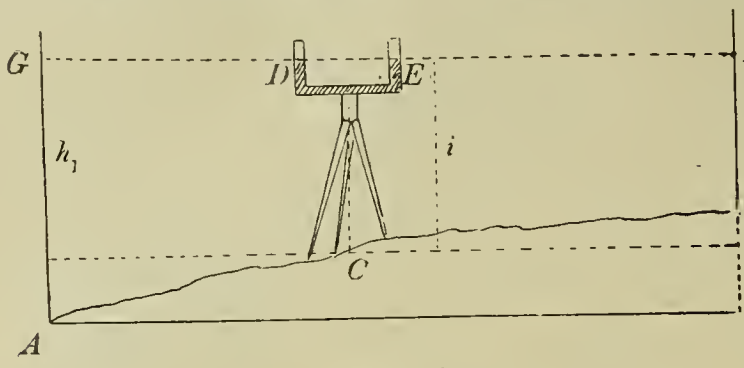
Черт. 19.

5. Нивеллированіе.

Кромѣ горизонтальной проекціи или плана мѣстности необходимо знать возвышеніе одной точки надъ другой. Принимая землю за сферу, вообразимъ шаровыя поверхности, описанныя изъ центра земли и проходящія черезъ точки A, B, C..., всѣ точки каждой изъ такихъ поверхностей находятся на одномъ уровнѣ; поверхность спокойной воды приняла бы такую сферическую форму, на небольшомъ протяженіи мало отличающуюся отъ плоскости. Разность радіусовъ сферическихъ поверхностей, проходящихъ черезъ A, B, C, назовемъ возвышеніемъ точекъ B и C надъ A. Чтобы измѣрить это возвышеніе, отсчитываемое по направленію радіуса, совпадающему съ направленіемъ отвѣсной линіи, нужно имѣть на мѣстности перпендикулярную къ ней горизонтальную линію, касающуюся поверхности уровня. Опредѣленіе разности высотъ точекъ называется *нивеллированіемъ*, а инструменты, дающіе горизонтальную линію,—*нивеллирами*.

Однимъ изъ простѣйшихъ инструментовъ этого рода является *водяной нивеллиръ* (черт. 20). Онъ состоитъ изъ изогнутой трубки, въ которую налита жидкость. Трубка устанавливается на треножникѣ и можетъ вращаться вокругъ вертикальной оси. По свойству жидкостей въ сообщающихся сосудахъ, прямая DE, проходящая черезъ поверхность воды въ вертикальныхъ колѣнахъ,

горизонтальна. Поэтому если въ точкѣ B поставить рейку, т.-е. вертикальный брусокъ, на которомъ нанесены дѣленія на сажени или метры и доли ихъ, а въ C—нивеллиръ и держать глазъ за точкой D такъ, чтобы видѣть верхушки жидкости въ вертикальныхъ трубкахъ, то линія визированія будетъ горизонтальна.



Черт. 20.

Если высота дѣленія рейки на линіи визированія надъ B равна h, а высота DE надъ точкой C равна i, то подъ одной и той же поверхностью уровня точка B находится на глубинѣ h, а точка C на глубинѣ i, слѣдовательно, B выше C на $i-h$. Если другая рейка стоитъ въ A, и, смотря черезъ E на D, мы увидимъ на ней дѣленіе h_1, то C выше A на h_1-i, а потому возвышеніе B надъ A равно $i-h+h_1-i=h_1-h$, слѣдовательно, высоту нивеллира знать не нужно.

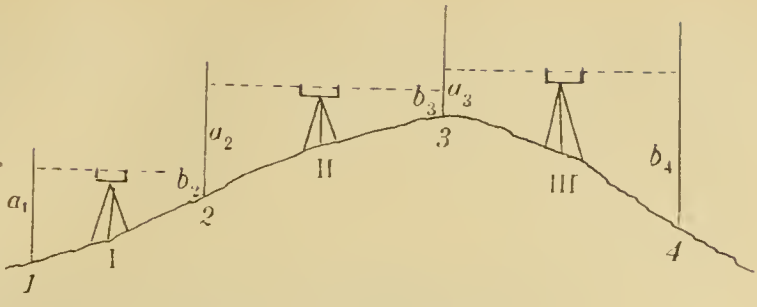
Такъ какъ на значительномъ разстояніи трудно видѣть дѣленія рейки, то по ней можетъ перемѣщаться доска съ прорѣзомъ, двѣ половины которой окрашены въ различный цвѣтъ (черт. 21). Съемщикъ визируетъ черезъ нивеллиръ, а помощникъ передвигаетъ доску, пока съемщикъ увидитъ линію раздѣла на прямой визированія; тогда помощникъ замѣчаетъ дѣленіе рейки противъ линіи раздѣла доски.

Черт. 21.

Такой инструментъ не даетъ большой точности; обыкновенно пользуются нивеллиромъ съ зрительной трубой, которую приводятъ въ горизонтальное положеніе помощью уровня.

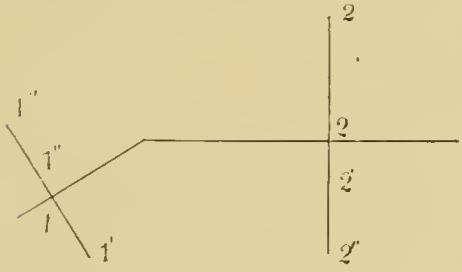
Описаннымъ способомъ можно узнать разность высотъ только близкихъ точекъ. При нивеллированіи длинной линіи разбиваютъ ее на части: ставятъ нивеллиръ въ I (черт. 22), рейки 1 и 2; тогда разность высотъ 2 и 1 равна a_1-b_2. Затѣмъ нивеллиръ ставятъ въ II, а первую рейку переносятъ въ 3, такъ разность высотъ 3 и 2 равна a_2-b_3, а возвышеніе 3 надъ 1 равно $a_1-b_2+a_2-b_3$ и т. д.

Нерѣдко нужно нивеллировать не только по направленію какой-либо линіи, но также знать изгибы мѣстности въ узкой полосѣ вдоль этой линіи. Для этого провѣшиваютъ небольшія прямыя перпендикулярно къ нивеллируемой линіи и рейки ставятъ (черт. 23), кромѣ точекъ 1, 2,... также въ 1′, 1″, 1‴, 2′, 2″,...; по предыдущему разность $a_1 - a_1'$ дастъ возвышеніе 1′ надъ 1 и т. д.



Черт. 22.

Когда высоты точекъ вычислены, то для нагляднаго изображенія изгибовъ мѣстности проводятъ на бумагѣ прямую, на которой откладываютъ въ принятомъ масштабѣ горизонтальныя проекціи 12, 23,..., возстановляютъ въ этихъ точкахъ къ прямой перпендикуляры, на которыхъ откладываются вычисленныя высоты точекъ. Соединивъ концы этихъ перпендикуляровъ, получаютъ *профиль* мѣстности вдоль избранной линіи или оси.



Черт. 23.

Рекомендуемыя руководства.

1. *Вихертъ.* Введеніе въ геодезію. Лекціи для преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній. 2-ое изд. 1912 г. Одесса. Матезисъ. Ц. 35 к.

Очень краткій, сжатый и ясный очеркъ общаго характера геодезическихъ дѣйствій (95 стр.).

2. *Бикъ.* Учебникъ низшей геодезіи (1 р. 50 к., 342 стр.).

3. *Поспавскій.* Низшая геодезія. Популярное руководство къ съемкѣ и нивеллировкѣ (1 р. 50 к. 290 стр.).

2-ое и 3-ье руководства для земледѣльческихъ училищъ даютъ описаніе инструментовъ и ихъ повѣрокъ, изложеніе способовъ горизонтальной и вертикальной съемки; требуютъ знанія основаній геометріи.

Теоретическая механика.

1. О движеніи, времени и силахъ.

Понятіе о движеніи и покоѣ слагается у человѣка со времени первыхъ впечатлѣній его жизни.

Явленія окружающей насъ природы сопровождаются передвиженіемъ тѣлъ и большей частью вызываются также различными движеніями. Если говорятъ, что тѣло движется, то это значитъ, что точки этого тѣла измѣняютъ свое положеніе по отношенію къ окружающимъ предметамъ. Обыкновенно движенія тѣлъ разсматриваются по отношенію къ землѣ или къ предметамъ на ней расположеннымъ. Движенія частей машины, работающей въ мастерской, мы разсматриваемъ по отношенію къ ея неподвижному основанію, или къ неподвижнымъ предметамъ или стѣнамъ мастерской. Такія движенія мы называемъ *абсолютными*. Но если мы вспомнимъ, что земля совершаетъ движеніе въ міровомъ пространствѣ, описывая въ сутки полный оборотъ вокругъ своей оси, а въ годъ полный оборотъ вокругъ солнца, то въ такомъ случаѣ движенія, разсматриваемыя на землѣ, мы называемъ *относительными* по отношенію къ землѣ, совершающей свое движеніе въ пространствѣ. Части паровой машины, приводящей въ движеніе локомотивъ поѣзда, совершаютъ абсолютное движеніе по отношенію къ землѣ, разсматриваемой какъ неподвижной въ пространствѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ эти движенія мы называемъ относительными по отношенію къ остову локомотива, движущагося вмѣстѣ съ поѣздомъ.

При движеніи тѣла каждая его точка описываетъ прямую или кривую линію, которую мы называемъ *путемъ* или *траекторіей* этой точки.

Чтобы составить себѣ представленіе о томъ, какъ совершается движеніе каждой разсматриваемой точки, недостаточно знать только форму того пути, который она описываетъ. Въ самомъ дѣлѣ, одинъ и тотъ же путь возможно описать самыми разнообразными способами. Достаточно указать, что по одному

и тому же желѣзнодорожному пути проходятъ различные поѣзда: товарные, пассажирскіе, почтовые и курьерскіе, пробѣгая тѣ же самыя разстоянія, но въ различные промежутки времени. Чтобы имѣть понятіе о движеніи поѣзда, необходимо знать какъ время его выхода со станціи отправленія, такъ и то время, которое поѣздъ употребляетъ, чтобы пройти разстояніе между промежуточными станціями. Всѣ эти свѣдѣнія пассажиръ можетъ найти въ расписаніи движенія поѣздовъ. Посмотрѣвъ въ него, вы найдете, на какую станцію вы прибыли въ настоящее время, показываемое вашими часами. Наоборотъ, узнавъ названіе станціи, къ которой вы подъѣхали, въ расписаніи поѣздовъ вы узнаете время, т.-е. часы и минуты наступившаго момента времени.

Люди съ незапамятныхъ временъ научились опредѣлять время наступленія событій (временъ года, разлива рѣкъ) въ связи съ появленіемъ и расположеніемъ звѣздъ на небѣ. Но съ развитіемъ культурной жизни явилась необходимость въ болѣе точномъ опредѣленіи времени и измѣреніи промежутковъ времени опредѣленной продолжительности. Пользуясь постоянствомъ суточнаго движенія небесныхъ свѣтилъ, мы научились устраивать весьма точные часы. Часовой механизмъ, служащій для опредѣленія времени устроенъ такъ, что заводная пружина или гиря, при помощи зубчатыхъ колесъ, вращаетъ часовую и минутную, а иногда и секундную стрѣлки, которыя описываютъ полный оборотъ соотвѣтственно въ одинъ часъ, одну минуту и одну секунду. Благодаря этому мы можемъ точно опредѣлить время, когда совершилось какое-либо событіе, указавъ часы, минуты и секунды, когда оно произошло. Съ часами въ рукахъ вы можете прослѣдить послѣдовательныя положенія, которыя занимаетъ движущаяся точка въ различное время. По часамъ легко опредѣлить, сколько времени употребитъ точка, чтобы перейти изъ одного положенія въ другое, если только она движется настолько медленно, что вы будете успѣвать слѣдить за ея движеніемъ. Такимъ образомъ движеніе каждой точки мы сравниваемъ съ круговымъ движеніемъ часовыхъ стрѣлокъ. Такимъ же образомъ, чтобы знать движеніе точки по описываемому ею пути, необходимо знать не только ея разстоянія отъ мѣста отправленія, т.-е. проходимыя точкой пространства, но также и продолжительность употребляемаго ею времени.

Измѣряя длину пройденнаго точкой пути и продолжительность затраченнаго для этого времени, мы составляемъ такъ называемый *законъ движенія точки*, позволяющій отвѣчать на слѣдующихъ два основныхъ вопроса:

1) опредѣлить въ данный моментъ времени положеніе движущейся точки въ пространствѣ,

2) по наблюденному положенію движущейся точки опредѣлить время, соотвѣтствующее каждому ея положенію.

Такимъ образомъ ученые древняго міра и среднихъ вѣковъ изучали движеніе небесныхъ свѣтилъ. Руководствуясь ихъ наблюденіями Кеплеръ открылъ свои безсмертные законы движенія планетъ солнечной системы вокругъ солнца [1]).

Однажды, говорятъ, знаменитый итальянскій ученый Галилей (родился въ г. Пизѣ въ 1564 году и умеръ въ 1642 г., сосланный въ свое помѣстье и преслѣдуемый римскимъ духовенствомъ за доказательство вращенія земли), котораго называютъ творцомъ механики, замѣтилъ раскачиванія люстры въ Пизанскомъ соборѣ. Для опредѣленія ихъ продолжительности Галилей воспользовался біеніемъ своего пульса, который, какъ извѣстно, повторяется черезъ равные промежутки времени. Такимъ образомъ былъ открытъ Галилеемъ замѣчательный законъ, по которому всѣ малыя колебанія тѣла, качающагося около точки привѣса, совершаются въ равные промежутки времени.

Каковы бы ни были движенія, какъ бы они ни совершались въ пространствѣ въ зависимости отъ времени, возникаетъ вопросъ, почему происходятъ эти движенія и чѣмъ они объясняются?

Съ давнихъ поръ у людей сложилось представленіе о затрачиваемыхъ усиліяхъ для передвиженія тѣлъ или для удаленія разнаго рода препятствій. Напримѣръ, мы ясно себѣ представляемъ зависимость совершаемыхъ нами передвиженій отъ опредѣленныхъ усилій нашего организма. Грузовщикъ, напрягая всѣ мускулы своего тѣла, взваливаетъ себѣ на спину тяжесть и переноситъ ее на новое мѣсто; напряженіемъ своего тѣла онъ передвигаетъ грузъ. Вращая рукой колесо швейной машины, при помощи передаточныхъ механизмовъ, вы приводите въ движеніе иголку, заставляя ее опускаться вверхъ и внизъ и пропускать нитку черезъ сшиваемую матерію. Сжигая уголь въ топкѣ паровоза, машинистъ подогрѣваетъ воду, разводитъ пары, которые, двигая поршень парового цилиндра, приводятъ въ движеніе колеса и заставляютъ поѣздъ двигаться. Въ послѣднихъ двухъ примѣрахъ мы производимъ желаемое движеніе, при помощи ряда вспомогательныхъ тѣлъ и приспособленій.

Большинство явленій природы совершается помимо нашего участія и совершенно независимо отъ нашихъ усилій. Стре-

---

1) См. подробнѣе объ этихъ законахъ въ слѣдующемъ отдѣлѣ Астрономіи, въ статьѣ *VI. Движеніе планетъ*. Тамъ же помѣщенъ портретъ Кеплера.

мясь объяснить наблюдаемыя нами движенія въ природѣ, естественнѣе всего для насъ истолковывать движеніе каждаго тѣла какъ результатъ дѣйствія на него какихъ-либо другихъ тѣлъ. Такъ, извѣстно, что всѣ тѣла въ пространствѣ, не будучи удерживаемы, падаютъ на поверхность земли. Это явленіе мы объясняемъ тѣмъ, что всѣ тѣла притягиваются къ землѣ.

Объясняя движеніе каждаго тѣла какъ слѣдствіе воздѣйствія на него другихъ тѣлъ, мы называемъ эту причину движенія *силой*, приложенной къ движущемуся тѣлу. Такъ, напримѣръ, причину паденія тѣла на поверхность земли, вызываемое ея притяженіемъ, мы называемъ *силой тяжести*, или вѣсомъ тѣлъ, приложенной къ падающему тѣлу, и тѣла, обладающія этимъ свойствомъ, называемъ *тяжелыми*. Живые организмы обладаютъ *мускульной силой*, которая позволяетъ грузовщику переносить грузы, а швеѣ приводить въ движеніе швейную машину. Паръ, заключенный въ замкнутый сосудъ, обладаетъ свойствомъ производить давленіе на его стѣнки, и это давленіе представляетъ силу, движущую поршень цилиндра. Если заставимъ шарикъ катиться по полированной гладкой поверхности стола, а затѣмъ—по скатерти, то сейчасъ же замѣтимъ, что подъ вліяніемъ такого же самаго толчка шарикъ по скатерти опишетъ гораздо болѣе короткій путь, чѣмъ по гладкой поверхности стола. Поэтому мы говоримъ, что скатерть, какъ поверхность шероховатая, препятствуетъ движенію шарика. Причину, удерживающую шарикъ при движеніи по скатерти, мы называемъ *силой тренія*.

Понятіе о силѣ мы составляемъ совершенно независимо отъ того, приводитъ ли она разсматриваемое тѣло въ движеніе, или измѣняетъ его прежнее движеніе, или, наконецъ, не измѣняетъ совершенно его движенія, взаимно уничтожаясь съ другими приложенными силами. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы говоримъ, что силы, приложенныя къ тѣлу *взаимно уравновѣшиваются*. Такъ, напримѣръ, если тяжелое тѣло мы удерживаемъ въ рукѣ, то мы говоримъ, что сила тяжести, т.-е. вѣсъ тѣла уравновѣшивается *силой сопротивленія руки*. Тяжелое тѣло, положенное на горизонтальную поверхность стола, удерживается послѣдней отъ паденія, и мы говоримъ, что вѣсъ тѣла уравновѣшивается силой сопротивленія (или *реакціи*) стола.

Мы ясно ощущаемъ различіе между производимыми нами различными усиліями, и сравниваемъ ихъ съ тѣми усиліями, которыя мы производимъ, поднимая гири опредѣленнаго вѣса. На этомъ основаніи *мы измѣряемъ силы въ единицахъ вѣса*. Для измѣренія силъ пользуются особыми приборами, называемыми *силомѣрами* (или *динамометрами*), На чертежѣ 1-мъ и 2-омъ (I)

изображены четыре подобныхъ прибора. Они устроены такимъ образомъ, что подъ дѣйствіемъ груза или приложенной силы, какъ показано на чертежѣ 2-омъ (II), пружина или изогнутая металлическая полоса сжимается или разжимается на опредѣленную величину. Величина этихъ измѣненій измѣряется по намѣченнымъ заранѣе дѣленіямъ, какъ это дѣлается и на пружинныхъ вѣсахъ. На крючокъ, вмѣсто гирь, заставляютъ дѣйствовать силу, величину которой

Черт. 1.

желаютъ измѣрить, и сравниваютъ дѣйствіе этой силы на пружину силомѣра съ дѣйствіемъ на нее гирь.

Изучая движенія тѣлъ, подъ вліяніемъ разсматриваемыхъ силъ, мы составляемъ законы ихъ дѣйствія, которые должны позволять отвѣтить на слѣдующихъ два вопроса:

1) Опредѣлить законъ движенія тѣла подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ;

2) Опредѣлить силы, которыя производятъ разсматриваемое движеніе.

Изъ всего сказаннаго выше читатель можетъ составить себѣ представленіе о вопросахъ разсматриваемыхъ въ *теоретической механикѣ*, которая представляетъ науку о движеніи. Теоретическая механика подраздѣляется на нѣсколько отдѣловъ. Часть механики, изучающая движенія въ зависимости отъ времени, называется *кинематикой*. Ученіе о силахъ, ихъ равновѣсіи и преобразованіяхъ (или, какъ гово-

Черт. 2.

рятъ, *сложеніи* и *разложеніи*) составляетъ отдѣлъ механики, называемый *статикой*. Наконецъ, вопросы о движеніи тѣлъ, въ зависимости отъ дѣйствія приложенныхъ къ нимъ силъ, представляютъ наиболѣе интересный и обширный отдѣлъ механики, который называется *динамикой*. Часть динамики, которая изучаетъ движеніе небесныхъ тѣлъ, называется *небесной механикой*. Кромѣ того, ученіе о равновѣсіи жидкихъ тѣлъ, т.-е. статику жидкостей, называютъ *гидростатикой*, а динамику жидкостей—*гидродинамикой*.

Такое подраздѣленіе механики на отдѣлы кинематики, статики и динамики является совершенно искусственнымъ и произвольнымъ. Оно вводится только для того, чтобы облегчить изученіе явленій движенія, раздѣливъ болѣе сложный вопросъ на рядъ менѣе сложныхъ задачъ. Съ такою же цѣлью въ механикѣ начинаютъ всегда съ изученія движенія одной геометрической точки. Всякое же тѣло разсматривается какъ совокупность точекъ, подчиненныхъ тому или другому условію. Такъ, напримѣръ, твердое тѣло мы разсматриваемъ какъ систему точекъ, взаимныя разстоянія между которыми должны оставаться безъ измѣненія. Напротивъ того, упругимъ тѣломъ называется система точекъ, разстоянія между которыми могутъ измѣняться, удлиняясь или укорачиваясь.

2. Равномѣрное и перемѣнное движеніе точки.

Предположимъ, что какая-либо точка движется по своему пути такъ, что въ равные промежутки времени проходитъ равныя пространства. Такое движеніе мы называемъ *равномѣрнымъ*. Если поѣздъ движется равномѣрно, проходя по 30 верстъ въ часъ, то это значитъ, что въ каждую минуту времени поѣздъ проходитъ $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ версты. При опредѣленіи равномѣрнаго движенія мы не вводимъ никакого особаго предположенія о формѣ пути. Будетъ ли точка двигаться по прямой линіи, по окружности или по какой угодно кривой линіи, если только она проходитъ равныя пространства въ равные промежутки времени, то движеніе всегда называется равномѣрнымъ. Но, кромѣ того, часто говорятъ, что разсматриваемое движеніе *прямолинейное*, если оно совершается по прямой линіи, или *криволинейное*, если разсматриваемая точка описываетъ кривую линію.

Пространство, проходимое равномѣрно движущейся точкой въ единицу времени, называется *скоростью ея движенія въ указанную*

единицу времени. Такъ, напримѣръ, если поѣздъ проходитъ равномѣрнымъ движеніемъ 30 верстъ въ часъ, то мы говоримъ, что скорость его движенія равна *30 верстамъ въ часъ или въ 60 минутъ*; поэтому въ 1 минуту поѣздъ проходитъ $\frac{1}{2}$ версты, и мы можемъ также сказать, что скорость его равна $\frac{1}{2}$ *версты въ минуту*, или, все равно, *250 саженямъ въ минуту.* Такъ какъ при опредѣленіи скорости входятъ единицы пространства и времени, то скорость обозначаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$30\ \frac{\text{вер.}}{\text{час.}},\quad \frac{1}{2}\ \frac{\text{вер.}}{\text{мин.}},\quad \text{или}\quad 250\ \frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}.$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія скорости равномѣрнаго движенія точки слѣдуетъ раздѣлить пройденное ею пространство на затраченное для этого время. Поэтому если бы мы знали пространство, пройденное точкой въ равномѣрномъ движеніи, и скорость ея движенія, то опредѣлить время, въ теченіе котораго точка двигалась, было бы очень просто. Для этого стоило бы только раздѣлить пространство на скорость. Напримѣръ, если пѣшеходъ прошелъ 10 верстъ со скоростью 4 версты въ 1 часъ, то очевидно, что онъ шелъ $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ часа времени.

Если мы знаемъ скорость равномѣрнаго движенія и время движенія, то пройденное пространство опредѣляется какъ произведеніе скорости на время. Напримѣръ, скорость равномѣрнаго движенія поѣзда равна $\frac{1}{2}\ \frac{\text{вер.}}{\text{мин.}}$. Поэтому поѣздъ пройдетъ въ 20 минутъ $\frac{1}{2} \times 20 = 10$ верстъ.

Всякое движеніе точки, не удовлетворяющее условію равномѣрности, называется *неравномѣрнымъ* или *перемѣннымъ*, т.-е если пространства, проходимыя точкой въ равные промежутки времени, не равны, то такое движеніе называется *неравномѣрнымъ.*

Разсматривая неравномѣрное движеніе, мы вводимъ понятіе о *средней скорости его за данный промежутокъ времени.* Предположимъ, напримѣръ, что поѣздъ проходитъ разстояніе въ 80 верстъ между двумя станціями въ продолженіе 2-хъ часовъ времени. Мы говоримъ въ такомъ случаѣ, что поѣздъ проходитъ разстояніе между указанными двумя станціями со средней скоростью въ $\frac{80}{2} =$ 40 верстъ въ часъ и обозначаемъ, что средняя скорость поѣзда равна 40 $\frac{\text{вер.}}{\text{час.}}$, или $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}\ \frac{\text{вер.}}{\text{мин.}}$. Такимъ

образомъ, вмѣсто перемѣннаго движенія мы разсматриваемъ такое равномѣрное движеніе, совершая которое точка пройдетъ то же самое пространство, что и при неравномѣрномъ движеніи. Возвращаясь къ прежнему примѣру, очевидно, что поѣздъ, сдвинувшись съ мѣста, проходитъ малыя пространства, и подходя къ конечному пункту, передъ остановкой, замедляетъ свой ходъ. Если за первыя 5 минутъ поѣздъ проходитъ всего 2 версты, то, слѣдовательно, его *средняя скорость* равна $\frac{2}{5}\ \frac{\text{вер.}}{\text{мин.}}$, но только въ первыя 5 минутъ движенія.

Итакъ, средняя скорость перемѣннаго движенія за данный промежутокъ времени представляетъ пространство пройденнаго въ единицу времени, въ предположеніи, что за данный промежутокъ времени разсматриваемое движеніе совершается какъ равномѣрное. Эта средняя скорость имѣетъ различныя значенія для промежутковъ времени равной продолжительности, но взятыхъ въ различные періоды движенія. Предположимъ, что съ даннаго разсматриваемаго момента времени наше перемѣнное движеніе становится равномѣрнымъ; скорость его (т.-е. пространство, проходимое точкой въ единицу времени, начиная съ разсматриваемаго момента времени) называется *истинной скоростью перемѣннаго движенія точки въ данный моментъ времени*. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что разсматриваемая скорость представляетъ также величину, зависящую отъ пространства и времени, и поэтому обозначается такъ же, какъ скорость равномѣрнаго движенія и средняя скорость перемѣннаго движенія.

Замѣняя неравномѣрное движеніе рядомъ послѣдовательныхъ равномѣрныхъ движеній, во время которыхъ наша точка проходитъ то же самое разстояніе, мы приближаемся къ дѣйствительному движенію тѣмъ ближе, чѣмъ меньше промежутокъ времени, за который мы разсматриваемъ среднюю скорость. Отмѣтимъ положеніе движущейся точки, соотвѣтствующее данному моменту времени, и опредѣлимъ среднюю скорость движенія точки за безконечно-малый промежутокъ времени, слѣдующій за даннымъ моментомъ времени. Предѣлъ этой средней скорости, когда разсматриваемый безконечно-малый промежутокъ времени стремится къ нулю, и представляетъ искомую *истинную скорость точки въ данный моментъ времени*. Все сказанное будетъ понятно читателю, если онъ знаетъ, что называется безконечно-малою величиной, предѣломъ перемѣнной величины (стр. 145—147) и производной функціей, которыя вычисляются въ дифференціальномъ исчисленіи (стр. 153). Если читатель недостаточно освоился съ послѣдними понятіями, то онъ можетъ усвоить ихъ

себѣ, разсматривая среднія скорости движенія для все болѣе и болѣе уменьшающихся пространствъ, въ 1 версту, 1 сажень, 1 аршинъ и 1 вершокъ и т. д. и для убывающихъ промежутковъ времени.

Скорость точки (будетъ ли то скорость равномѣрнаго движенія, средняя скорость перемѣннаго движенія или истинная скорость) всегда представляетъ *нѣкоторое пространство*, пройденное въ опредѣленную единицу времени. Всякое пространство измѣряется отрѣзками прямой линіи опредѣленной длины. Поэтому скорость точки обыкновенно представляютъ графически въ видѣ отрѣзка прямой линіи, при чемъ условливаются какой-либо отрѣзокъ опредѣленной длины считать за единицу длины. Такимъ образомъ, длина отрѣзка, изображающаго скорость, пропорціональна величинѣ скорости и откладывается по направленію скорости. Направленіе же скорости считается совпадающимъ съ направленіемъ касательной къ кривой, изображающей путь движенія точки, при чемъ на этомъ направленіи касательной, скорость откладывается отъ движущейся точки въ сторону ея движенія. Напримѣръ, если точка движется по окружности, то, стало-быть, скорость точки откладывается перпендикулярно къ радіусу (стр. 84, теорема 13), соединяющему центръ окружности съ положеніемъ на ней движущейся точки.

Особенно часто встрѣчается такъ называемое *равномѣрно-перемѣнное* движеніе, въ которомъ скорость измѣняется пропорціонально времени (возрастаетъ или убываетъ), т.-е. измѣняется на равныя величины въ равные промежутки времени. Предположимъ, напримѣръ, что поѣздъ, тронувшись со станціи, движется по прямолинейному пути, постепенно развивая скорость. Предположимъ, что скорость поѣзда возрастаетъ правильно на 1 вершокъ черезъ каждую секунду времени, такъ что въ концѣ первой секунды, послѣ своего отправленія, поѣздъ обладаетъ скоростью 1 $\frac{\text{верш.}}{\text{сек.}}$. Въ концѣ 2-ой секунды своего движенія поѣздъ имѣетъ скорость 2 $\frac{\text{верш.}}{\text{сек.}}$. Очевидно, что черезъ 10 секундъ скорость поѣзда становится 10 $\frac{\text{верш.}}{\text{сек.}}$, а черезъ 1 минуту (т.-е. 60 секундъ) 60 $\frac{\text{верш.}}{\text{сек.}}$, что составляетъ, иначе, скорость въ $1^1/_4$ $\frac{\text{саж.}}{\text{сек.}}$. Поэтому въ концѣ 2-ой минуты скорость поѣзда равна $2^1/_2$ $\frac{\text{саж.}}{\text{сек.}}$, а въ концѣ 4-ой минуты разсматриваемая скорость становится 5 $\frac{\text{саж.}}{\text{сек.}}$, или 300 $\frac{\text{саж.}}{\text{мин.}}$, т.-е. 36 $\frac{\text{вер.}}{\text{час.}}$. Такимъ

образомъ въ разсматриваемомъ движеніи, въ концѣ 4-ой минуты поѣздъ пріобрѣтаетъ уже скорость въ 36 $\frac{\text{вер.}}{\text{час.}}$. Постоянное приращеніе скорости на 1 вершокъ въ 1 секунду времени называется *ускореніемъ* разсматриваемаго прямолинейнаго равномѣрноускореннаго движенія, которое условливаются обозначать черезъ 1 $\frac{\text{верш.}}{\text{сек.}^2}$, гдѣ вторая степень при обозначеніи единицъ времени вводится для отличія единицъ ускоренія отъ единицъ скорости. Такимъ образомъ, подъ *ускореніемъ прямолинейнаго равномѣрнопеременнаго движенія* (будетъ ли оно ускореннымъ или замедленнымъ) называется приращеніе скорости въ единицу времени.

Если, напримѣръ, автомобиль, движущійся прямолинейно со скоростью 20 $\frac{\text{саж.}}{\text{сек.}}$, затормозить такъ, чтобы, двигаясь равномѣрно замедленнымъ движеніемъ, онъ обладалъ черезъ 2 секунды времени скоростью 10 $\frac{\text{саж.}}{\text{сек.}}$, то ускореніе этого движенія выражается черезъ $\frac{10-20}{2}=-5$, т.-е. равно -5 $\frac{\text{саж.}}{\text{сек.}^2}$; знакъ—показываетъ, что разсматриваемое движеніе замедленное, т.-е. скорость его убываетъ на 5 сажень въ одну секунду.

Мы разсматривали до сихъ поръ прямолинейное равномѣрноперемѣнное движеніе. Если мы имѣемъ дѣло съ какимъ угодно перемѣннымъ прямолинейнымъ движеніемъ точки, то тогда вводится понятіе о *среднемъ ускореніи точки за данный промежутокъ времени* и *истинномъ ускореніи точки въ данный моментъ времени*. Эти понятія выводятся очень легко, совершенно такъ же, какъ даются понятія о средней и истинной скорости какого угодно движенія точки.

Подобно тому какъ скорость изображается отрѣзками прямой линіи, такъ и ускореніе точки также изображается графически отрѣзками прямой линіи опредѣленной длины, имѣющими столько условныхъ единицъ длины, сколько единицъ своего измѣренія имѣетъ ускореніе. Эти отрѣзки откладываются отъ движущейся точки по направленію ея прямолинейнаго движенія въ сторону скорости, если движеніе ускоренное, и въ сторону прямо противоположную, если движеніе замедленное.

Болѣе сложнымъ является опредѣленіе измѣненія скорости какого-либо криволинейнаго движенія точки. Это происходитъ оттого, что скорость, которую мы обозначаемъ отрѣзкомъ прямой линіи, отложеннымъ по касательной къ кривой линіи, измѣняется не только по своей величинѣ, но и по своему напра-

вленію въ пространствѣ. Какъ доказываютъ, измѣненіе скорости совершается по двумъ взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ: вдоль направленія самой скорости и по направленію, ему перпендикулярному. Соотвѣтственно этому вводятъ два ускоренія: *касательное ускореніе*, направленное по касательной къ криволинейному пути точки, и *центростремительное ускореніе*, направленное перпендикулярно къ послѣднему, при чемъ оба эти ускоренія откладываются въ видѣ отрѣзковъ вдоль указанныхъ направленій отъ движущейся точки.

Каждый изъ этихъ отрѣзковъ имѣетъ столько условныхъ единицъ длины, сколько каждое изъ ускореній имѣетъ единицъ своего измѣренія. Отрѣзокъ, который представляетъ діагональ прямоугольника, построеннаго на касательномъ и центростремительномъ ускореніяхъ, какъ на двухъ смежныхъ сторонахъ, представляетъ величину *полнаго ускоренія движущейся точки въ данный моментъ времени.*

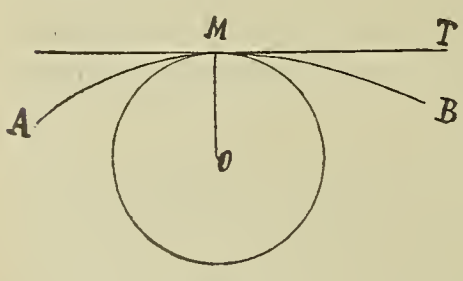
Если разсматриваемая точка движется равномѣрно по криволинейному пути, то ея касательное ускореніе всегда равно нулю, а полное ускореніе въ каждый моментъ времени приводится только къ одному центростремительному.

Если точка движется равномѣрно перемѣннымъ движеніемъ, то ея касательное ускореніе представляетъ постоянную величину.

Касательное ускореніе точки въ данный моментъ времени получается изъ величины, соотвѣтствующей этому моменту истинной скорости и времени, какъ эта скорость получается изъ пространства и времени (см. стр. 197).

Величина центростремительнаго ускоренія точки въ каждый моментъ времени равна отношенію квадрата истинной скорости точки въ данный моментъ времени къ такъ называемому *радіусу кривизны* описываемаго криволинейнаго пути въ данной точкѣ.

Чтобы дать понятіе о радіусѣ кривизны непрерывной (т.-е. безъ разрывовъ и изломовъ, стр. 151) кривой линіи AB (черт. 3), замѣтимъ, что въ каждой ея точкѣ M возможно всегда построить касательную прямую MT и окружность, соприкасающуюся съ нашей кривой въ точкѣ M. Радіусъ ея OM перпендикуляренъ къ касательной MT. Этотъ радіусъ OM называется радіусомъ кривизны кривой AB въ точкѣ M.



Черт. 3.

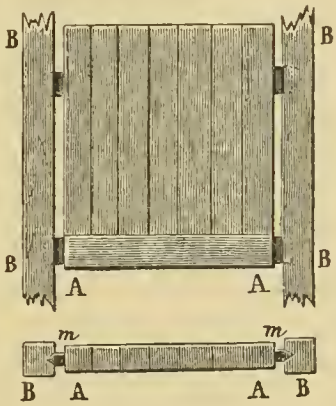
Примѣръ равномѣрно ускореннаго движенія представляетъ всякая

тяжелая точка, падающая отвѣсно сверху внизъ; а тяжелая точка, брошенная вертикально вверхъ, движется равномѣрно замедленнымъ движеніемъ. Въ обоихъ случаяхъ ускореніе представляетъ одну и ту же величину, равную приблизительно 4,9 $\frac{\text{метра}}{\text{секунду}^2}$ въ центральной Россіи, при чемъ величина этого ускоренія нѣсколько измѣняется, въ зависимости отъ разстоянія мѣста отъ земного экватора, вслѣдствіи причины, о которой будетъ сказано ниже.

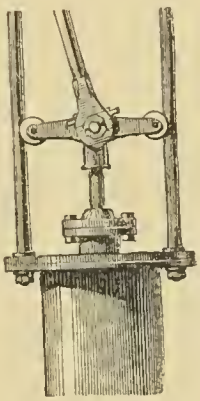
3. Движеніе твердаго тѣла.

Твердое тѣло разсматривается въ механикѣ какъ система матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собой условіемъ—находиться другъ отъ друга на неизмѣнномъ разстояніи. Благодаря этому во все время движенія тѣла налагаются опредѣленныя условія на движеніе отдѣльныхъ его точекъ.

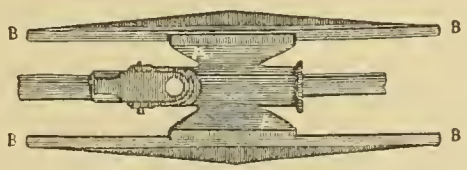
Простѣйшій случай движенія тѣла представляетъ такъ называемое *поступательное* движеніе тѣла, когда всѣ точки его, въ равные промежутки времени, проходятъ равные пути въ одномъ и томъ же направленіи. Примѣромъ можетъ служить движеніе выдвигаемаго или задвигаемаго ящика стола или комода; въ этомъ случаѣ поступательное движеніе является прямолинейнымъ. На чертежѣ 4-омъ изображенъ щитъ AA, имѣющій четыре шипа m, которые принуждены оставаться въ пазахъ, продѣланныхъ въ двухъ связанныхъ между собой брусьяхъ BB. Движеніе щита AA вдоль этихъ брусьевъ является поступательнымъ прямолинейнымъ.



Черт. 4.



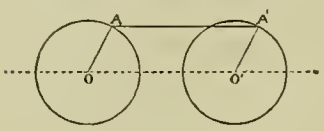
Черт. 6.



Черт. 5.

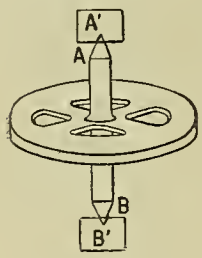
Поршень цилиндра паровой машины совершаетъ также прямолинейное поступательное движеніе. Чтобы заставить его совершать послѣднее, конецъ поршня снабженъ ползуномъ AA (черт. 5), который скользитъ вдоль двухъ направляющихъ полозьевъ BB. На чертежѣ 6-омъ показано другое устройство, гдѣ вмѣсто ползуна стержень поршня снабженъ

поперечникомъ съ двумя колесиками, которыя катятся вдоль направляющихъ штангъ и такимъ образомъ уменьшаютъ треніе. Движеніе шатуна AA' (черт. 7), соединяющаго два равныхъ и смежныхъ колеса паровоза, представляетъ второй примѣръ поступательнаго движенія, при которомъ всѣ точки шатуна описываютъ окружности. Такъ какъ въ поступательномъ движеніи всѣ точки тѣла описываютъ равные пути въ одномъ и томъ же направленіи, то поэтому очевидно, что скорости всѣхъ точекъ тѣла равны и параллельны, а также и ихъ ускоренія. Такимъ образомъ поступательное движеніе тѣла вполнѣ опредѣляется движеніемъ одной какой-либо его точки.

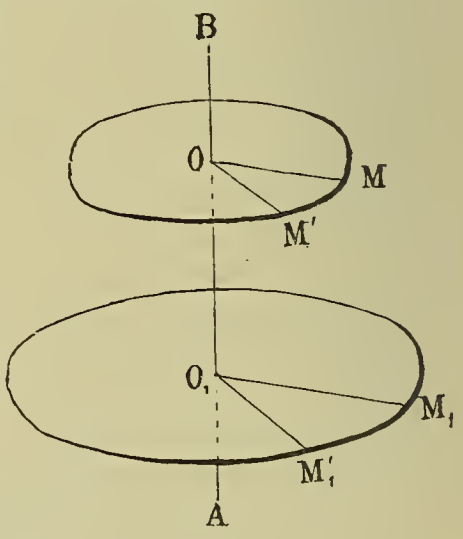


Черт. 7.

Второй не менѣе простой случай движенія твердаго тѣла представляетъ вращеніе его вокругъ неподвижной оси. На чертежѣ 8-омъ представленъ примѣръ твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси. На цилиндрическій валъ AB насаженъ кругъ; заостренные концы вала A и B вставлены въ подшипники A' и B', которые удерживая ось, позволяютъ тѣлу вращаться вокругъ геометрической оси, представляющей ось вала. Въ такомъ случаѣ очевидно, что всѣ точки тѣла описываютъ окружности, центры которыхъ лежатъ на оси вращенія тѣла. Такъ, напримѣръ, если AB (черт. 9) представляетъ неподвижную ось тѣла, то точка тѣла M описываетъ окружность радіусомъ OM вокругъ точки O въ плоскости, перпендикулярной оси AB. Такимъ же образомъ точка тѣла M_1 описываетъ окружность радіусомъ O_1M_1 вокругъ точки O_1 въ плоскости также перпендикулярной оси AB и параллельной плоскости движенія точки M.



Черт. 8.



Чер. 9

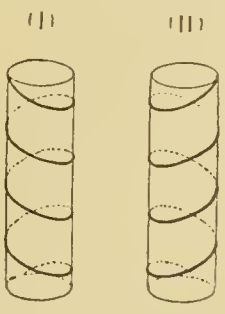
Какъ при движеніи одной точки мы говоримъ о скорости ея, такъ при вращеніи тѣла мы говоримъ объ его *угловой скорости*.

Чтобы дать о ней понятіе, начнемъ съ разсмотрѣнія *равномѣрнаго вращенія* тѣла, когда въ равные промежутки времени тѣло поворачивается на равные углы. Въ такомъ случаѣ *угловой*

скоростью тѣла называется скорость его точекъ, находящихся на разстояніи отъ оси вращенія, равномъ единицѣ длинѣ. Если вращеніе тѣла неравномѣрное, то мы составляемъ понятія о средней угловой скорости вращенія тѣла за данный промежутокъ времени и угловой скорости тѣла въ данный моментъ времени. Чтобы выяснить первое изъ этихъ понятій, мы разсматриваемъ такое равномѣрное движеніе, при которомъ наше тѣло повернулось бы въ тотъ же самый промежутокъ времени на одинаковый уголъ; угловая скорость этого равномѣрнаго вращенія и называется средней угловой скоростью неравномѣрнаго движенія за разсматриваемый промежутокъ времени. Предѣлъ средней угловой скорости, когда промежутокъ времени стремится къ нулю, называется *мгновенной угловой скоростью тѣла въ данный моментъ времени.*

Примѣромъ равномѣрнаго вращенія вокругъ оси въ природѣ является суточное вращеніе земли вокругъ своей оси, при чемъ свой полный оборотъ земля совершаетъ въ 24 часа. Какъ показываютъ астрономическія наблюденія, время полнаго оборота земли (такъ называемыя звѣздныя сутки) почти не измѣнилось съ тѣхъ поръ, какъ ведутся наблюденія.

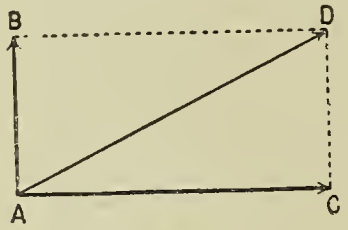
Оба разсмотрѣнныхъ движенія твердаго тѣла, поступательное и вращательное вокругъ оси, представляютъ особенный интересъ, потому что, какъ доказываютъ въ механикѣ, всякое какое бы то ни было произвольное перемѣщеніе твердаго тѣла въ пространствѣ, изъ одного положенія въ другое, всегда можно представить какъ движеніе, состоящее изъ двухъ одновременно совершающихся движеній поступательнаго параллельнаго нѣкоторой оси и вращательнаго движенія вокругъ той же оси. При этомъ очевидно, что каждая точка тѣла описываетъ винтовую линію. На чертежѣ 10-омъ представлены двѣ такихъ винтовыхъ линіи, начерченныхъ на прямыхъ круглыхъ цилиндрахъ (стр. 98). Одна изъ линій (I) завивается справа налѣво, а вторая (II)—въ обратномъ направленіи. Какъ получить винтовую линію, сказано ниже (см. черт. 54). Точка тѣла, двигаясь по винтовой линіи, описываетъ полные обороты вокругъ поверхности цилиндра и вмѣстѣ съ тѣмъ одновременно поднимается вверхъ по этой поверхности, совершая свое движеніе какъ бы по наклонной прямой, обмотанной вокругъ поверхности цилиндра. Соотвѣтствующее перемѣщеніе тѣла мы называемъ винтовымъ, а ось, вдоль которой тѣло движется поступательно и вокругъ которой вращается, называется *осью*



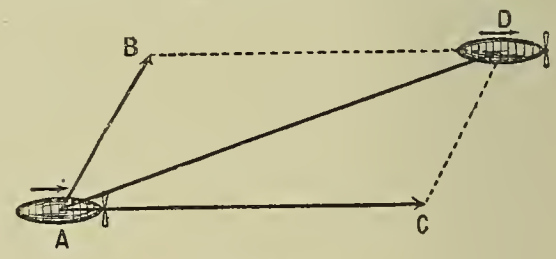
Черт. 10.

винтового перемѣщенія тѣла. Каково бы ни было движеніе тѣла изъ одного его положенія въ другое, мы можемъ разсматривать его какъ рядъ послѣдовательныхъ безконечно-малыхъ, или, какъ говорятъ, элементарныхъ перемѣщеній, разумѣя подъ ними такія перемѣщенія, во время которыхъ каждая изъ точекъ тѣла совершаетъ безконечно-малое перемѣщеніе. Но такое безконечно-малое перемѣщеніе тѣла является также винтовымъ вокругъ оси, которая движется вмѣстѣ съ тѣломъ и измѣняетъ въ немъ свое положеніе. Эта ось называется *мгновенною винтовою осью* тѣла. Поэтому каждое движеніе твердаго тѣла состоитъ изъ ряда элементарныхъ или мгновенныхъ винтовыхъ вращеній.

Разсматривать движеніе тѣла, какъ состоящее изъ одновременныхъ нѣсколькихъ движеній, бываетъ очень удобно для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ. Напримѣръ, если точка совершаетъ относительное (см. стр. 190) движеніе по отношенію къ нѣкоторому движущемуся тѣлу, то интересно узнать, каково дѣйствительное движеніе нашей точки по отношенію къ неподвижнымъ предметамъ. Предположимъ, напримѣръ, что точка A (черт. 11) перемѣщается прямолинейно на разстояніе AC вмѣстѣ съ тѣломъ, на которомъ наша точка находится. Но въ то же



Черт. 11.



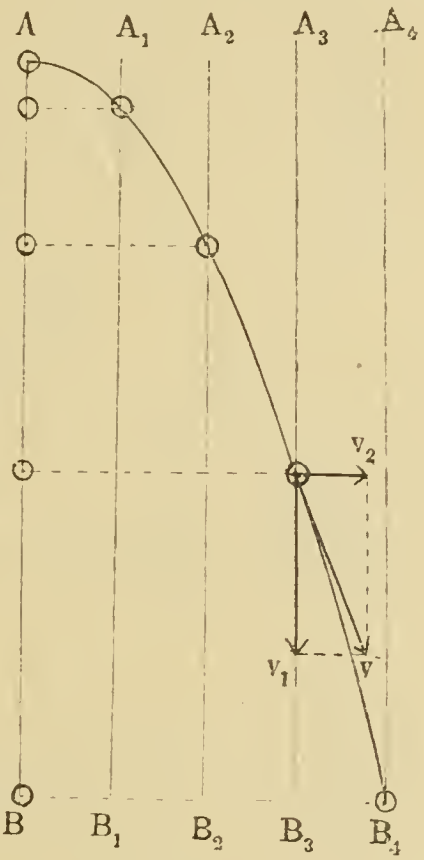
Черт. 12.

время наша точка A движется по этому тѣлу и перемѣщается за то же самое время, на разстояніе AB, перпендикулярно къ перемѣщенію AC. Поэтому въ концѣ разсматриваемаго промежутка времени точка A будетъ находиться въ положеніи D, т.-е. въ дѣйствительности какъ бы совершитъ перемѣщеніе AD, которое *представляетъ діагональ прямоугольника $ACDB$, двумя сторонами котораго служатъ перемѣщенія AC и AB.* На чертежѣ 12-мъ представленъ управляемый аэростатъ, который въ нѣкоторый промежутокъ времени совершаетъ прямолинейное перемѣщеніе AC подъ вліяніемъ своего движущаго аппарата и въ то же самое время относится вѣтромъ прямолинейно на разстояніе AB, подъ острымъ угломъ къ направленію AC.

Въ концѣ разсматриваемаго промежутка времени нашъ аэростатъ оказывается въ положеніи D, совершивъ сложное перемѣщеніе AD.

Это перемѣщеніе представляетъ *діагональ параллелограма, построеннаго на составляющихъ перемѣщеніяхъ AC и AB, какъ на двухъ смежныхъ сторонахъ.*

Разсмотримъ еще слѣдующій примѣръ. Поѣздъ движется *равномѣрно по прямому пути*, и изъ окна вагона падаетъ яблоко на полотно дороги. Пассажиръ изъ окна вагона видитъ, что яблоко опускается вертикально внизъ вдоль вагона и только приблизившись къ землѣ отдѣляется отъ вагона. Дѣйствительно, относительное движеніе яблока по отношенію къ вагону прямолинейное. Поэтому пусть AB (черт. 13) представляетъ прямую линію, начерченную на вагонѣ, вдоль которой отмѣчены положенія яблока черезъ равные промежутки времени. Но прямая AB, двигаясь равномѣрно вмѣстѣ съ вагономъ, будетъ занимать черезъ эти равные промежутки времени послѣдовательно положенія A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и A_4B_4. Поэтому путь, который опишетъ падающее яблоко по отношенію къ неподвижной землѣ, представится въ дѣйствительности кривой линіей AB_4. Эта кривая представляетъ линію, которая называется параболой (см. стр. 136).



Черт. 13.

Чтобы опредѣлить скорость падающаго яблока, замѣтимъ, что яблоко движется вмѣстѣ съ вагономъ. Поэтому скорость его будетъ составляться изъ скорости паденія V_2 и скорости, съ которой движется вагонъ. Скорость получающагося при этомъ *сложнаго* (или, какъ говорятъ также, *абсолютнаго*) движенія представляетъ по величинѣ и направленію діагональ параллелограма, построеннаго на скоростяхъ такъ называемыхъ *составляющихъ* движеній, какъ на двухъ смежныхъ сторонахъ.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ скорость паденія V_1 перпендикулярна къ скорости V_2 (какъ говорятъ, *скорости переноснаго* движенія), то поэтому параллелограмъ скоростей представитъ прямоугольникъ. Его діагональ, представляющая искомую скорость V, направлена по касательной къ кривой, представляющей путь падающаго яблока.

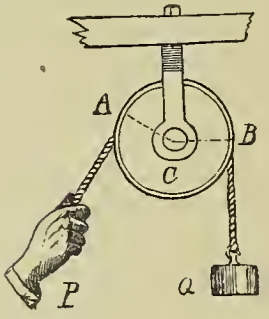
4. Силы, приложенныя къ одной точкѣ.

Сила (см. стр. 193) опредѣляется своей точкой приложенія (т.-е точкой, которая приходитъ въ движеніе подъ дѣйствіемъ этой силы), величиной, измѣряемой въ единицахъ вѣса, и направленіемъ, совпадающимъ съ направленіемъ движенія, которое приняла бы точка приложенія силы подъ дѣйствіемъ послѣдней, при условіи, что эта точка не связана съ другими точками и на нее не дѣйствуетъ другихъ силъ.

Поэтому силу изображаютъ условно графически въ видѣ отрѣзка опредѣленной длины, пропорціональной величинѣ силы, отложенной по направленію силы отъ точки ея приложенія.

Сила, изображенная графически отрѣзкомъ прямой линіи, обыкновенно называется одной буквой, поставленной въ концѣ отрѣзка, заканчивающагося стрѣлкой.

Чтобы опредѣлить направленіе силы тяжести (см. стр. 193) возьмемъ за одинъ конецъ нить, къ другому концу которой привѣшенъ какой-либо грузъ (черт. 14). Направленіе, которое принимаетъ нить, называется *отвѣснымъ* и представляетъ направленіе силы тяжести.



Черт. 14.

Черт. 15.

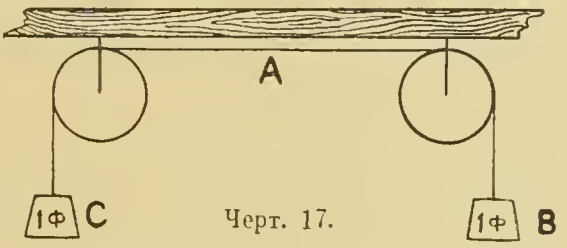
Если мы тянемъ какое-нибудь тѣло за прикрѣпленную къ нему веревку, то наше усиліе передается черезъ веревку на тѣло, къ которому такимъ образомъ мы прикладываемъ сплу, называемую *натяженіемъ веревки*. При подъемѣ тяжестей удобно пользоваться неподвижно укрѣпленнымъ блокомъ, изображеннымъ на чертежѣ 15-омъ. Благодаря *натяженію* веревки, дѣйствіе груза Q передается по веревкѣ на руку P, или, наоборотъ, усиліе руки P передается веревкой на грузъ Q. Слѣдуетъ замѣтить, что блокъ только *измѣняетъ направленіе силы, но не измѣняетъ ея величины*. Мы могли бы, напримѣръ, перекинуть веревку черезъ край стола или черезъ какое-либо другое неподвижное тѣло, чтобы измѣнить направленіе прилагаемой силы. При этомъ, однако, развивается новая сила тренія веревки о предметъ, по которому веревка скользитъ. Но если воспользоваться блокомъ, то новыя усилія, необходимыя для преодолѣнія силы тренія, становятся весьма малыми, почти незамѣтными.

Что неподвижный блокъ измѣняетъ только направленіе силы, не измѣняя ея величины, въ этомъ легко убѣдиться слѣду-

ющимъ образомъ. Перекинемъ черезъ неподвижно укрѣпленный блокъ веревку, одинъ конецъ которой надѣтъ на крючекъ укрѣпленнаго пружиннаго динамометра P, какъ показано на чертежѣ 16-мъ. Къ свободному концу веревки подвѣшена гиря Q. Динамометръ показываетъ вѣсъ гири и такимъ образомъ доказываетъ что вѣсъ Q вызываетъ равное ему натяженіе веревки, прилагаемое къ крючку динамометра P. Если наблюдателю удалось бы замѣтить небольшую разницу въ вѣсѣ гири и показаніи динамометра, то только вслѣдствіе его собственнаго вѣса и тренія веревки по блоку, которые можно было бы обнаружить только при очень чувствительномъ динамометрѣ. Можно было бы помѣстить динамометръ иначе, чѣмъ показано на чертежѣ 16-мъ, отнеся его какъ угодно въ сторону, но и тогда показанія его не измѣнились бы.

Черт. 16.

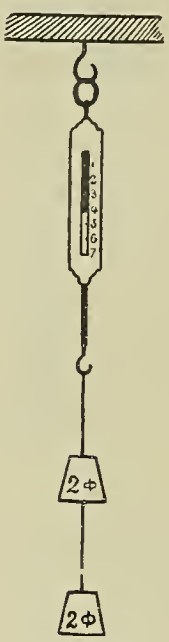
Воспользовавшись описанными свойствами блока, легко убѣдиться, что *двѣ равныхъ, но прямо-противоположно направленныхъ силы, приложенныхъ къ точкѣ, взаимно уравновѣшиваются.* Возьмемъ для этого два неподвижно укрѣпленныхъ блока. Къ концамъ перекинутой черезъ оба блока веревки прикрѣпляемъ равные грузы B и C, изъ которыхъ каждый равенъ, напримѣръ, 1 фунту. Очевидно, оба груза остаются въ равновѣсіи. Такъ какъ при этомъ къ точкѣ веревки A, находящейся на ея серединѣ, приложены два равныхъ и прямо-противоположныхъ натяженія нити, каждое по величинѣ равное 1 фунту, то опытъ доказываетъ, что эти двѣ силы взаимно уравновѣшиваются.



Черт. 17.

Если къ точкѣ приложены двѣ или нѣсколько силъ, направленныхъ вдоль одной и той же прямой линіи въ одну сторону, или въ прямо-противоположныя стороны, то всѣ эти силы замѣняются одной силой. Эта сила называется *равнодѣйствующей*, данныя же силы называются ея *составляющими*. Если составляющія силы, приложенныя къ одной точкѣ, всѣ направлены въ одну сторону, то равнодѣйствующая равна ихъ суммѣ. Напримѣръ, на крючекъ пружинныхъ вѣсовъ динамометра привѣсимъ двѣ гири по 2 фунта каждую (см. черт. 18); вѣсы показываютъ 4 фунта, т.-е. къ крючку вѣсовъ приложена равнодѣйствующая сила въ 4 фунта, равная суммѣ обѣихъ составляющихъ силъ.

Если приложены къ одной точкѣ двѣ силы, направленныя по одной прямой, но въ прямо-противоположныя стороны, то равнодѣйствующая равна ихъ разности и направлена въ сторону большей силы. Если, напримѣръ, къ крючку нашихъ вѣсовъ (черт. 18) привѣшена гиря въ 4 фунта и, кромѣ того, приложена сила въ 2 фунта, направленная вертикально вверхъ, то равнодѣйствующая обѣихъ силъ равна 2-мъ фунтамъ и направлена внизъ. Легко убѣдиться въ этомъ, разсматривая первую силу въ 4 фунта, какъ равнодѣйствующую двухъ силъ по 2 фунта каждая, направленныхъ вертикально внизъ. Чтобы найти искомую равнодѣйствующую, достаточно снять съ вѣсовъ одну гирю въ 2 фунта. Тогда на вѣсахъ остается всего одна гиря въ 2 фунта, представляющая искомую равнодѣйствующую.

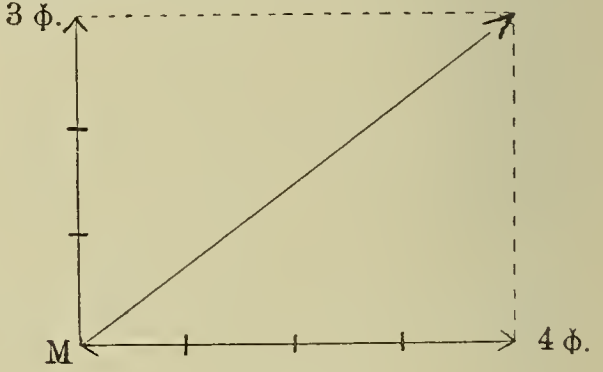


Черт. 18.

Предположимъ, что въ точкѣ M (черт. 19) приложены двѣ силы, одна въ 3, а другая въ 4 фунта, направленія которыхъ образуютъ прямой уголъ. Мы называемъ *равнодѣйствующей* ихъ такую одну силу, дѣйствіе которой на нашу точку таково же, какъ обѣихъ данныхъ силъ.

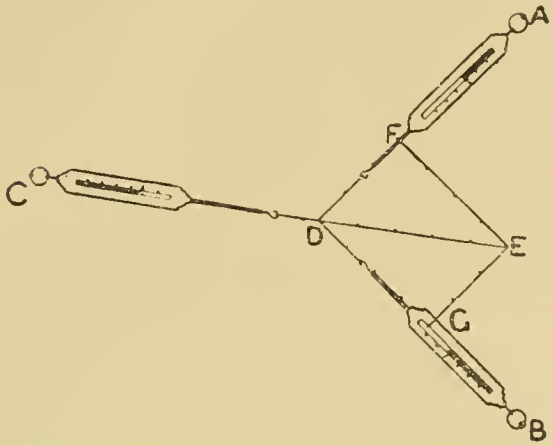
Равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, равна по величинѣ и по направленію діагонали параллелограма, построеннаго на данныхъ силахъ, какъ на двухъ смежныхъ сторонахъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ трое пружинныхъ вѣсовъ (динамометровъ), укрѣпленныхъ въ трехъ точкахъ A, B и C (см. черт. 20). Какъ показываютъ вѣсы, къ точкѣ D приложена сила DF, равная 3 фунтамъ, и сила DG, равная 4 фунтамъ, направленія которыхъ образуютъ прямой уголъ. Эти двѣ силы уравновѣшиваются натяженіемъ пружины вѣсовъ въ точкѣ C, равнымъ 5 фунтамъ. Но само собою разумѣется, что послѣдняя сила равна и прямо-противоположна силѣ DE, тоже равной 5-ти фунтамъ, которая и представляетъ искомую равнодѣйствующую. Какъ видно на чертежѣ, эта равнодѣйствующая представляется діагональю DE прямоугольника $DFEG$.

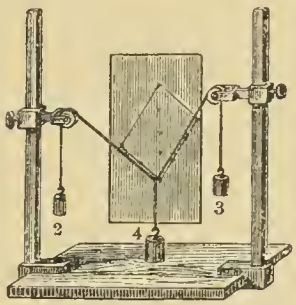


Черт. 19.

Чертежъ 21-ый изображаетъ другой приборъ, которымъ легко пользоваться для доказательства *правила параллелограма силъ*, приложенныхъ въ одной точкѣ. Гири въ 2 и 3 единицы вѣса, подвѣшенныя на нитяхъ, перекинутыхъ черезъ небольшіе неподвижные блоки, уравновѣшиваются гиреи въ 4 единицы вѣса. Поэтому равная и прямопротивоположная ей сила въ 4 единицы представляетъ равнодѣйствующую данныхъ силъ. На приложенной сзади прибора бумагѣ видно,



Черт. 20.



Черт. 21.

что направленіе равнодѣйствующей совпадаетъ съ діагональю параллелограма, сторонами котораго служатъ отрѣзки въ 2 и 3 единицы длины, при чемъ длина діагонали равна четыремъ такимъ единицамъ длины.

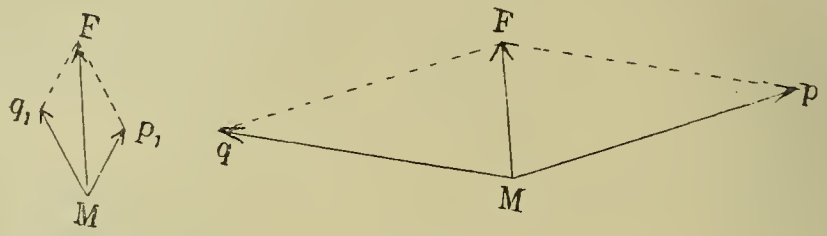
При помощи описанныхъ приборовъ равнодѣйствующая данныхъ силъ опредѣляется изъ условія равновѣсія трехъ силъ, приложенныхъ къ данной точкѣ.

Какъ видно, всѣ эти три силы лежатъ въ одной плоскости. Отсюда выводится заключеніе, что *для равновѣсія трехъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, эти силы должны лежать въ одной плоскости*. Кромѣ того, изъ разсмотрѣнія обоихъ рисунковъ читатель легко увидитъ, что эти *три взаимно уравновѣшивающихся силы образуютъ замкнутый треугольникъ*. Такъ, на чертежѣ 20-мъ уравновѣшивающіяся силы представляются отрѣзками DG, GE и ED, образующими замкнутый $\triangle$—къ DGE.

Если къ точкѣ приложены три не уравновѣшивающихся силы, то, сложивъ двѣ изъ нихъ по правилу параллелограма, полученную равнодѣйствующую сложимъ съ третьей силой и получимъ, такимъ образомъ, равнодѣйствующую всѣхъ трехъ силъ. Такимъ образомъ можно сложить сколько угодно силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ.

Обратно, каждую силу можно замѣнить двумя силами. Чтобы опредѣлить величину такъ называемыхъ *составляющихъ* силъ,

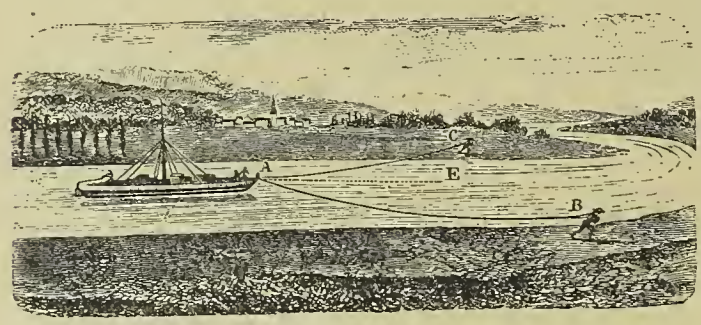
на которыя мы раскладываемъ данную силу, достаточно построить такой параллелограмъ, для котораго данная сила служила бы діагональю. На чертежѣ 22-омъ изображены два параллелограма $MpFq$ и Mp_1Fq_1, съ равными діагоналями MF. Изъ сравненія ихъ становится очевиднымъ, что разложить силу F на двѣ возможно различными способами, при чемъ составляющія силы



Черт. 22.

могутъ быть значительно больше данной силы, если уголъ между ними тупой (силы p и q) или меньше данной силы, если уголъ между ними острый (силы p_1 и q_1). Поэтому задача разложенія силы на двѣ составляющихъ вообще неопредѣленная, если не дано какихъ-либо дополнительныхъ условій.

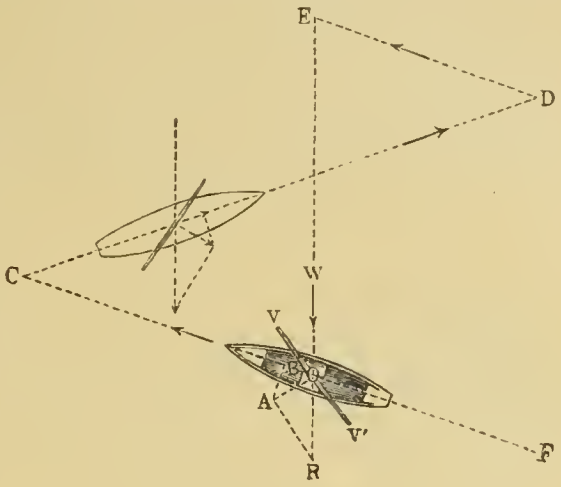
Человѣку очень часто приходится встрѣчаться въ природѣ съ сложеніемъ и разложеніемъ силъ и пользоваться имъ для своихъ цѣлей. На рисункѣ 23-ьемъ показано, какъ два рабочихъ C и B, при помощи канатовъ, прикрѣпленныхъ въ точкѣ A баржи, тянутъ ее вдоль рѣки. Въ этомъ случаѣ натяженія обоихъ канатовъ, слагаясь по правилу параллелограма, даютъ одну силу, дѣйствующую по направленію AE вдоль рѣки, которая и заставляетъ баржу двигаться.



Черт. 23.

Читателю, можетъ-быть, приходилось видѣть, какъ можно плыть на парусной лодкѣ по различнымъ направленіямъ, и даже противъ вѣтра. На чертежѣ 24-омъ показано, что, направляя лодку по ломанной кривой $FCDE$, можно подвигаться по рѣкѣ, (если только она достаточно широка) даже противъ вѣтра, направленіе котораго EW указано стрѣлкой.

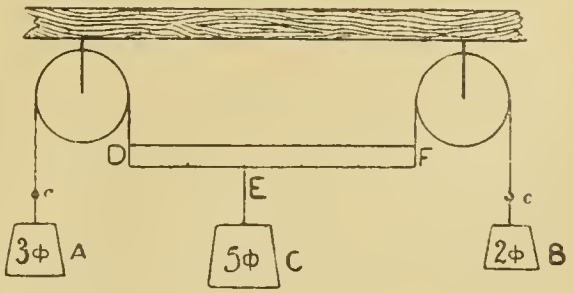
Сила вѣтра OR разлагается на двѣ составляющихъ силы; одну OA, направленную перпендикулярно къ парусу VV, которая надуваетъ парусъ, и вторую AR, параллельную направленію паруса и не оказывающую на него полезнаго вліянія для движенія. Составляющая OA разлагается, въ свою очередь, на силу OB, направленную вдоль остова лодки и на вторую силу равную BA, перпендикулярную первой. Сила OB заставляетъ лодку двигаться по направленію FC. Вторая же составляющая стремится сдвинуть лодку съ взятаго направленія и поэтому должна уничтожаться дѣйствіемъ руля. Когда лодка переходитъ на прямую CD, то тамъ парусъ долженъ быть поставленъ въ новомъ направленіи, какъ показано на чертежѣ.



Черт. 24.

5. Параллельныя силы.

Предположимъ, что къ твердому тѣлу въ двухъ различныхъ его точкахъ приложены двѣ параллельныхъ силы. Наша задача состоитъ въ разысканіи ихъ *равнодѣйствующей*, т.-е. одной силы, которая замѣняетъ собой обѣ данныя силы. Пусть тѣло представляетъ брусокъ DF (черт. 25), въ концахъ котораго подвѣшены грузы A и B, на нитяхъ Dc и Fc, идущихъ изъ точекъ D и F вертикально вверхъ и затѣмъ перекинутыхъ черезъ блоки; грузы A и B взяты соотвѣтственно въ 3 и 2 фунта. Эти грузы представляютъ двѣ параллельныхъ силы. Если раздѣлить длину бруска DF на пять равныхъ частей и въ точкѣ E, на второмъ дѣленіи отъ D, привѣсить грузъ C въ 5 фунтовъ, то въ такомъ случаѣ нашъ брусокъ будетъ находиться въ равновѣсіи, т.-е. всѣ три приложенныхъ къ нему параллельныхъ силы взаимно уравновѣшиваются.



Черт. 25.

Такъ какъ грузъ C уравновѣшивается силой въ 5 фунтовъ, равной и прямо противоположной силѣ C, то эта послѣдняя и будетъ представлять равнодѣйствующую параллельныхъ силъ A и B, приложенныхъ въ точкахъ D и F.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что *равнодѣйствующая сила равна суммѣ составляющихъ силъ.*

Кромѣ того, *точка приложенія E равнодѣйствующей дѣлитъ разстояніе, между точками приложенія D и F составляющихъ силъ, въ отношеніи, обратномъ силамъ A и B,* т.-е.

$$\frac{DE}{EF} = \frac{B}{A}, \text{ или } A.\,DE = B.\,EF.$$

Произведеніе силы A на разстояніе DE, представляющее разстояніе точки приложенія силы A, отъ точки приложенія E равнодѣйствующей силы, называется *моментомъ силы A* относительно точки E. Поэтому положеніе точки приложенія равнодѣйствующей силы опредѣляется также слѣдующимъ правиломъ, что *моменты составляющихъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, относительно точки приложенія равнодѣйствующей силы, равны между собой.*

Три параллельныхъ силы A, B и C взаимно уравновѣшиваются, т.-е. мы можемъ сказать, что каждая изъ нихъ уравновѣшиваетъ двѣ остальныхъ. Поэтому можемъ разсматривать силу B какъ уравновѣшивающую обѣ силы A и C. Но, съ другой стороны, очевидно, что сила B уравновѣшивается равной ей силой, приложенной въ точкѣ F, но направленной въ прямопротивоположную сторону, т.-е. вертикально внизъ. Такъ какъ эта послѣдняя сила представляетъ равнодѣйствующую силъ A и C, то, слѣдовательно, *равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ прямопротивоположныя стороны, равна ихъ разности и направлена въ сторону большей силы.*

Легко видѣть, что удовлетворяется равенство

$$A.\,DF = C.\,EF,$$

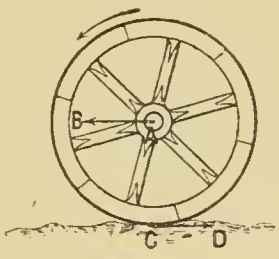
такъ какъ каждое изъ этихъ произведеній 3×5 и 5×3 равно одному и тому же числу 15.

Поэтому *разстоянія точки приложенія равнодѣйствующей отъ точекъ приложенія составляющихъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ прямо-противоположныя стороны, находятся въ отношеніи обратномъ составляющимъ силамъ.* Въ данномъ случаѣ говорятъ, что точка F дѣлитъ разстояніе DE *внѣшнимъ образомъ* въ отношеніи обратномъ силамъ A и C. Полученный выводъ также выражается *условіемъ равенства моментовъ составляющихъ силъ относительно точки приложенія равнодѣйствующей силы.*

Если къ тѣлу приложены двѣ равныхъ параллельныхъ силы, направленныхъ въ прямо-противоположныя стороны, то разность ихъ равна нулю, т.-е. двѣ такихъ силы не имѣютъ равнодѣйствующей. Такія двѣ силы, какъ говорятъ, представляютъ *пару силъ*, вращающую тѣло, къ которому эта пара приложена. Читатель легко можетъ представить себѣ, что мы всякій разъ прикладываемъ пару силъ, когда желаемъ повернуть какое-либо тѣло.

Если вы хотите ввинтить пробочникъ или буравчикъ, вы берете его ручку такъ, чтобы съ равнымъ усиліемъ давить на ея оба конца и такимъ образомъ прикладываете пару силъ.

Когда лошадь везетъ возъ, то ея усиліе, при помощи тяжей, передается на ось и такимъ образомъ въ ступицѣ колеса (черт. 26) оказывается приложенной сила AB. Въ точкѣ прикосновенія C колеса съ землею развивается сила тренія CD, которая удерживаетъ колесо отъ движенія впередъ, т.-е. приложена въ сторону прямо-противоположную силѣ AB. Если обѣ эти силы AB и CD равны, то онѣ образуютъ пару силъ, которая заставляетъ колесо вращаться вокругъ своей оси. Если же сила CD меньше AB, то послѣдняя разлагается на двѣ силы, одну равную и прямо-противоположную CD, а другую равную разности AB и CD. Первая съ CD образуетъ пару, вращающую колесо, а вторая заставляетъ всю повозку двигаться впередъ.



Черт. 26.

6. Центръ тяжести.

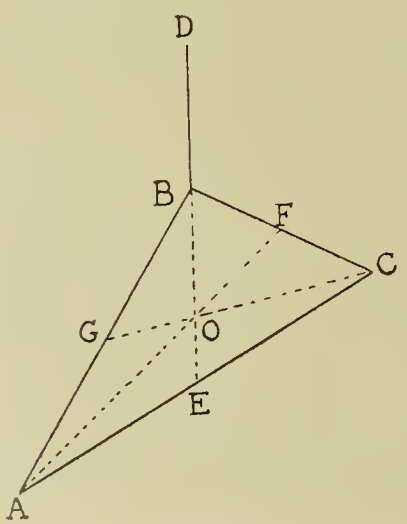
Какое бы тяжелое тѣло мы ни взяли, каждая часть его, которую можно было бы мысленно отдѣлить отъ тѣла, также обладаетъ тѣмъ же самымъ свойствомъ тяжести. Поэтому каждое тяжелое тѣло мы можемъ представить, какъ состоящее изъ совокупности сколь угодно малыхъ (или какъ говорятъ въ математикѣ *безконечно-малыхъ*, см. стр. 145) составныхъ тяжелыхъ частей или тяжелыхъ элементовъ. Несмотря на то, что притяженіе земли (т.-е. направленіе силы тяжести) направлено изъ точки приложенія этой силы къ центру земли, представляющей шарообразное тѣло, мы считаемъ, что всѣ силы тяжести параллельны. Такое предположеніе возможно въ виду того, что обыкновенно размѣры разсматриваемыхъ тѣлъ настолько незначительны, сравнительно съ разстояніемъ этихъ тѣлъ отъ центра земли, что прямыя линіи, идущія изъ различныхъ точекъ разсматриваемаго тѣла къ центру земли, мы можемъ считать параллельными.

Складывая параллельныя силы тяжести, приложенныя ко всѣмъ элементамъ нашего тѣла, мы найдемъ точку приложенія ихъ равподѣйствующей, которая называется *центромъ тяжести тѣла*. Равнодѣйствующая сила всѣхъ сложенныхъ нами параллельныхъ силъ тяжести называется силой тяжести, или *вѣсомъ нашего тѣла*.

Возьмемъ, напримѣръ, деревянную линейку. Она состоитъ изъ двухъ равныхъ по вѣсу половинъ; поэтому центръ тяжести ея находится посрединѣ. Центръ тяжести карандаша, который еще не очиненъ, тоже находится на его срединѣ. Мы предполагаемъ при этомъ, что вѣсъ обѣихъ половинъ, какъ линейки, такъ и карандаша, одинъ и тотъ же. Но если въ одномъ концѣ линейки продѣлано круглое отверстіе, чтобы вѣшать линейку на гвоздь, а карандашъ заостренъ съ одного конца или на одномъ концѣ имѣетъ металлическій наконечникъ, то, въ такомъ случаѣ, и линейка и карандашъ представляютъ *неоднородныя* тѣла; ихъ центръ тяжести не находится посрединѣ.

Если однородную линейку положить ея серединой на палецъ, то она остается въ равновѣсіи. Вообще всякое тяжелое тѣло, будучи подперто въ центрѣ тяжести, остается въ равновѣсіи. Это происходитъ оттого, что сила тяжести уничтожается, или, лучше сказать, уравновѣшивается сопротивленіемъ пальца или вообще сопротивленіемъ точки опоры.

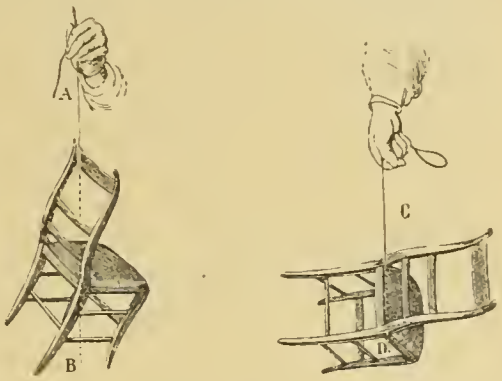
Этимъ свойствомъ центра тяжести можно воспользоваться для разысканія на опытѣ положенія центра тяжести различныхъ тѣлъ. Напримѣръ, подвѣсьте на ниткѣ треугольную пластинку ABC (черт. 27) за вершину B и начертите на треугольникѣ прямую BE, представляющую продолженіе нити DB. Если нашъ треугольникъ *однородный*, т.-е. равныя по объему его части имѣютъ одинаковый вѣсъ, то точка E раздѣлитъ сторону треугольника AC пополамъ. Если подвѣшенный такимъ образомъ треугольникъ находится въ покоѣ, то, стало-быть, очевидно, что центръ тяжести его расположенъ на прямой BE. Подвѣсивъ треугольникъ за вершину A, найдемъ, что искомый центръ долженъ быть также на прямой AF, дѣлящей сторону BC пополамъ. Прямыя AF, BE и CG, соединяющія вершины треугольника съ середи-



Черт. 27.

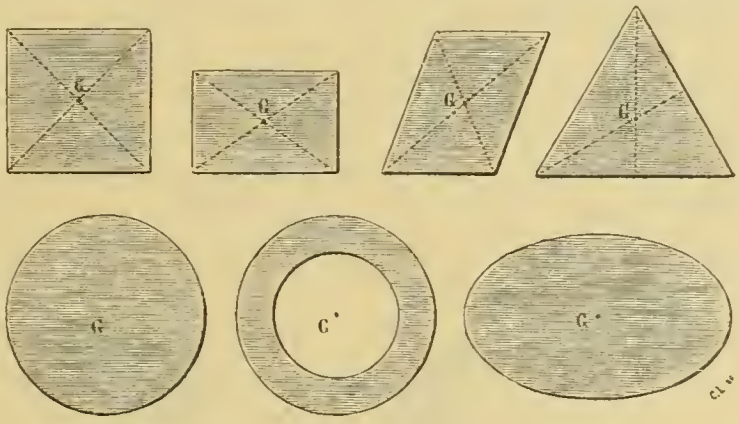
нами противолежащихъ сторонъ, называются *медіанами* треугольника, и всѣ три пересѣкаются въ одной и той же точкѣ треугольника O. Поэтому *центръ тяжести однородной треугольной пластинки находится въ точкѣ пересѣченія медіанъ.*

Такимъ же образомъ, чтобы опредѣлить положеніе центра тяжести какого-либо предмета, мы подвѣшиваемъ его на веревкѣ въ двухъ различныхъ положеніяхъ. Напримѣръ, сперва мы подвѣшиваемъ стулъ (черт. 28) въ точкѣ A, а затѣмъ въ точкѣ C. Въ каждомъ изъ обоихъ положеній стулъ будетъ въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, когда центръ тяжести его будетъ расположенъ на вертикальной прямой, проходящей черезъ точку подвѣса. Поэтому центръ тяжести нашего стула долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія направленій AB и CD, которыя совпадаютъ соотвѣтственно съ вертикальными направленіями веревки, удерживающей стулъ въ равновѣсіи въ каждомъ изъ его двухъ положеній.



Черт. 28.

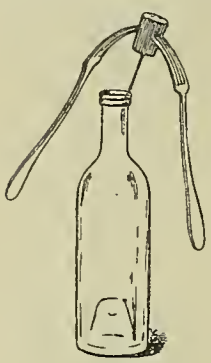
Читатель можетъ легко убѣдиться, что центръ тяжести прямоугольника, окружности, правильнаго многоугольника, параллелограма, кольцеобразной или эллиптической пластинки лежитъ въ ихъ геометрическомъ центрѣ, какъ показано на прилагаемомъ чертежѣ 29-мъ. Центръ тяжести параллелопипеда и шара лежитъ также въ ихъ геометрическомъ центрѣ. Всѣ эти указанія относятся только къ тому случаю, когда разсматриваемыя тѣла *однородны*, т.-е. состоятъ изъ вещества, которое имѣетъ всегда одинъ и тотъ же вѣсъ въ равныхъ объемахъ.



Черт. 29.

Выше было указано, что тѣло остается въ равновѣсіи, если центръ тяжести его подпереть и, слѣдовательно, вліяніе силы тяжести уничтожается силами сопротивленія опоръ. Это замѣ-

чательное свойство центра тяжести тѣлъ даетъ очень часто простое объясненіе нѣкоторыхъ явленій, которыя съ перваго взгляда кажутся непонятными. Такъ, напримѣръ, воткните въ пробку съ двухъ сторонъ по вилкѣ, подъ острымъ угломъ другъ къ другу, а снизу воткните иглу, какъ показано на чертежѣ 30-мъ. Если поставить иглу на горлышко бутылки, то пробка съ вилками не будетъ сваливаться, даже если бутылку наклонить. Происходитъ это оттого, что центръ тяжести пробки съ вилками находится ниже точки опоры иглы.



Черт. 30.

Тѣло человѣка находится подъ вліяніемъ силы собственной своей тяжести. Поэтому каждое положеніе, которое бы мы ни заняли, должно соотвѣтствовать положенію равновѣсія нашего тѣла; и вліяніе на него силы тяжести должно уничтожаться сопротивленіями въ тѣхъ точкахъ, которыми мы соприкасаемся съ другими неподвижными предметами. Если мы стоимъ, опираясь только на ноги, то, слѣдовательно, вѣсъ тѣла уравновѣшивается сопротивленіемъ подошвъ.

Если тѣло опирается на плоскость нѣсколькими точками, то площадь многоугольника, охватывающаго эти всѣ точки, называется *площадью опоры*.

Необходимое условіе равновѣсія тѣла, опирающагося на горизонтальную плоскость, заключается въ томъ, *чтобы отвѣсная прямая линія, опущенная изъ центра тяжести тѣла, проходила внутри площади опоры*.

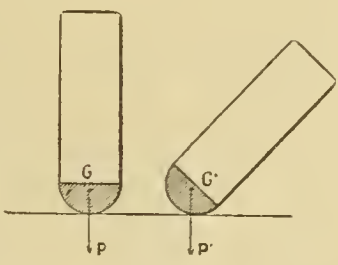
Вы легко замѣтите, что стоя на ногахъ во всякомъ положеніи, въ какомъ бы вы ни находились, вы никогда не упадете подъ вліяніемъ силы тяжести своего тѣла, если будете соблюдать послѣднее условіе. Поэтому становится вполнѣ понятнымъ, что человѣкъ, который несетъ или передвигаетъ какую-либо тяжесть (см. черт. 31), наклоняется то въ одну, то въ другую сторону, повинуясь инстинктивно указанному необходимому условію своего равновѣсія.

Черт. 31.

Среди положеній равновѣсія мы дѣлаемъ различіе, въ зависимости отъ такъ называемаго условія устойчивости. Говорятъ, что положеніе равновѣсія тѣла *устойчиво*, если тѣло, будучи отклонено отъ положенія своего равновѣсія, стремится вновь возвратиться въ послѣднее. Если тѣло, наоборотъ, продолжаетъ еще больше отклоняться отъ положенія равновѣсія, будучи разъ выведено изъ него, то положеніе равновѣсія тѣла *неустойчиво*. Наконецъ, если тѣло остается въ равновѣсіи также въ томъ новомъ положеніи, послѣ незначительнаго отклоненія отъ положенія равновѣсія, то послѣднее называется *безразличнымъ*.

Если тяжелое тѣло опирается нѣсколькими точками на горизонтальную плоскость, то положеніе равновѣсія его устойчиво для всѣхъ отклоненій, при которыхъ направленіе отвѣсной линіи, опущенной изъ центра тяжести тѣла, проходитъ внутри площади опоры. Такъ, напримѣръ, высоко нагруженный возъ, наклоняясь въ сторону, не падаетъ до тѣхъ поръ, пока отклоненія его удовлетворяютъ указанному требованію.

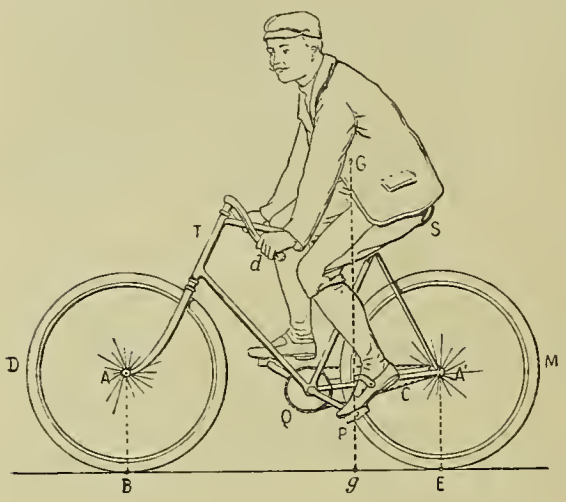
Если тяжелое твердое тѣло опирается на горизонтальную плоскость всего одной точкой, то *изъ всѣхъ возможныхъ его положеній равновѣсія устойчивы только тѣ*, для которыхъ центръ тяжести занимаетъ самое низкое положеніе. Напримѣръ, положеніе равновѣсія яйца, поставленнаго вертикально вверхъ, неустойчиво, напротивъ, яйцо, положенное горизонтально, находится въ устойчивомъ положеніи равновѣсія для продольныхъ колебаній. Наконецъ лежащій на горизонтальной плоскости тяжелый однородный шаръ находится въ безразличномъ положеніи равновѣсія. Наглядный примѣръ устойчиваго равновѣсія представляетъ извѣстная игрушка *ванька-встанька*, состоящая изъ тяжелаго полушара, съ очень легкой придѣланной къ нему верхнею частью, въ видѣ куклы или просто цилиндра, какъ показано на чертежѣ 32-мъ. Верхняя часть игрушки должна быть настолько легкой, чтобы центръ тяжести всего тѣла, въ которомъ приложенъ вѣсъ его P, находился внутри нижняго полушара. Тогда центръ тяжести G будетъ занимать самое низкое положеніе, когда цилиндръ стоитъ вертикально. Поэтому если его наклонить въ сторону, то центръ тяжести всего тѣла поднимается вверхъ, и цилиндръ стремится снова встать вертикально.



Черт. 32.

Велосипедистъ (черт. 33) опирается на полотно дороги двумя точками B и E, въ которыхъ колеса велосипеда касаются до-

роги. Поэтому для равновѣсія велосипедиста необходимо, чтобы вертикальная прямая, опущенная изъ его центра тяжести G, пересѣкала прямую BE въ точкѣ g, расположенной между точками B и E. Съ такимъ расчетомъ и укрѣпляется сѣдло велосипеда S.



Черт. 33.

Однако всѣмъ хорошо извѣстно, что положеніе равновѣсія двухколеснаго велосипеда неустойчивое, и велосипедистъ не въ состояніи усидѣть на велосипедѣ, если онъ не движется. Велосипедистъ не падаетъ съ велосипедомъ во время движенія, только вслѣдствіе свойства, по которому вращающееся тѣло стремится сохранить плоскость своего движенія.

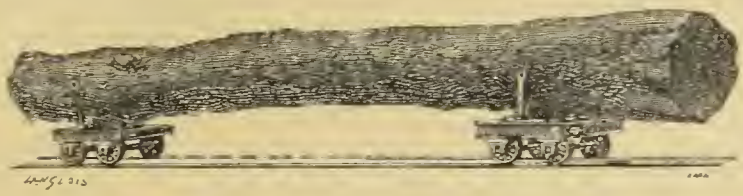
7. Разложеніе параллельныхъ силъ.

Если къ твердому тѣлу приложена одна сила, то всегда возможно замѣнить ее нѣсколькими параллельными силами, или, говоря иначе, *разложить* на нѣсколько параллельныхъ силъ.

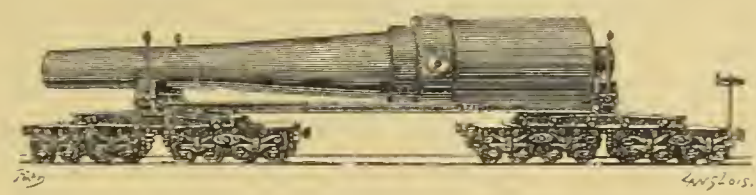
Если, напримѣръ, двое рабочихъ несутъ на плечахъ доску, то ея вѣсъ приложенный въ ея центрѣ тяжести, разлагается на двѣ параллельныхъ силы, приложенныхъ на плечи каждаго изъ носильщиковъ. При этомъ очевидно, что на долю каждаго изъ нихъ придется ровно по половинѣ вѣса всей доски, если она однородна, какъ это слѣдуется изъ правила сложенія параллельныхъ силъ (см. стр. 211 — 212). Если же одинъ изъ носильщиковъ станетъ дальше отъ центра тяжести доски (т.-е. ея середины, если доска имѣетъ во всю длину одинаковую ширину и толщину), чѣмъ его товарищъ, то на долю послѣдняго, очевидно, достанется большая часть всего груза.

Чтобы поднять втроемъ доску, центръ тяжести которой находится въ серединѣ, и чтобы на долю каждаго пришлось по равному грузу, слѣдуетъ поступить слѣдующимъ образомъ. Двое изъ рабочихъ должны взяться за концы палки, на которую слѣдуетъ положить одинъ изъ концовъ доски, третій же рабочій долженъ взять доску на руки, на разстояніи въ два раза большемъ отъ ея середины, чѣмъ взялись его товарищи. Тогда весь грузъ распредѣлится поровну на всѣхъ трехъ рабочихъ.

Рѣшать задачу о разложеніи силы на параллельныя силы приходится, напримѣръ, при перевозкѣ грузовъ. Полотно желѣзной дороги можетъ выдерживать только опредѣленную нагрузку на единицу длины пути. Если вѣсъ перевозимаго тѣла не очень великъ, какъ, напримѣръ, вѣсъ ствола дерева (черт. 34), хотя и очень большихъ размѣровъ, то достаточно положить концы его на двухъ вагонеткахъ, помѣстивъ ихъ на равныхъ разстояніяхъ отъ центра тяжести дерева. При этомъ на каждую изъ осей вагонетокъ приходится по $\frac{1}{4}$ всего вѣса дерева.



Черт. 34.

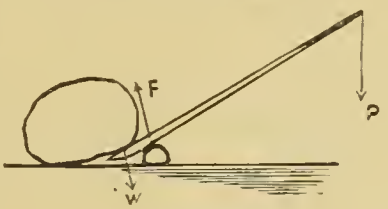


Черт. 35.

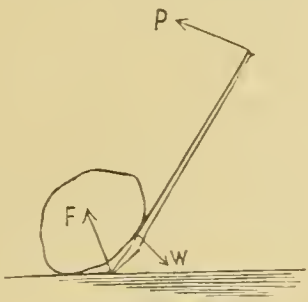
Но когда пришлось перевозить по легкому рельсовому пути пушку въ 48 тоннъ (черт. 35), то пришлось соединить по два четыре восьмиколесныхъ вагона. Благодаря этому каждый грузъ въ 24 тонны распредѣлился поровну на 8 осей.

8. Рычагъ.

Чтобы поднять или сдвинуть съ мѣста грузъ или камень, удобнѣе всего воспользоваться палкой или стержнемъ; опереть его въ точкѣ F на какую-нибудь подкладку (черт. 36), одинъ конецъ подложить подъ данный грузъ, а къ свободному концу приложить силу P. Иначе, можно было бы опереть нашъ стержень объ землю въ точкѣ F (черт. 37), а къ другому концу приложить силу P. Въ этомъ случаѣ силу P придется направить въ другую сторону, чѣмъ въ первомъ случаѣ.



Черт. 36.

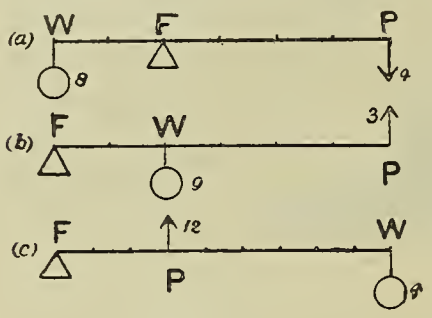


Черт. 37.

Разсматриваемый нами стержень представляетъ такъ называемый *рычагъ*.

Неподвижная точка стержня называется точкой опоры. Если точка опоры лежитъ между точками приложенія силъ, то рычагъ называется рычагомъ перваго рода или двуплечнымъ, если же точка опоры лежитъ по одну сторону отъ точекъ приложенія силъ, то рычагъ называется одноплечнымъ или рычагомъ второго рода. Двуплечный рычагъ можетъ быть равноплечнымъ или неравноплечнымъ. Рычаги также могутъ состоять изъ кривыхъ или ломанныхъ стержней, какъ, напримѣръ, показано на второмъ рисункѣ чертежа 39-го.

На чертежѣ 38-мъ представленъ рычагъ 1-го рода *(a)* и два рычага второго рода *(b)* и *(c)*. Точки F служатъ точками опоры, въ точкахъ W приложены грузы, а въ точкахъ P—силы, которыя должны уравновѣшивать эти грузы.



Черт. 38.

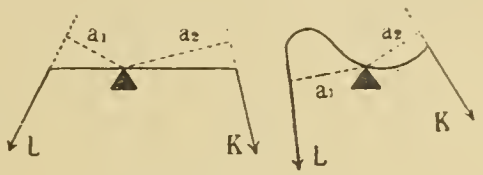
Необходимо для равновѣсія двуплечнаго рычага *(a)*, чтобы силы, приложенныя къ нему, были направлены въ одну сторону; въ противномъ случаѣ рычагъ получаетъ вращательное движеніе. Для равновѣсія одноплечнаго рычага *(b)*, *(c)* необходимо, чтобы силы были направлены въ разныя стороны, ибо въ противномъ случаѣ и этотъ рычагъ получилъ бы вращательное движеніе. Такъ какъ точка опоры неподвижна, то всякій рычагъ будетъ въ равновѣсіи, если силы, приложенныя къ нему, сложатся въ одну равнодѣйствующую, проходящую черезъ точку опоры. Такъ, напримѣръ, рычагъ, къ которому приложены силы, дѣйствующія параллельно, находится въ равновѣсіи, если разстоянія, отъ точки опоры до точекъ приложенія силъ, обратно пропорціональны силамъ, какъ это слѣдуетъ изъ условій равновѣсія параллельныхъ силъ (см. стр. 212).

Пусть, напримѣръ, сила, приложенная въ P *(a)*, измѣряется 4 фунтами, въ точкѣ W приложена сила въ 8 фунтовъ; пусть разстояніе $FP=4$ вершкамъ, а $WF=2$ вершкамъ; тогда рычагъ будетъ находиться въ равновѣсіи, ибо $4:8=2:4$. Изъ этого соотношенія можно вывести другое $4\times4=8\times2$.

Пусть сила въ P *(b)* измѣряется 3 фунтами, а въ точкѣ W приложена сила въ 9 фунтовъ; разстояніе $FP=6$ вершкамъ, разстояніе $FW=2$ вершкамъ. Въ этомъ случаѣ рычагъ будетъ въ равновѣсіи, такъ какъ соблюдается соотношеніе

$$\frac{3}{9}=\frac{2}{6},\text{ или }9\times2=6\times3.$$

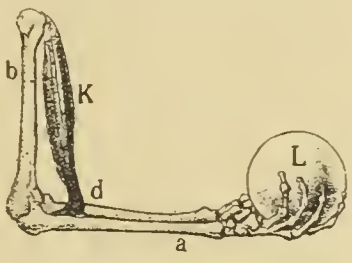
Предположимъ теперь, что силы K и L, приложенныя къ концамъ рычага (черт. 39) непараллельны. Назовемъ кратчайшее разстояніе отъ точки опоры рычага до направленія силы *плечомъ рычага*. Въ частномъ случаѣ, если силы перпендикулярны къ стержню, то плечи рычага совпадаютъ съ разстояніемъ, откладываемымъ вдоль рычага отъ точки его опоры до точки приложенія силъ. Въ другихъ случаяхъ плечомъ рычага будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки опоры на направленіе силы. Такъ, напримѣръ, на чертежѣ 39-мъ отрѣзки a_1 и a_2 представляютъ плечи нашихъ рычаговъ. Назовемъ произведеніе чиселъ, выражающихъ длину плеча и величину силы, *моментомъ силы* относительно точки опоры. Въ приведенныхъ выше двухъ примѣрахъ равновѣсія рычага (черт. 38), равенство написанныхъ произведеній и выражаетъ равенство моментовъ приложенныхъ силъ относительно точки опоры. Ясно, что силы должны измѣряться въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ. То положеніе, что для равновѣсія рычага необходимо равенство моментовъ приложенныхъ силъ, доказывается для рычаговъ всѣхъ родовъ. Такъ, наши рычаги (черт. 39) будутъ въ равновѣсіи, если



Черт. 39.

$$a_1 L = a_2 K.$$

Рычагъ имѣетъ безчисленныя приложенія. Изъ чертежа 40-го ясно слѣдуетъ, что человѣческая рука есть рычагъ второго рода, составленный изъ двухъ костей a и b, уголъ между которыми мы можемъ измѣнять по произволу. Точкой опоры служитъ плечо, а точками приложенія силъ — точка d прикрѣпленія мускула и точка кисти руки, гдѣ тяжелое тѣло соприкасается съ рукой.



Черт. 40.

Вѣсъ тѣла L, покоящагося въ рукѣ, уравновѣшивается натяженіемъ мускула K. Поэтому, чѣмъ тяжелѣе взятое тѣло, тѣмъ больше натяженіе мускула.

Тачка (см. черт. 31) представляетъ также рычагъ второго рода. Чѣмъ длиннѣе ручки тачки, тѣмъ меньшее усиліе долженъ приложить къ нимъ человѣкъ, чтобы поднять грузъ, положенный въ нее.

Ножницы и разнаго рода щипцы представляютъ примѣры примѣненія рычаговъ для того, чтобы усиліями нашихъ пальцевъ преодолѣвать значительныя сопротивленія. Взявъ клещи

съ достаточно длинными ручками, вы можете безъ труда перекусить довольно толстую проволоку или гвоздь, потому что чѣмъ больше плечо прикладываемой вами силы, тѣмъ больше ея моментъ и тѣмъ большее сопротивленіе вы можете преодолѣть. Вѣсы и такъ называемыя простыя машины представляютъ примѣры приложенія рычага.

9. Вѣсы.

Весьма важное примѣненіе рычага находимъ въ вѣсахъ. Вѣсы бываютъ различныхъ видовъ. Мы разсмотримъ обыкновенные вѣсы (равноплечіе), безмѣнъ, римскіе и десятичные вѣсы.

Черт. 41.

Обыкновенные вѣсы состоятъ изъ коромысла (черт. 41), къ концамъ котораго привѣшены чашки равнаго вѣса; середина коромысла вращается вокругъ неподвижной оси. Къ коромыслу прикрѣплена также стрѣлка, перпендикулярная къ нему. Если на чашки положить тѣла, обладающія равнымъ вѣсомъ, то ясно, что нашъ рычагъ останется въ равновѣсіи, ибо плечи его и силы, къ нему приложенныя, равны. Но если на одну чашку положить тѣло болѣе тяжелое, чѣмъ на другую, то рычагъ выйдетъ изъ горизонтальнаго положенія, на что укажетъ стрѣлка, прикрѣпленная къ нему. Чтобы объяснить это, замѣтимъ, что моментъ силы вѣса болѣе тяжелаго тѣла больше, чѣмъ моментъ силы вѣса болѣе легкаго тѣла. Основной законъ равновѣсія рычаговъ нарушится, а потому рычагъ не будетъ въ равновѣсіи.

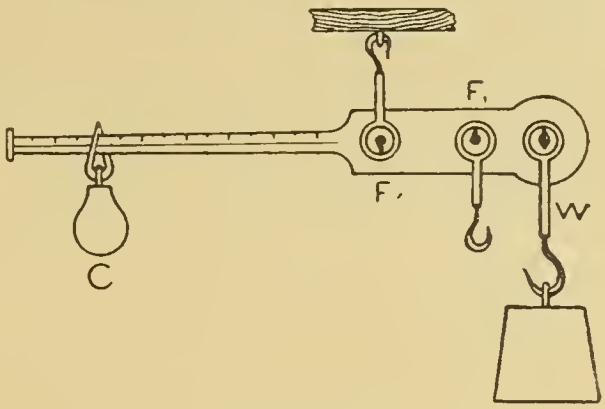
Для опредѣленія вѣса даннаго тѣла, кладемъ его на одну чашку, а на другую кладемъ разновѣски, или гири, до тѣхъ поръ, пока рычагъ не приметъ горизонтальнаго положенія. Вѣсъ разновѣсокъ равенъ вѣсу взвѣшиваемаго тѣла.

Хорошіе вѣсы должны обладать двумя свойствами: вѣрностью и чувствительностью. Вѣрность вѣсовъ состоитъ въ томъ, чтобы вѣсъ разновѣсокъ въ точности равнялся вѣсу взвѣшиваемаго тѣла; чувствительностью вѣсовъ называемъ свойство ихъ отклоняться отъ положенія равновѣсія при самой малой перегрузкѣ.

Если бы вѣсы оказались неправильными, то и въ такомъ случаѣ возможно точно опредѣлить вѣсъ взвѣшиваемаго тѣла. Для этого на одну чашку кладемъ наше тѣло, а на другую кла-

демъ песокъ или дробь до тѣхъ поръ, пока вѣсы не прійдутъ въ равновѣсіе. Затѣмъ снимаемъ съ чашки взвѣшиваемое тѣло, и уравновѣшиваемъ песокъ гирями. Вѣсъ гирь опредѣляетъ вѣсъ нашего тѣла.

Безмѣнъ представляетъ простѣйшіе вѣсы съ неравноплечнымъ рычагомъ, на одномъ концѣ котораго прикрѣпленъ тяжелый шаръ, а на другомъ концѣ подвѣшивается взвѣшиваемое тѣло. Рычагъ безмѣна продѣтъ черезъ ременную или веревочную петлю, другой конецъ которой удерживаютъ въ рукѣ. Передвигая ремень, представляющій точку опоры, достигаемъ равновѣсія рычага.

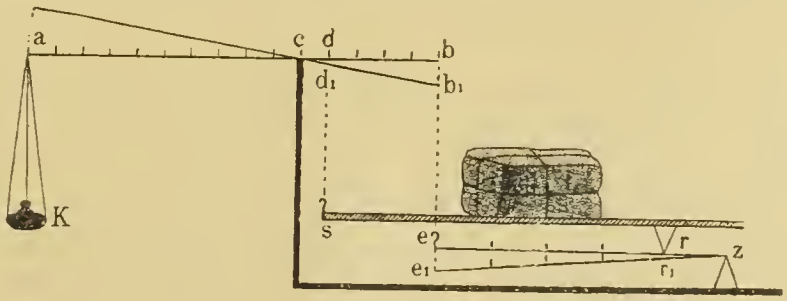


Черт. 42.

Если ремень удерживаетъ въ равновѣсіи безмѣнъ какъ разъ въ его серединѣ, то ясно, что взвѣшиваемое тѣло имѣетъ вѣсъ противовѣса безмѣна. Если плечо безмѣна съ грузомъ въ два раза больше плеча съ противовѣсомъ, то взвѣшиваемый грузъ въ два раза меньше противовѣса безмѣна. На безмѣнѣ намѣчены дѣленія, соотвѣтствующія различнымъ вѣсамъ, и благодаря этимъ дѣленіямъ легко опредѣляется вѣсъ взвѣшиваемаго груза.

Римскіе вѣсы (черт. 42) имѣютъ неподвижными точками точку опоры, F (или F_1), и точку W, привѣса взвѣшиваемаго груза; перемѣщеніемъ противовѣса C достигается равновѣсіе рычага вѣсовъ. Дѣленіе стержня, на которомъ долженъ находиться противовѣсъ C для того, чтобы рычагъ вѣсовъ находился въ равновѣсіи въ горизонтальномъ положеніи, показываетъ вѣсъ взвѣшиваемаго груза.

Десятичные вѣсы (черт. 43) состоятъ изъ соединенія трехъ рычаговъ. Первый рычагъ представляетъ стержень ab, на которомъ



Черт. 43.

отмѣтимъ четыре точки: a точку привѣса чашки для гирь K, c точку опоры, d точку привѣса платформы sr для груза и точку b, которая соединяется стержнемъ съ вилообразнымъ рычагомъ ez. Одинъ конецъ послѣдняго опирается въ неподвижной точкѣ z, а другой—во второй точкѣ z, находящейся за первой и потому не видимой на нашемъ чертежѣ. На вилообразный рычагъ ez накладывается платформа sr своей второй стороной r. При этомъ должно соблюдаться условіе $cd:cb = zr:ez$. Обыкновенно это отношеніе равно $^1/_5$. На платформу sr накладывается грузъ Q. Понятно, что на точку r будетъ дѣйствовать нѣкоторая сила q_1, а на точку s сила q_2, при чемъ $q_1+q_2=Q$, по закону разложенія параллельныхъ силъ (см. стр. 218). Дѣйствіе силы q_2 стержнемъ sd передается на рычагъ ab. Сила же q_1, дѣйствуя на точку r, заставитъ вилообразный рычагъ наклониться и притомъ такъ, какъ будто бы на точку e дѣйствовала сила $\frac{q_1}{5}$ ибо $zr:ez = 1:5$. Эта сила $\frac{q_1}{5}$ стержнемъ be передается на рычагъ ab. Итакъ, къ рычагу cb приложена сила q_2, въ точкѣ d, и сила $\frac{q_1}{5}$, въ точкѣ b. Дѣйствіе послѣдней можемъ замѣнить силой, приложенной въ точкѣ d, но равной $\frac{q_1}{5}\times 5 = q_1$. Поэтому тяжелое тѣло, лежащее на платформѣ, дѣйствуетъ на рычагъ ab съ силой $Q=q_1+q_2$, равной своему вѣсу и приложенной въ точкѣ d. Чтобы уравновѣсить послѣднюю, надо приложить въ точкѣ a силу въ десять разъ меньшую, такъ какъ плечо ac больше въ 10 разъ плеча cd. Поэтому вѣсы называются десятичными.

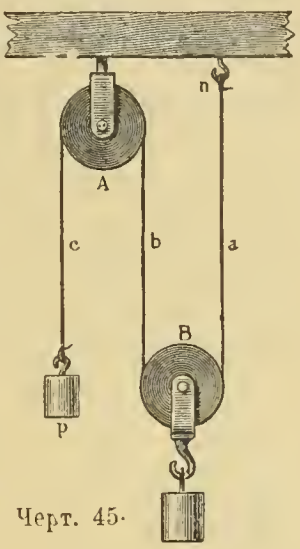
10. Простыя машины.

Блокомъ называется деревянный или желѣзный дискъ, вращающійся на оси, по окружности котораго сдѣланъ желобокъ, черезъ который перекинута веревка или цѣпь. На одномъ концѣ веревки привѣшенъ грузъ, который желаютъ поднять, къ другому концу приложена сила P (см. черт. 15 на стр. 206). Блоки бываютъ подвижные и неподвижные. Разсмотримъ неподвижный блокъ (черт. 44). Ясно, что неподвижный блокъ можемъ разсматривать какъ рычагъ перваго рода, точка опоры котораго совпадаетъ съ осью блока, а точки приложенія силъ совпадаютъ съ точками, въ которыхъ веревка сходитъ съ блока. Такъ какъ плечи этого рычага при всякомъ наклонѣ веревки равны, то сила, прилагаемая къ блоку, должна быть равна вѣсу груза, чтобы

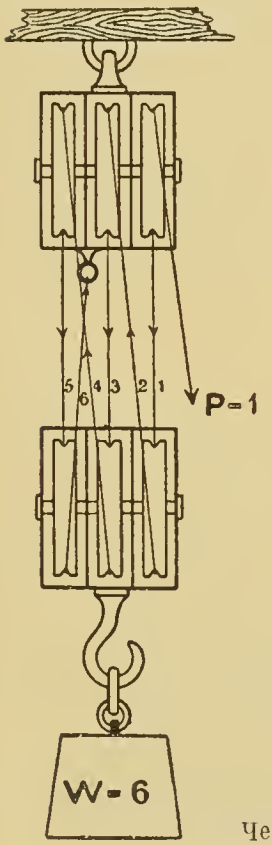
Черт. 44.

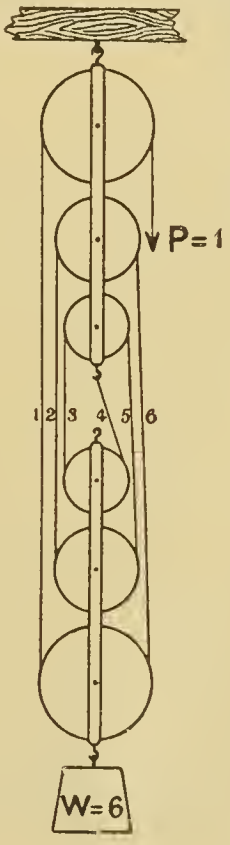
удержать его въ равновѣсіи. Итакъ, при неподвижномъ блокѣ мы ничего не выигрываемъ въ силѣ.

Разсмотримъ теперь систему блоковъ, состоящую изъ одного неподвижнаго *A* и изъ одного подвижнаго *B* (черт. 45). Въ этомъ случаѣ грузъ подвѣшивается къ подвижному блоку *B*, сила же прилагается къ концу веревки, переброшенной черезъ неподвижный блокъ *A*. Мы разсматриваемъ подвижный блокъ какъ рычагъ второго рода, который имѣетъ точку опоры въ точкѣ *n*, а точку привѣса груза на своей оси. Чтобы уравновѣсить грузъ, необходимо приложить къ свободному концу веревки *b* и направить вверхъ силу въ два раза меньшую, чѣмъ тяжесть груза. Ясно, что эту силу можно приложить къ концу веревки *c*, перекинутой черезъ неподвижный блокъ и направить ее внизъ. Итакъ, видимъ, что при этой системѣ блоковъ мы выигрываемъ въ силѣ, такъ какъ, подвѣсивъ грузъ къ подвижному блоку, уравновѣсимъ его грузомъ въ два раза меньшимъ. Если бы въ нашей системѣ было два подвижныхъ блока, то грузъ уравновѣсился бы силой, равной $^1/_4$ его вѣса, если 3 подвижныхъ блока,—

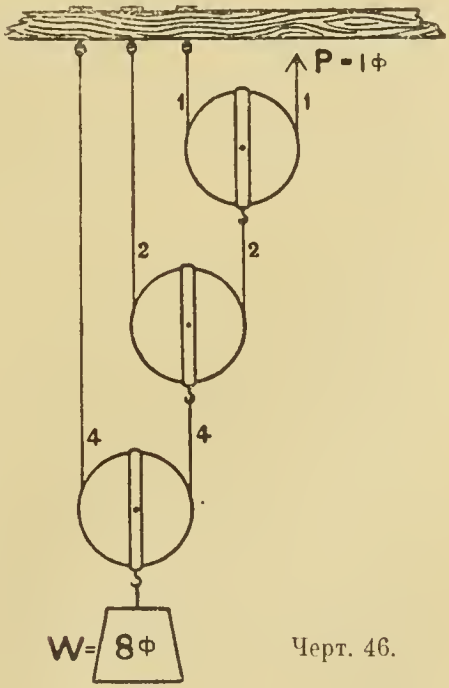


Черт. 45.



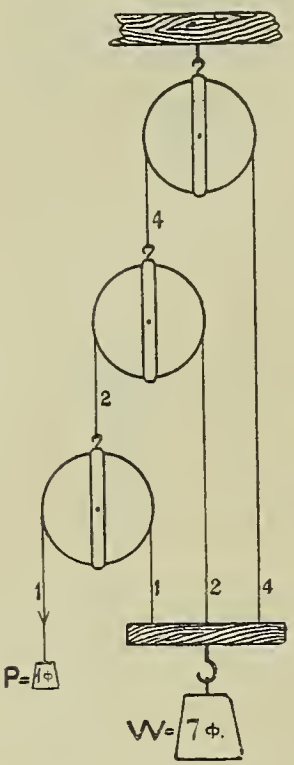


Черт. 47.



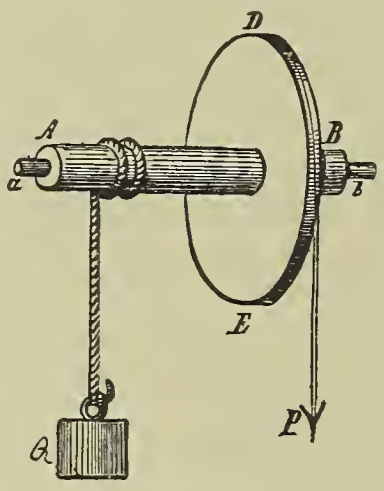
Черт. 46.

то силой, равной $^1/_8$ его вѣса и т. д. Эта система блоковъ называется *полиспастами перваго рода* (черт. 46). *Полиспастами второго рода* называютъ систему блоковъ, указанную на чертежахъ 47-мъ и 48-мъ. Эта система также даетъ возможность уравновѣсить грузъ при помощи силы, которая меньше его вѣса; но сила эта, съ увеличеніемъ числа подвижныхъ блоковъ, не уменьшается въ такой степени, какъ при полиспастахъ перваго рода.



Черт. 48.

Воротомъ (черт. 49) называется валъ AB, на который насажено колесо DE; по окружности колеса сдѣланъ желобокъ; на валъ намотана веревка или цѣпь, къ которой привѣшивается грузъ Q. При вращеніи ворота вокругъ оси ab веревка наматывается на валъ, поднимая или опуская грузъ Q. Найдемъ силу P, которую нужно приложить къ веревкѣ, прикрѣпленной къ колесу, которая бы уравновѣшивала нашъ грузъ. Ясно, что воротъ можемъ разсматривать какъ рычагъ, въ которомъ плечо силы тяжести груза Q равно радіусу r вала, а плечо силы P равно радіусу колеса R. По закону равновѣсія рычага (см. стр. 219) необходимо, чтобы



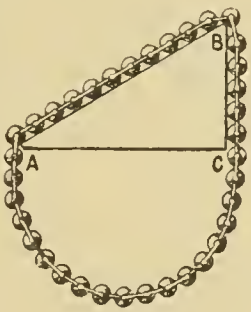
Черт. 49.

$$rQ = PR, \text{ или } \frac{P}{Q} = \frac{r}{R},$$

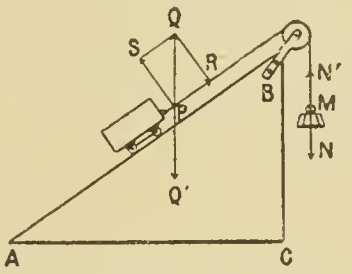
т.-е. сила, приложенная къ колесу во столько разъ меньше вѣса груза, во сколько разъ радіусъ вала меньше радіуса круга.

Наклонною называется плоскость, образующая уголъ съ горизонтальной плоскостью. На чертежахъ 50-мъ и 51-мъ прямыя линіи AB изображаютъ наклонныя плоскости. Наклонную плоскость употребляютъ для поднятія грузовъ, при этомъ оказывается, что *сила, которую необходимо приложить къ грузу, чтобы удержать его на наклонной плоскости, меньше вѣса этого груза*. Стевинъ (ученый голландецъ, жившій отъ 1548 до 1620 года) придумалъ для доказательства этого свойства наклонной плоскости слѣдующій опытъ. На деревянный прямо-

угольный треугольникъ ABC (черт. 50), сторона котораго AC горизонтальна, надѣвается замкнутая цѣпь изъ одинаковыхъ шариковъ, соединенныхъ такимъ образомъ, что они могутъ свободно катиться по наклонной плоскости AB. Однако оказывается, что цѣпь остается въ равновѣсіи безъ движенія. Такъ какъ очевидно, что шарики, расположенные симметрично ниже прямой AC, взаимно уравновѣшиваются, то, слѣдовательно, вѣсъ шариковъ вдоль *высоты наклонной плоскости* BC уравновѣшивается вѣсомъ шариковъ, расположенныхъ вдоль *длины наклонной плоскости* AB. Но такъ какъ послѣдніе шарики вѣсятъ больше, потому что число ихъ больше, то поэтому очевидно, что часть ихъ вѣса уничтожается сопротивленіемъ наклонной плоскости. Для равновѣсія тѣла на наклонной плоскости существуетъ такой законъ: *сила, удерживающая тѣло на наклонной плоскости и дѣйствующая параллельно наклонной плоскости вверхъ, такъ относится къ вѣсу тѣла, какъ высота плоскости къ длинѣ ея.* Итакъ, если наклонная плоскость имѣетъ въ длину 10 футовъ, а высота ея 1 футъ, то сила, въ 10 разъ меньшая сравнительно съ вѣсомъ тѣла, можетъ удержать его на наклонной плоскости. Ясно, что сила бо̀льшая заставитъ тѣло двигаться по наклонной плоскости вверхъ. Но при этомъ мы не принимаемъ въ расчетъ силы тренія. Для вывода указаннаго выше закона равновѣсія тяжелаго тѣла, на наклонной плоскости, предположимъ, что на наклонной плоскости AB (черт. 51) находится тяжелый вагонъ, который удерживается въ равновѣсіи гирей M, привѣшенной къ веревкѣ, прикрѣпленной къ вагону и перекинутой черезъ блокъ въ точкѣ B.



Черт. 50.



Черт. 51.

Если обозначимъ черезъ отрѣзокъ MN вѣсъ гири M, то равная и прямопротивоположная ей сила MN' представляетъ ту силу, съ которой дѣйствуетъ вагонъ на веревку. Уравновѣшивающая ее сила MN передается по веревкѣ и прикладывается въ видѣ силы R въ точкѣ P, въ которой мы предполагаемъ сосредоточеннымъ вѣсъ вагона Q'. Для равновѣсія необходимо, чтобы эта сила Q' уравновѣшивалась равной и прямо-противоположно направленной силой Q. Разлагая послѣднюю на двѣ силы, одну направленную вдоль веревки, а другую перпендикулярно къ ней, заключаемъ, что для равновѣсія вагона необходимо, чтобы составляющая силы Q, направленная по веревкѣ,

равнялась именно силѣ R. Вторая же составляющая S силы Q представляетъ дѣйствіе наклонной плоскости или такъ называемую ея реакцію, которая и уравновѣшиваетъ часть вѣса вагона.

Чтобы вычислить величину силы R, замѣтимъ, что $\triangle ABC$ подобенъ $\triangle PQR$ (см. стр. 80), такъ какъ углы при R и при C прямые, а уголъ при P равенъ углу при B. Поэтому изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ указанный выше результатъ, что

$$\frac{R}{Q}=\frac{BC}{AB}.$$

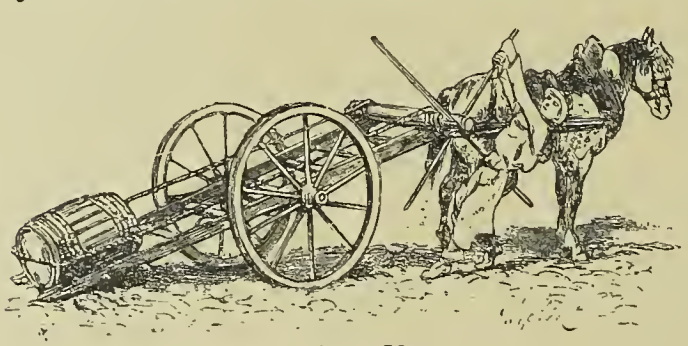
До сихъ поръ мы предполагали, что сила, удерживающая тяжелое тѣло на наклонной плоскости, направлена параллельно наклонной плоскости.

Но мы могли бы удерживать нашъ вагонъ на наклонной плоскости, приложивъ въ точкѣ P горизонтально направленную силу F. Разсуждая, какъ выше, читатель безъ труда докажетъ, что эта горизонтально направленная сила F опредѣляется условіемъ

$$\frac{F}{Q}=\frac{BC}{AC},$$

т.-е. *сила F такъ относится къ силѣ Q, какъ высота наклонной плоскости относится къ ея основанію.*

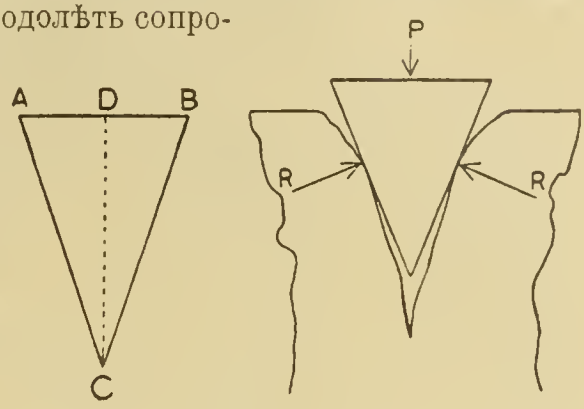
Наклонная плоскость примѣняется очень часто. На чертежѣ 52-мъ представлена двухколесная подвода для перевозки грузовъ, которая при остановкѣ обращается въ наклонную плоскость. Возчикъ, при помощи ворота, втягиваетъ на подводу грузъ. Когда грузъ поднятъ до уровня оси колесъ, наклонная плоскость ставится въ горизонтальное положеніе, и повозка можетъ отправляться въ путь.



Черт. 52.

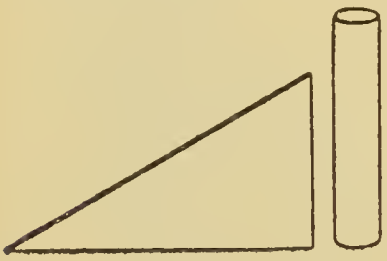
Клиномъ называется призма (см. стр. 96), по большей части треугольная, которая представлена въ разрѣзѣ на чертежѣ 53-емъ; сторону AB назовемъ головою клина или шириною его, стороны BC и AC боками, а DC высотой клина. Клинъ дѣйствуетъ по слѣдующему закону: для равновѣсія клина необходимо, чтобы сила P, приложенная къ клину, была въ такомъ

отношеніи къ силѣ сопротивленія, оказываемой тѣломъ, какъ ширина клина къ его длинѣ. Ясно, чѣмъ острѣе клинъ, тѣмъ съ меньшей силой можно преодолѣть сопротивленіе твердаго тѣла.

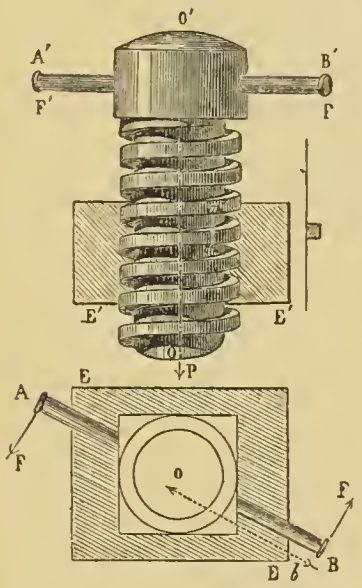


Черт. 53.

Винтъ. Винтовою называется линія, которая получается на прямомъ цилиндрѣ, если его обернуть прямоугольнымъ треугольникомъ, представляющимъ наклонную плоскость, какъ показано на черт. 54-мъ. Сдѣлавъ углубленіе въ цилиндрѣ вдоль винтовой линіи, мы получаемъ винтовую нарѣзку или *винтъ* (черт. 55) движеніе котораго направляется *гайкой*, гдѣ углубленія соотвѣтствуютъ выступамъ винтовой нарѣзки. Прикладывая силу F къ стержню, продѣтому чрезъ головку винта, мы можемъ удерживать грузъ P, дѣйствующій вдоль оси винта. Для этого силы F и P должны удовлетворять опредѣленному условію. Чтобы дать это условіе равновѣсія, необходимо установить понятіе о высотѣ *винтового шага*. Высотой шага винта называется разстояніе AB (черт. 54) между послѣдовательными точками винтовой линіи, лежащими на одной и той же прямолинейной образующей цилиндра (см. стр. 98).



Черт. 54.



Черт. 55.

Если мы предположимъ, что сила F приложена непосредственно у цилиндрической поверхности винта, то *отношеніе F къ силѣ P равняется отношенію высоты винтового шага къ длинѣ окружности цилиндрической поверхности винта.* Такимъ образомъ, чѣмъ меньше высота шага винта и чѣмъ больше его радіусъ, тѣмъ меньшую силу нужно приложить къ головкѣ винта, чтобы удержать данный грузъ въ равновѣсіи.

11. Зависимость между силами и движеніями. Масса. Инерція.

Каждое тѣло мы разсматриваемъ какъ совокупность матеріальныхъ точекъ, подъ которыми мы разумѣемъ геометрическія точки, обладающія свойствами матеріальныхъ тѣлъ. Такъ, напримѣръ, матеріальныя точки на поверхности земли обладаютъ вѣсомъ.

При изученіи движенія тяжелой точки, мы пользуемся тѣломъ малыхъ размѣровъ, разсматривая въ сущности только движеніе его центра тяжести и не обращая вниманія на тѣ движенія нашего тѣла, которыя оно можетъ совершать вокругъ своего центра тяжести.

Съ давнихъ поръ человѣчество занималось изученіемъ вопроса, какое движеніе будетъ совершать матеріальная точка подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ. Простѣйшій случай представляется, когда силы, приложенныя къ точкѣ, взаимно уравновѣшиваются, или, какъ говорятъ, на точку не дѣйствуютъ силы. Древніе греки учили, что въ такомъ случаѣ точка должна совершать «благороднѣйшее изъ всѣхъ движеній», которымъ они считали круговое движеніе.

Вопросъ объ изученіи движенія точки подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ былъ поставленъ на научную почву знаменитымъ Галилеемъ.

Онъ доказалъ, что различныя скорости, съ которыми падаютъ различныя тяжелыя тѣла, зависятъ отъ сопротивленія воздуха. Поэтому, если заставлять, напримѣръ, пухъ, вату и свинцовый шарикъ падать въ безвоздушномъ пространствѣ [1]), то всѣ эти тѣла падаютъ съ одинаковой скоростью. Что различныя скорости паденія тяжелыхъ тѣлъ зависятъ отъ сопротивленія воздуха, въ этомъ можно убѣдиться очень просто слѣдующимъ образомъ. Заставляя падать съ одинаковой высоты мѣдный пятачокъ и бумажный кружокъ, который немного меньше размѣра пятачка, увидимъ, что монета упадетъ раньше на землю. Но если на пятачокъ наложить сверху бумажку, а затѣмъ пустить ихъ вмѣстѣ падать, то оба предмета упадутъ одновременно, такъ какъ монета предохраняетъ бумажку отъ сопротивленія воздуха.

Галилей, доказавшій, что различныя тяжелыя тѣла пріобрѣтаютъ равныя скорости при паденіи подъ вліяніемъ силы тя-

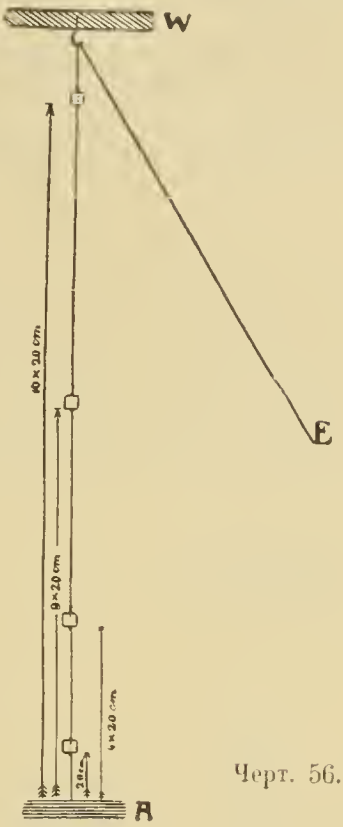
---

1) Чтобы выполнить этотъ опытъ, помѣщаютъ всѣ разсматриваемыя тѣла въ трубку, изъ которой выкачивается воздухъ, при помощи такъ называемаго воздушнаго насоса.

Галилей.

жести, показалъ также, что паденіе тяжелыхъ тѣлъ совершается по закону *равномѣрно перемѣннаго движенія (см. стр. 198), при чемъ разстоянія, которыя проходитъ тѣло въ равные промежутки времени, увеличиваются пропорціонально послѣдовательнымъ нечетнымъ числамъ 1, 3, 5, 7, 9 и т. д.*

Дать приблизительную провѣрку этому закону возможно слѣдующимъ образомъ. Въ лѣстничномъ пролетѣ двухъэтажнаго дома или въ высокой комнатѣ около 7 съ лишнимъ аршинъ высоты къ потолку W (черт. 56) ввинчиваютъ крючекъ, черезъ который перекидываютъ веревку, достигающую до полу; другой конецъ E удерживаютъ въ рукѣ. На разстояніяхъ отъ полу въ 20 сантиметровъ (т.-е. $4^1/_2$ вершка), въ 4×20 сантиметровъ (т.-е. въ 1 аршинъ 2 вершка), въ 9×20 сантиметровъ (т.-е. 2 арш. $8^1/_2$ верш.), 16×20 сантиметровъ, т.-е. (4 ар. 8 верш.) и, наконецъ, въ 25×20 сантиметровъ (7 ар. $^1/_2$ верш.), прикрѣпляютъ къ веревкѣ гири вѣсомъ около $\frac{1}{2}$ фунта каждую. Разстоянія между этими грузами выражаются, стало-быть, соотвѣтственно слѣдующими числами (разстояніе перваго груза считается отъ полу)



Черт. 56.

$$1 \times 20, \quad 3 \times 20, \quad 5 \times 20, \quad 7 \times 20, \quad 9 \times 20.$$

Не всегда можно воспользоваться столь высокой комнатой или лѣстничнымъ пролетомъ, если домъ одноэтажный. Тогда описываемый опытъ можно произвести на открытомъ воздухѣ, ввинтивъ крючекъ въ перекладину высокой переносной лѣстницы, приставленной къ крышѣ дома или къ высокому дереву.

Если мы выпустимъ конецъ веревки E изъ руки, то веревка будетъ скользить черезъ крючекъ, а гири падать на полъ. Прислушиваясь къ звукамъ паденія, легко замѣтить, что удары отъ паденія гирь будутъ повторяться черезъ равные промежутки времени. Чтобы лучше слышать удары отъ паденія гирь и вмѣстѣ съ тѣмъ не повредить пола и гирь, подъ ними въ A помѣщаютъ толстый коверъ и покрываютъ его кускомъ картона.

Для провѣрки указаннаго закона паденія можно продѣлать новый опытъ: на веревкѣ (черт. 57) подвѣшиваютъ прежнія гири на разстояніяхъ въ 90 сантиметровъ (т.-е. въ 1 арш. $4^1/_4$ верш.)

между ними. Тогда при паденіи грузовъ явственно слышно, что звуки удара раздаются все быстрѣе и быстрѣе одинъ послѣ другого.

Изъ предыдущихъ данныхъ видно, что *пространства, которыя проходятъ грузы въ промежутки времени въ 1, въ 2, въ 3 и т. д. единицъ времени, выражаются числами*

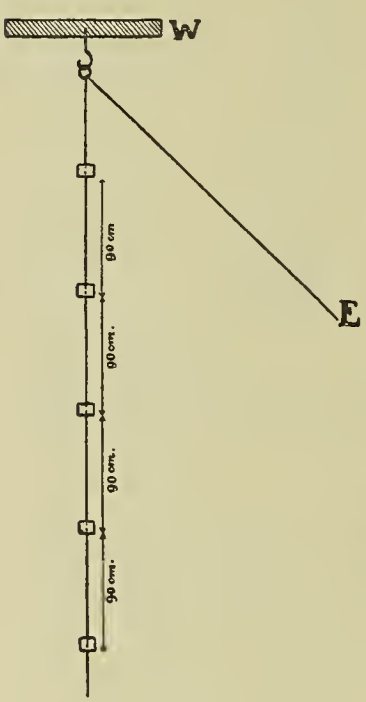
$$1 \times 20, \quad 4 \times 20, \quad 9 \times 20, \quad 16 \times 20, \quad 25 \times 20, \quad \ldots$$

т.-е. *пропорціональны квадратамъ чиселъ,*

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots$$

выражающихъ продолжительность промежутковъ времени.

Такъ какъ паденіе тяжелыхъ тѣлъ представляетъ равномѣрно перемѣнное движеніе, и скорости различныхъ тѣлъ одинаковы, то отсюда слѣдуетъ, что и *ускоренія различныхъ тяжелыхъ тѣлъ* имѣютъ одну и ту же *постоянную величину*. Эта постоянная величина называется *ускореніемъ силы тяжести*.



Черт. 57.

Наблюденія показываютъ, что ускореніе силы тяжести представляетъ постоянную величину только въ данномъ мѣстѣ на поверхности земли и только на опредѣленномъ отъ нея разстояніи. Чѣмъ выше станемъ подниматься отъ поверхности земли, тѣмъ меньше оказывается ускореніе силы тяжести. Это ускореніе увеличивается также съ приближеніемъ къ земнымъ полюсамъ и имѣетъ наименьшую величину на земномъ экваторѣ. Такое измѣненіе испытываетъ не только ускореніе силы тяжести, но также и вѣсъ тяжелыхъ тѣлъ. Тѣло вѣсомъ въ 1 килограммъ (т.-е. около $2^1/_2$ фунтовъ) теряетъ 0,001 грамма (т.-е. около $\frac{1}{4000}$ золотника) при подъемѣ вверхъ на 3 метра (т.-е. около $1^1/_2$ сажени). Конечно, измѣненія вѣса тѣла на такихъ небольшихъ подъемахъ весьма ничтожны и могутъ быть обнаружены только при помощи весьма точныхъ приборовъ и при очень тщательныхъ взвѣшиваніяхъ. Грузъ, который вѣситъ на полюсѣ одну тонну, т.-е. 1.000 килограммовъ (около 61,05 пуда), на тѣхъ же вѣсахъ на экваторѣ вѣситъ 995 килограммовъ, т.-е. уменьшается на 5 килограммовъ (т.-е. около $12^1/_4$ фунтовъ).

Однако оказывается, что *при всѣхъ измѣненіяхъ вѣса тѣла и ускоренія силы тяжести отношеніе ихъ остается всегда постоянной величиной.* Поэтому, если обозначимъ вѣсъ тѣла черезъ P, а ускореніе силы тяжести черезъ g, то отношеніе $\frac{P}{g}$ представляетъ постоянную величину. Называя ее черезъ m, получаемъ, что

$$\frac{P}{g} = m, \qquad \text{или} \quad P = mg.$$

Это постоянное число m называется *массой* нашего тѣла вѣса P въ томъ мѣстѣ земли, гдѣ ускореніе силы тяжести равно g.

Поэтому единицей массы будетъ служить масса тяжелаго тѣла, вѣсъ котораго равенъ g единицамъ вѣса. Вмѣсто послѣдняго опредѣленія единицы массы, принимаютъ также за единицу измѣренія массъ опредѣленное тѣло, массу котораго назовемъ черезъ m, а вѣсъ черезъ P, такъ что $P = mg$. Чтобы выразить черезъ m массу m_1 второго тѣла, вѣсъ котораго предположимъ равнымъ P_1, замѣчаемъ, что $P_1 = m_1 g$. Изъ обоихъ послѣднихъ равенствъ получаемъ выраженіе массы m_1 черезъ массу m слѣдующимъ образомъ

$$\frac{P_1}{P} = \frac{m_1}{m}, \quad \text{или} \quad m_1 = \frac{P_1}{P}\, m.$$

За единицу массы m обыкновенно принимаютъ одинъ кубическій дециметръ воды, при температурѣ 4° по градуснику Цельсіуса.

Изъ равенства $P = mg$ слѣдуетъ, что вѣсъ тѣла пропорціоналенъ его массѣ. Но, съ другой стороны, на основаніи того же равенства, мы получаемъ возможность измѣрять силу тяжести P, сообщающую точкѣ съ массою m ускореніе g, въ новыхъ единицахъ измѣренія, представляющихъ произведеніе единицъ массы на единицы ускореній.

Это опредѣленіе силы, какъ произведеніе массы на ускореніе, мы распространяемъ на какія угодно силы, сообщающія точкѣ съ массою m опредѣленное ускореніе, при чемъ принимаемъ, что направленіе силы совпадаетъ съ направленіемъ сообщаемаго ею ускоренія.

Это распространеніе сдѣлано было великимъ ученымъ Исаакомъ Ньютономъ (родился въ 1643 году въ небольшой деревнѣ въ восточной Англіи, умеръ въ 1727 году въ Лондонѣ, пользуясь всемірной извѣстностью и славой; портретъ его находится при стр. 152). Ньютонъ явился непосредственнымъ продолжателемъ изслѣдованій Галилея. Ньютонъ предположилъ, что движеніе небесныхъ свѣтилъ должно объясняться взаимнымъ ихъ притяженіемъ, подобно притяженію землею всѣхъ падающихъ на

ея поверхность тяжелыхъ тѣлъ. Исходя изъ законовъ, открытыхъ Кеплеромъ [1]), Ньютонъ пришелъ къ заключенію, что силы притяженія между небесными тѣлами пропорціональны ихъ массамъ и обратно пропорціональны квадратамъ ихъ разстояній. Пользуясь этимъ *закономъ всемірнаго тяготѣнія* Ньютона и исходя изъ измѣренія силы, въ видѣ произведенія массы на сообщаемое силою ускореніе, ученые пришли къ замѣчательнымъ открытіямъ новыхъ планетъ и подтвердили, такимъ образомъ, справедливость исходныхъ положеній.

Изъ указанной зависимости, что движущая сила равна произведенію массы точки на ея ускореніе, выводятся непосредственно слѣдующія важныя заключенія.

Если сила равна нулю, т.-е. наша точка не находится подъ дѣйствіемъ силы, или, лучше сказать, приложенныя къ ней силы взаимно уравновѣшиваются, то очевидно, что и ускореніе точки должно равняться нулю. Но это возможно только, если точка неподвижна или если она движется равномѣрно прямолинейно. Отсюда получаемъ слѣдующій законъ Ньютона, который называется *закономъ инерціи: если на точку не дѣйствуютъ силы, то она находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно.*

Само собою разумѣется, что этотъ законъ имѣетъ совершенно условное значеніе, и провѣрить его на опытѣ мы не имѣемъ никакой возможности. По этому поводу интересно привести слѣдующія слова выдающагося современнаго ученаго, члена Академіи Наукъ въ Парижѣ, Пуанкаре: «Удавалось ли кому-либо дѣлать опыты надъ тѣлами, не находящимися подъ дѣйствіемъ силъ, и если бы даже были возможны такіе случаи, то кто можетъ утверждать и какъ докажетъ онъ фактъ дѣйствительнаго отсутствія силъ? Разсмотримъ, напримѣръ, движеніе шарика по гладкой поверхности. Мы не имѣемъ права утверждать, что на шарикъ не дѣйствуютъ силы. Въ самомъ дѣлѣ, этотъ шарикъ не находится сравнительно на болѣе далекомъ разстояніи отъ земли, чѣмъ въ случаѣ свободнаго его движенія въ пространствѣ. Однако въ послѣднемъ случаѣ разсматриваемый шарикъ находится подъ вліяніемъ силы тяжести, обязанной своимъ происхожденіемъ притяженію земли».

Переходимъ, къ другимъ выводамъ, которые можно получить изъ нашей основной зависимости между силой, массой и ускореніемъ.

---

[1]) См. астрономія стр. 228.

Если точка данной массы движется въ пространствѣ подъ дѣйствіемъ силы, то чѣмъ больше ея ускореніе, тѣмъ больше, значитъ, приложенная къ этой точкѣ сила, и наоборотъ.

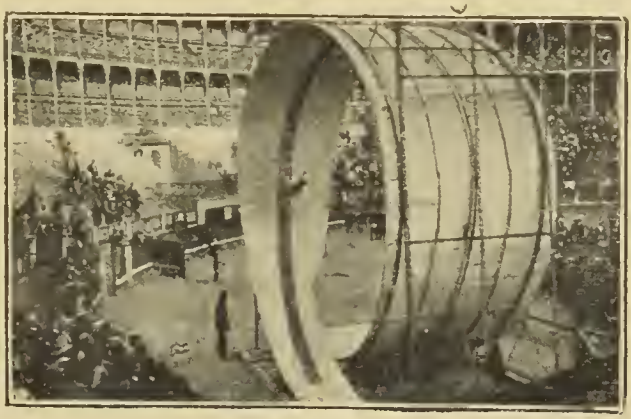
Но если мы будемъ прикладывать равныя по величинѣ силы къ точкамъ съ различными массами, то точка съ большей массой будетъ пріобрѣтать, подъ дѣйствіемъ данной силы, меньшее ускореніе.

Поэтому, чтобы сообщить одинаковыя ускоренія точкамъ съ различными массами, необходимо приложить большую силу къ той точкѣ, масса которой больше.

Такъ, напримѣръ, два рабочихъ въ состояніи передвигать по рельсамъ товарный вагонъ, но чтобы двигать нѣсколько вагоновъ, масса которыхъ, очевидно, больше массы одного вагона, потребуется усилій большаго числа рабочихъ.

Опыты и постоянныя наблюденія показываютъ, что тѣло, пришедшее въ движеніе, продолжаетъ двигаться, хотя бы сила, сообщившая это движеніе, и прекратила свое дѣйствіе на тѣло. Но подъ вліяніемъ различныхъ силъ, какъ сопротивленіе воздуха или треніе, движеніе тѣла замедляется и, наконецъ, тѣло останавливается. Описанныя свойства тѣлъ называются ихъ *инертностью*, или *косностью*. Когда тѣло, обладая въ данный моментъ опредѣленной скоростью или ускореніемъ, продолжаетъ затѣмъ двигаться, хотя бы силы на него и не дѣйствовали, мы говоримъ, что оно *движется по инерціи*. Эти движенія намъ хорошо знакомы. Если вы соскакиваете съ движущагося вагона или экипажа, находясь въ которомъ вы пріобрѣтаете его скорость, вы хорошо ощущаете, какъ пріобрѣтенная вами скорость заставляетъ васъ пробѣжать нѣсколько шаговъ по землѣ, и вы можете упасть, если не примете мѣръ предосторожности.

Цѣлый рядъ явленій можетъ быть объясненъ свойствомъ инертности тѣлъ. Велосипедистъ на поворотѣ дороги долженъ наклоняться съ велосипедомъ внутрь поворота, такъ какъ по инерціи онъ стремится продолжать двигаться прямолинейно. Чтобы воспротивиться этому движенію, велосипедистъ долженъ наклоняться внутрь поворота.



Черт. 58.

На чертежѣ 58-омъ изображенъ велосипе-

дистъ, который описываетъ полный оборотъ внутри вертикально стоящаго кругового пути. Онъ опишетъ этотъ головоломный путь только при условіи, что, разбѣжавшись по наклонной плоскости, онъ пріобрѣтетъ достаточную скорость, которая позволитъ ему пробѣжать по инерціи верхнюю часть пути головою внизъ, удержавшись отъ паденія.

При движеніи по окружности сила, которая удерживаетъ точку на окружности, называется *центростремительной*.

Разсматривая взаимодѣйствіе между тѣлами природы, Ньютонъ ввелъ еще одинъ законъ *равенства дѣйствія противодѣйствію*, по которому *силы взаимодѣйствія двухъ точекъ равны по величинѣ, но направлены прямо-противоположно другъ другу*. Поэтому, при движеніи точки по окружности, если, напримѣръ, центростремительная сила представляетъ натяженіе нити, удерживающее нашу точку, то послѣдняя развиваетъ равную и прямо противоположную ей силу, называемую *центробѣжной*. Послѣдняя сила стремится разорвать нить, но существуетъ только до тѣхъ поръ, пока существуетъ центростремительная сила. Стоитъ, напримѣръ, нити разорваться, и въ тотъ же моментъ перестаетъ существовать центробѣжная сила. Точка, сорвавшись съ нити, направится по касательной къ окружности, благодаря свойству инерціи.

Велосипедистъ, описывающій свой головоломный вертикальный круговой путь (рис. 58), не только удерживается на немъ, но еще и оказываетъ на него давленіе, которое равняется разности *центробѣжной силы* и *составляющей вѣса* велосипедиста, направленной по радіусу.

Центробѣжная сила измѣряется произведеніемъ массы точки на разстоянія ея отъ оси вращенія и на квадратъ угловой скорости вращенія (см. стр. 202). Вліяніе центробѣжной силы обнаруживается очень часто. Напримѣръ, если вращать тяжелый шарикъ, прикрѣпленный къ концу растяжимой нити, то эта нить вытягивается подъ вліяніемъ центробѣжной силы. Во всѣхъ быстро вращающихся частяхъ машины центробѣжная сила имѣетъ большое значеніе и можетъ привести къ полному разрушенію механизма, если онъ недостаточно прочно построенъ.

Наблюдаемое на землѣ измѣненіе ускоренія силы тяжести, въ зависимости отъ разстоянія мѣста отъ полюса, есть непосредственное вліяніе центробѣжной силы. Въ самомъ дѣлѣ, наблюдаемый вѣсъ каждаго тѣла представляетъ равнодѣйствующую притяженія земли и центробѣжной силы, про которую мы раньше не упоминали, но которая развивается вслѣдствіе суточнаго вращенія земли. Притяженіе земли направлено отъ точки къ центру земли, центробѣжная же сила направлена отъ оси враще-

нія. На полюсѣ центробѣжная сила равна нулю, а на экваторѣ имѣетъ наибольшую величину, такъ какъ разстояніе точки отъ оси вращенія здѣсь наибольшее. Поэтому вѣсъ тяжелаго тѣла на полюсѣ земли представляется одной силой притяженія нашего тѣла землей, а на экваторѣ это притяженіе уменьшается, вслѣдствіе существованія центробѣжной силы.

Центробѣжная сила, проявляющаяся при круговомъ движеніи, представляетъ только частный случай такъ называемой *силы инерціи*, источникомъ которой является каждая движущаяся точка. Сила инерціи равна произведенію массы (см. стр. 233) точки на ея ускореніе, но направлена въ сторону ему прямо противоположную; точка же приложенія силы инерціи лежитъ не въ нашей движущейся точкѣ, а въ той точкѣ, которая воспринимаетъ на себя воздѣйствіе нашей движущейся точки.

12. Работа. Энергія. Мощность.

Если мы подняли нѣкоторый грузъ,—скажемъ, въ 5 килограммовъ, съ пола на столъ, положимъ на высоту 1 метра, то мы преодолѣвали при этомъ силу тяжести. При этомъ не измѣняется ни величина этой силы, ни ея направленіе, а только перемѣщается *точка ея приложенія* въ направленіи противоположномъ направленію этой силы: сила тяжести дѣйствовала внизъ, а мы точку приложенія ея перемѣстили вверхъ.

Всегда, когда мы преодолѣваемъ какую-нибудь силу, мы говоримъ, что совершаемъ работу. Чернорабочій, выбрасывающій вверхъ землю изъ канавы и преодолѣвающій силу тяжести, часовщикъ, заводящій пружину часовъ и преодолѣвающій силу упругости, разносчикъ, везущій телѣжку съ товаромъ и преодолѣвающій силу тренія, бурлакъ, тянущій барку противъ теченія и преодолѣвающій силу сопротивленія движущейся воды,—всѣ они совершаютъ работу.

Какъ же сравнивать между собою совершонныя въ различныхъ случаяхъ работы? Поднять гирю съ пола на столъ въ 10 килограммовъ труднѣе, чѣмъ гирю въ 5 килограммовъ, но поднять гирю въ 10 килограммовъ съ пола на стулъ, поставленный на столъ, еще труднѣе, чѣмъ поднять ее съ пола на столъ. Поэтому условились считать за единицу работы ту работу, которая совершается, когда единица силы преодолѣвается на протяженіи единицы длины, напримѣръ, сила въ 1 пудъ на протяженіи 1 фута или сила въ 1 килограммъ на протяженіи 1 метра. Названіе такихъ единицъ работы составляется изъ названія единицы силы и изъ названія единицы длины: *пудо-футъ, килограммометръ*. Величина всякой другой

работы считается во столько разъ больше этой единицы работы, во сколько разъ сила больше единицы силы и во сколько разъ перемѣщеніе точки приложенія силы больше единицы длины. Такъ, работа каменьщика, внесшаго 15 килограммовъ кирпичей на пятый этажъ, на высоту 12 метровъ, равна $15 \times 12 = 180$ килограммометровъ, а работа бурлака, нажимающаго на лямку съ силою 2 пудовъ и прошедшаго 100 саженъ, т.-е. 700 футовъ, равна $2 \times 700 = 1.400$ пудо-футамъ.

Работать, однако, можетъ не только человѣкъ, но и всякій предметъ, могущій проявить силу. Такъ, могутъ работать и лошади своею мускульною силою, перевозя тяжести, и движущаяся вода, увлекающая колеса водяныхъ мельницъ, и вѣтеръ, въ вѣтряныхъ мельницахъ, и паръ силою своей упругости—въ паровой машинѣ, и т. д.

Всѣ источники работы можно разбить на два разряда. Одни могутъ совершать работу непрерывно въ теченіе болѣе или менѣе долгихъ промежутковъ времени, какъ, напримѣръ, водяная или вѣтряная мельница, паровая машина, человѣкъ, лошадь и т. д. Такіе источники работы называютъ общимъ именемъ машинъ, и въ этомъ смыслѣ человѣкъ, лошадь, волъ представляютъ собою «живыя машины».

Другіе источники работы могутъ только совершить нѣкоторую опредѣленную работу, послѣ чего ихъ способность къ работѣ оказывается изсякшею. Гиря стѣнныхъ часовъ, опускаясь внизъ, преодолѣваетъ силу тренія въ механизмѣ часовъ и совершаетъ, слѣдовательно, работу, но ея способность къ работѣ изсякаетъ, когда она опустится на полъ. Пружина карманныхъ часовъ точно такъ же совершаетъ работу до тѣхъ поръ, пока не развернется совсѣмъ и не станетъ неспособною къ дальнѣйшей работѣ.

Подобные источники работы, обладающіе какъ бы запасомъ работы, легко сравнивать между собою, оцѣнивая ихъ соотвѣтственно всей той работѣ, которую они могутъ совершить. Мы называемъ этотъ запасъ работы *работоспособностью*, или *энергіею* тѣла. Гиря въ $^1/_4$ пуда, находящаяся на высотѣ 8 футовъ отъ пола, обладаетъ энергіей въ $^1/_4 \times 8 = 2$ пудо-фута. Запасъ воды въ запрудѣ, который можетъ заставить мельничное колесо, имѣющее 4 метра въ окружности, совершить 2.000 оборотовъ, дѣйствуя на него съ силою въ 60 килограммовъ, обладаетъ энергіею въ $8.000 \times 60 = 480.000$ килограммометровъ, и эта энергія оказывается изсякшею, когда вода окажется внизу.

Но оцѣнивать источникъ работы по всей той работѣ, которую онъ можетъ совершить, по его энергіи, нельзя, если этотъ источникъ принадлежитъ къ разряду машинъ. Нельзя

даже спросить себя, напримѣръ, «сколько эта вѣтряная мельница можетъ совершить работы?» Вѣтряная мельница только превращаетъ энергію вѣтра въ удобную для человѣка форму: она задерживаетъ нѣсколько движущійся воздухъ, заставляя его совершить нѣкоторую работу силой своей инерціи (см. стр. 237) и потерять часть своей энергіи. Но на мѣсто отработавшаго воздуха приходятъ новыя и новыя его порціи, и можно было бы говорить о работоспособности мельницы, если бы можно было подсчитать, сколько воздуха пойдетъ къ ея крыльямъ и сколько энергіи будетъ отдавать имъ воздухъ за все время существованія мельницы. Время же существованія мельницы опредѣляется прочностью ея постройки и можетъ быть увеличено ремонтомъ Точно такъ же не имѣетъ въ сущности даже смысла говорить объ энергіи водяной мельницы. Точно такъ же, когда мы нанимаемъ рабочаго, то насъ нисколько не интересуетъ, сколько онъ работы можетъ совершить за всю свою жизнь, а намъ важно лишь, насколько быстро можетъ онъ совершить ту работу, для которой мы его нанимаемъ.

Отсюда видно, что сравнивать различныя машины и, слѣдовательно, давать имъ ту или другую оцѣнку мы можемъ лишь основываясь на величинѣ работы, которую онѣ совершаютъ въ одинаковое опредѣленное время, напримѣръ, въ единицу времени. Машину, которая совершаетъ каждую секунду 120 пудо-футовъ работы, мы предпочтемъ машинѣ, которая совершаетъ въ секунду лишь 30 пудо-футовъ, и можемъ даже сказать, что первыя машины въ четыре раза полезнѣе второй.

Человѣка, который можетъ проявить большую силу, хотя бы и на одно мгновеніе, мы называемъ сильнымъ. Если же онъ не только обладаетъ силою, но и примѣняетъ ее для работы, мы назовемъ его рабочимъ человѣкомъ. Тотъ же, кто съ увѣренностью берется за большую работу и можетъ на самомъ дѣлѣ ее совершить, называется энергичнымъ человѣкомъ, а кто можетъ въ теченіе продолжительнаго времени быстро совершать работу, тому болѣе подходитъ названіе мощнаго.

Соотвѣтственно этому величину работы, совершаемой какою-нибудь машиною въ единицу времени, принято называть ея *мощностью*. За единицу мощности принимаютъ мощность такой машины, которая совершаетъ единицу работы въ единицу времени, напримѣръ, 1 пудо-футъ въ секунду. На практикѣ выражаютъ мощность въ *лошадиныхъ силахъ*, или *паровыхъ лошадяхъ*. Русская лошадиная сила есть мощность въ 15 пудо-футъ (или въ 75 килограммометровъ — французская лошадиная сила) и соотвѣтствуетъ мощности очень сильныхъ

лошадей, при исключительныхъ условіяхъ. Обыкновенная же лошадь имѣетъ мощность, въ 2—3 раза меньшую; мощность же человѣка—отъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{1}{15}$ лошадиной силы.

Въ борьбѣ съ природою человѣкъ пользуется энергіею и мощностью всевозможныхъ источниковъ работы, но надо все-таки имѣть въ виду, что безъ работы человѣка при этомъ обойтись все-таки нельзя. При пусканіи машины въ ходъ, или при измѣненіи ея хода и т. п. человѣку приходится совершать нѣкоторую работу, хотя и во много разъ меньшую той, которая совершается машиной.

Благодаря пользованію силами природы и другими источниками энергіи, человѣческій родъ обладаетъ въ настоящее время мощностью, въ десятки разъ превышающую мощность мускульной силы человѣка, и съ каждымъ годомъ эта мощность увеличивается, потому что народонаселеніе земного шара непрерывно увеличивается и люди болѣе умѣло распоряжаются имѣющимися на земномъ шарѣ и притекающими къ нему извнѣ—главнымъ образомъ, отъ солнца—запасами энергіи.

13. Законъ живыхъ силъ и его приложенія.

Мы называемъ *живой силой* точки *половину произведенія ея массы* (см. стр. 233) *на квадратъ ея скорости*. Такъ какъ всякое тѣло (твердое, жидкое или газообразное) разсматривается какъ система точекъ, то живой *силой тѣла* называется *половина суммы произведеній массъ всѣхъ точекъ, составляющихъ наше тѣло, на квадраты ихъ скоростей*.

Законъ живой силы состоитъ въ томъ, что, *при движеніи всякой системы точекъ, въ теченіе опредѣленнаго промежутка времени, приращеніе живой силы тѣла равняется работѣ приложенныхъ къ нему силъ*.

Этотъ законъ имѣетъ большое значеніе въ механикѣ и ея приложеніяхъ къ естествознанію и техникѣ. Изъ него выводится *законъ сохраненія энергіи*, доказывающій преобразованіе другъ въ друга энергій различнаго рода, а такъ же получаются законы передачи работы при помощи машинъ.

Машиной называется приспособленіе, употребляемое для достиженія посредствомъ данной силы полезнаго передвиженія тѣла, къ которому приложены силы, сопротивляющіяся этому передвиженію.

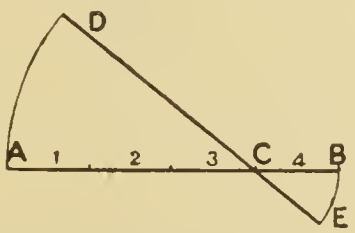
Дѣйствіе машины происходитъ такъ, что сила, приложенная къ тѣлу, производитъ работу, преодолѣвая сопротивленіе, но величина работы, совершаемая силой, не можетъ быть увели-

чена машиной. *Машина служитъ только для преобразованія работы.*

Такъ какъ работа силы опредѣляется какъ произведеніе силы на путь, то ясно изъ предыдущаго, что насколько мы выигрываемъ въ силѣ посредствомъ машины, настолько теряемъ на перемѣщеніи. Иначе, сила и перемѣщеніе для одной и той же работы обратно пропорціональны. Слѣдующіе примѣры простыхъ машинъ пояснятъ это.

Наклонная плоскость. Чтобы поднять грузъ въ 4 пуда на высоту въ 10 футовъ, нужно затратить работу въ 40 пудофутовъ. Если мы возьмемъ наклонную плоскость длиною въ 50 футовъ и высотой въ 10 футовъ, то для поднятія этого же груза въ 4 пуда по наклонной плоскости необходимо приложить силу въ пять разъ меньшую, т.-е. силу въ $^4/_5$ пуда, которая будетъ дѣйствовать на разстояніи 50 футовъ, а потому работа въ этомъ случаѣ выразится черезъ $50 \times {}^4/_5 = 40$ пудофутовъ.

Рычагъ. Чтобы поднять грузъ въ 9 пудовъ на высоту въ 1 футъ, необходимо затратить 9 пудофутовъ работы. Приложимъ къ тѣлу рычагъ его меньшимъ плечомъ *CE* (черт. 59), а на большее плечо *CD* будемъ нажимать. Пусть большее плечо рычага въ три раза длиннѣе короткаго. Ясно, что если мы повернемъ рычагъ вокругъ точки опоры *C* такъ, что конецъ его *E* поднимется данное тѣло на 1 футъ въ точку *B*, то другой конецъ рычага *D*, опустится на 3 фута въ точку *A*. Сила же, приложенная къ нему, должна быть въ три раза меньше, т.-е. равняться 3 пудамъ, а потому работа ея должна выразиться произведеніемъ $3 \times 3 = 9$ пудофутамъ. Такимъ образомъ работа поднятія тѣла отъ примѣненія машины (рычага) не измѣнилась.



Черт. 59.

Сказанное справедливо, если мы не принимаемъ въ расчетъ силы тренія. Эта сила, какъ и многія другія, мѣшающія передачѣ силы, называется вреднымъ сопротивленіемъ, и мы должны затратить силу на ея преодолѣніе. Эта сила тратится непроизводительно. Силы, идущія на преодолѣніе полезнаго перемѣщенія, производятъ полезную работу. Отношеніе полезно затраченной работы къ работѣ движущей силы выражается въ процентахъ. Чѣмъ этотъ процентъ больше, тѣмъ производительнѣе машина.

Изъ приведенныхъ разсужденій становится также очевидной невозможность осуществленія *вѣчнаго двигателя*, который могъ бы производить работу, не получая таковой отъ какого-либо двигателя. Самая постановка такой задачи является, очевидно,

плодомъ недоразумѣнія, такъ какъ всякая машина не порождаетъ силы, а только преобразовываетъ работу данной силы. При этомъ оказывается, что отдаваемая машиной полезная работа всегда меньше работы силы, которая приводитъ машину въ движеніе.

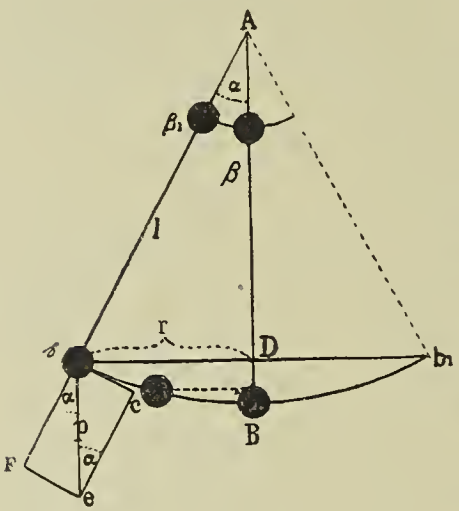
14. Маятникъ.

Маятникомъ называется тяжелое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси.

Если это тѣло представляетъ тяжелую точку B (черт. 60), или небольшихъ размѣровъ грузъ, прикрѣпленный къ концу нити, второй конецъ которой A привязанъ къ неподвижному предмету, то такой маятникъ называется *математическимъ*.

Разстояніе AB отъ точки привѣса маятника до его груза называется *длиною математическаго маятника*, представляющей радіусъ окружности, описываемой точкой B.

Если маятникъ выведенъ изъ положенія равновѣсія AB и отклоненъ въ положеніе Ab, то въ такомъ случаѣ сила, которая заставитъ его вновь опуститься на высоту DB, равна составляющей bc силы тяжести be; сила bc направлена по касательной къ окружности, описываемой точкой B, вторая же, составляющая bF, натягиваетъ нить маятника. Возвратившись въ положеніе B, маятникъ обладаетъ такою же скоростью, какою обладаетъ тяжелая точка, упавшая съ высоты BD. Онъ продолжаетъ двигаться по инерціи и достигаетъ положенія b_1, расположеннаго на той же высотѣ, что и точка b.



Черт. 60.

При малыхъ углахъ клоненія a, не превосходящихъ 3°, всѣ колебанія маятника обл ають такъ называемымъ свойствомъ *изохронности*, т.-е. время хъ колебанія не зависитъ отъ длины пути bB.

Кромѣ того, время одно колебанія маятника не зависитъ ни отъ его вѣса, ни отъ свойствъ матеріи, изъ которой состоитъ маятникъ. Время t, которое маятникъ употребляетъ, чтобы, выйдя изъ положенія b, вновь въ него возвратиться, выражается слѣдующей формулой

$$t = 2\pi \sqrt{\quad},$$

гдѣ l обозначаетъ длину маятника, а g ускореніе силы тяжести въ томъ мѣстѣ земли, гдѣ наблюдаются колебанія маятника, а π обозначаетъ постоянную величину отношенія длины окружности къ ея діаметру (см. стр. 148).

Поэтому времена разсматриваемыхъ малыхъ колебаній двухъ маятниковъ различной длины, въ одномъ и томъ же мѣстѣ земли, относятся между собой какъ корни квадратные изъ ихъ длинъ. На чертежѣ 60-мъ длина маятника $A\beta$ въ четыре раза короче длины маятника AB. Поэтому время, $t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}}$, одного колебанія короткаго маятника такъ относится ко времени t, какъ корень квадратный изъ длины короткаго маятника относится къ корню квадратному изъ длины длиннаго маятника. Отношеніе послѣднихъ корней равно $\frac{1}{2}$; слѣдовательно, время t_1 въ два раза меньше t, т.-е. короткій маятникъ успѣетъ совершить два своихъ колебанія въ то время, какъ маятникъ въ 4 раза болѣе длинный совершитъ только одно колебаніе. Читатель можетъ легко самъ убѣдиться на опытѣ въ справедливости сдѣланнаго заключенія.

Маятникъ, для котораго время одного колебанія, протекающее между двумя послѣдовательными прохожденіями его черезъ отвѣсное направленіе въ прямо противоположныя стороны, т.-е.

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

равняется одной секундѣ времени, называется *секуднымъ маятникомъ.*

Приравнивая послѣднюю формулу единицѣ, получаемъ

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \qquad \text{или} \qquad g = \pi^2 l_1;$$

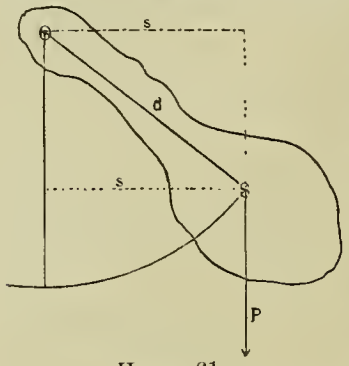
опредѣляемая отсюда длина l_1 называется длиной секуднаго маятника въ данномъ мѣстѣ земли.

Если мы знаемъ длину послѣдняго маятника l_1, то изъ послѣдней формулы получаемъ величину g для мѣста наблюденія; для этого длину секуднаго маятника слѣдуетъ умножить на число $\pi^2 = 9{,}8696$ (см. стр. 148).

Длина секуднаго маятника на экваторѣ равна 99,092 сантиметрамъ, на широтѣ въ 45° равна 99,355 сантиметрамъ и на полюсѣ равна 99,613 сантиметрамъ. Поэтому ускореніе силы тяжести на экваторѣ выражается числомъ 978,00 $\frac{\text{сант.}}{\text{сек.}^2}$, ускоре-

ніе силы тяжести на широтѣ въ 45° выражается числомъ 980,60 $\frac{\text{сант.}}{\text{сек.}^2}$ и на полюсѣ — числомъ 989,19 $\frac{\text{сант.}}{\text{сек.}^2}$.

Если маятникъ представляетъ сплошное тяжелое твердое тѣло, вращающееся вокругъ горизонтальной оси, то онъ называется *физическимъ маятникомъ* (черт. 61).



Черт. 61.

Въ физическомъ маятникѣ находится всегда одна такая точка, которая совершаетъ колебанія такія же, какъ математическій маятникъ. Точка эта называется *центромъ качанія* физическаго маятника. Поэтому колебанія физическаго маятника представляются законами колебаній математическаго маятника, соотвѣтствующаго данному физическому маятнику.

15. Понятіе о силахъ упругости.

Силы, дѣйствующія на твердыя тѣла, видоизмѣняютъ ихъ видъ. Свойство тѣлъ принимать прежнее состояніе, послѣ прекращенія дѣйствія силы называется упругостью. На чертежѣ 62-мъ показано измѣненіе формы резиноваго цилиндра, вслѣдствіе приложенія къ концу его груза. Этотъ опытъ показываетъ, что съ увеличеніемъ силы увеличивается измѣненіе формы (деформація) тѣла. Можно утверждать, что для небольшихъ силъ деформація пропорціональна силѣ. При большемъ увеличеніи силы деформація можетъ принять такой видъ, что тѣло никогда уже не приметъ прежняго вида (разрывъ, переломъ).

Черт. 62.

Черт. 63.

На основаніи упругости пружинъ устраиваются вѣсы (черт. 63). Дѣленія на шкалѣ, соотвѣтствующія опредѣленнымъ удлиненіямъ пружины, даютъ вѣсъ даннаго тѣла. Они нанесены по сравненію съ гирями.

16. Объ ударѣ.

Ударъ происходитъ при соприкосновеніи двухъ тѣлъ.

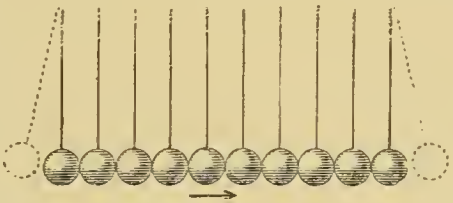
Ударъ упругихъ шаровъ. 1) При ударѣ двухъ упругихъ шаровъ, катящихся въ одномъ направленіи и обладающихъ одинаковой массой, скорости шаровъ послѣ удара мѣняются, т.-е. передній

шаръ, который до удара катился медленнѣе задняго, послѣ удара пріобрѣтетъ скорость задняго шара, а задній шаръ, наоборотъ, скорость передняго (черт. 64). Въ частномъ случаѣ, если одинъ шаръ оставался до удара въ покоѣ, то послѣ удара онъ пріобрѣтетъ ско-

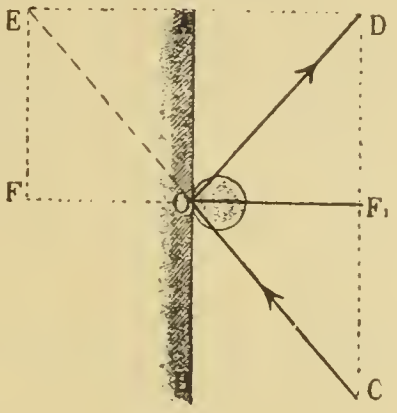
Черт. 64.

рость ударившаго шара, а послѣдній останется неподвижнымъ. Явленіе не измѣняется, если мы имѣемъ нѣсколько неподвижныхъ шаровъ, о которые ударяетъ одинъ шаръ (черт. 65). Въ этомъ случаѣ послѣ удара прійдетъ въ движеніе послѣдній шаръ. Подобное явленіе можно наблюдать при ударѣ вагоновъ.

2) При перпендикулярномъ ударѣ упругаго шара о стѣну шаръ отскакиваетъ по линіи паденія съ той же скоростью. При ударѣ упругаго шара о стѣну подъ острымъ угломъ шаръ отскакиваетъ отъ стѣны такимъ образомъ, что линія паденія, перпендикуляръ, возстановленный въ точкѣ удара къ стѣнѣ, и линія отклоненія шара лежатъ всегда въ одной плоскости, при чемъ уголъ паденія COF_1 (черт. 66) равенъ углу отраженія F_1OD.



Черт. 65.



Черт. 66.

Молотъ. Ручной молотъ представляетъ молотокъ большихъ размѣровъ и значительнаго вѣса.

При ударѣ молотъ подвергается сотрясенію; это сотрясеніе передается рукѣ, а въ частности — плечу, ибо плечо является осью вращенія твердаго тѣла, представляющаго руку и молотъ. Механика даетъ законъ, который указываетъ на возможность избѣжать это сотрясеніе. На сотрясеніе вліяетъ разстояніе отъ точки удара до оси вращенія. Кузнецы, не зная этого закона, такъ умѣло берутся за молотъ и практически пользуются этимъ свойствомъ, что сотрясеніе руки получается ничтожнымъ.

Рекомендуемыя руководства.

1) **Гильомъ.** *Начатки механики.* Переводъ съ французскаго изданія П. Г. Егунова и Б. Н. Лебедева. Петербургъ. Изданіе Яковенко, 1910. Ц. 1 р.

2) **Дм. Перри.** *Вращающійся волчокъ.* Публичныя лекціи. Переводъ съ англійскаго. Изданіе 2-ое Матезисъ. Одесса, 1908 г. П. 60 к.

Астрономія.

I. Небо и земля.

1. Первыя понятія. Начало Астрономіи. Каждому, кто взглянетъ на небо, весь міръ представляется раздѣленнымъ на двѣ части: вверху—небо, въ видѣ голубого свода, внизу—земля. На небѣ днемъ мы видимъ солнце, ночью—луну и звѣзды; всѣ они называются вообще *небесными свѣтилами*.

Часто на небѣ появляются *облака*; иногда ихъ бываетъ такъ много, что они покрываютъ все небо, и мы не видимъ тогда ни солнца, ни луны, ни звѣздъ. Однако оказывается, что облака находятся недалеко отъ земли: въ горныхъ странахъ каждый легко можетъ подняться на гору до высоты облаковъ и даже гораздо выше; въ странахъ, гдѣ нѣтъ горъ, можно подняться выше облаковъ, напримѣръ, на воздушномъ шарѣ. Облака вблизи оказываются такимъ же сырымъ и холоднымъ туманомъ, какой по вечерамъ поднимается изъ рѣкъ, озеръ и болотъ. Облака плаваютъ въ воздухѣ, одни на высотѣ одной или двухъ верстъ надъ поверхностью земли, другія нѣсколько выше; но разстояніе ихъ отъ земли нельзя даже сравнивать съ разстояніями до небесныхъ свѣтилъ: никогда ни одному человѣку не удавалось и врядъ ли когда-либо удастся подняться такъ высоко, чтобы, солнце или луна стали казаться ему хоть немного ближе, чѣмъ обыкновенно.

Съ незапамятныхъ временъ образъ жизни людей былъ связанъ съ движеніями небесныхъ свѣтилъ. Человѣкъ старается покончить всѣ свои работы при дневномъ свѣтѣ, а ночь приноситъ ему необходимый отдыхъ. Смѣна дня и ночи зависитъ отъ восхода и заката солнца. Кромѣ того, весь порядокъ человѣческой жизни въ теченіе круглаго года связанъ съ перемѣнами въ окружающей природѣ: жизнь земледѣльческихъ народовъ зависитъ отъ времени посѣва и уборки хлѣбовъ; жизнь пастушескихъ и кочевыхъ племенъ — отъ времени произрастанія и созрѣванія луговыхъ травъ; и то и другое зависитъ отъ смѣны временъ года; а эта смѣна происходитъ отъ движенія солнца.

Руководствуясь положеніемъ звѣздъ, съ глубокой древности научились находить дорогу во время путешествій; по звѣздамъ же они старались предсказывать будущее. Напримѣръ, въ Египтѣ въ очень давнія времена было замѣчено, что разливъ рѣки Нила начинается вскорѣ послѣ того, какъ звѣзда Сиріусъ появляется утромъ на востокѣ; отъ этого разлива зависѣлъ урожай цѣлаго года, а съ нимъ и благоденствіе всего народа. Если наводненіе наступало врасплохъ, оно, конечно, причиняло много бѣдъ жителямъ. Поэтому древніе египтяне заранѣе начинали ждать появленія Сиріуса на востокѣ, а дождавшись, начинали готовиться къ наводненію.

Такъ вся жизнь древнихъ народовъ была связана съ небесными свѣтилами. Неудивительно, поэтому, что многіе народы (напримѣръ, персы, арабы) считали солнце, луну и звѣзды за боговъ и поклонялись имъ. Другіе, напротивъ, думали, что небесныя свѣтила зажжены въ небѣ только для пользы людей; но и они вѣрили, что движеніями свѣтилъ управляютъ боги, живущіе на небѣ.

Вѣра въ то, что небесныя свѣтила созданы для пользы людей, и что по движенію этихъ свѣтилъ можно предугадать будущее,—заставила людей издавна наблюдать и изучать восходы и закаты солнца, луны и звѣздъ и ихъ положеніе на небѣ въ разное время года.

Изъ этихъ наблюденій возникла самая древняя изъ всѣхъ наукъ *Астрономія*, наука о движеніи свѣтилъ. Вначалѣ она называлась также *Астрологіей* (наукой о свѣтилахъ): главной цѣлью ея было предсказывать будущее. Впослѣдствіи эти двѣ науки раздѣлились: та, которая изучала только положенія свѣтилъ и ихъ движенія, стала называться Астрономіей; другая, которая изъ движеній свѣтилъ старалась вывести предсказанія будущаго, сохранила прежнее названіе Астрологіи.

Послѣдняя существовала нѣсколько вѣковъ, но не дала людямъ никакихъ знаній, такъ какъ оказалось, что движенія звѣздъ не имѣютъ никакого отношенія къ судьбѣ людей.

2. Небесный сводъ. Форма земли. Для наблюдателя, стоящаго на открытомъ мѣстѣ, небо представляется въ видѣ огромнаго полушарія, или купола, опрокинутаго надъ его головой; этотъ куполъ мы и называемъ *небеснымъ сводомъ*. Намъ кажется, словно другая половина этого шара скрыта отъ насъ землею; этотъ воображаемый шаръ, половина котораго у насъ надъ головою, а другая скрыта отъ насъ землею, называется *небесной сферой*. Нечего, конечно, и говорить, что никакой небесной сферы

въ дѣйствительности не существуетъ, и звѣзды, кажущіяся намъ какъ бы прикрѣпленными къ внутренней поверхности небеснаго свода, въ дѣйствительности отстоятъ отъ насъ на различныхъ разстояніяхъ: однѣ ближе, другія во много разъ дальше. Точка небеснаго свода, которая находится какъ разъ надъ головою наблюдателя, называется *зенитомъ*, а линія, видимаго соприкосновенія небеснаго свода съ землею, называется *линіей горизонта*. Земная поверхность, если мы не будемъ обращать вниманія на неровности, образуемыя на ней горами и долинами, представляется намъ въ видѣ плоскаго круга; этотъ плоскій кругъ, въ видѣ котораго представляется наблюдателю земная поверхность, называется *горизонтомъ*.

Какъ далеко отъ насъ находится небо? Уже въ глубокой древности этотъ вопросъ интересовалъ людей. Въ сказкахъ и пѣсняхъ всѣхъ народовъ говорится о такихъ смѣльчакахъ, которые ухитрялись добраться «туда, гдѣ небо сходится съ землею», т.-е. до линіи горизонта, и тамъ какъ-то взбирались на небо.

На первый взглядъ край горизонта находится не слишкомъ далеко. Если стать среди ровнаго поля, то увидимъ, что земные предметы у самаго горизонта,—какой-нибудь лѣсокъ, или колокольня—находятся всего въ нѣсколькихъ верстахъ отъ насъ. Но если мы приблизимся къ нимъ, и пройдемъ еще дальше десятки и сотни верстъ, край горизонта все будетъ казаться на прежнемъ разстояніи.

Изъ этого люди давно заключили, что небесный сводъ находится безъ всякаго сравненія дальше всѣхъ земныхъ предметовъ, т.-е. что небо находится отъ насъ безконечно далеко, что въ дѣйствительности небо нигдѣ не соприкасается съ землею и что кажущаяся близость края горизонта представляется только обманомъ зрѣнія. Чѣмъ же обусловливается этотъ обманъ, намъ станетъ ясно, когда мы познакомимся съ истинной фигурой земли.

Каждый предметъ, отъ котораго мы удаляемся, кажется намъ уменьшающимся въ размѣрахъ. *Чѣмъ дальше предметъ, тѣмъ меньше онъ кажется.* Человѣкъ средняго роста перестаетъ быть видимымъ для простого глаза на разстояніи 5 верстъ; но въ зрительную трубу мы можемъ видѣть его и дальше. Колокольня высотою въ 30 разъ больше человѣческаго роста (около 25 саженъ), могла бы быть видима въ 30 разъ дальше, т.-е. почти за 150 верстъ; но на самомъ дѣлѣ такъ не бываетъ, по крайней мѣрѣ въ нашихъ равнинныхъ странахъ. Если мы по ровному мѣсту отойдемъ отъ колокольни

(или другого высокаго предмета) немного болѣе 4 верстъ, мы увидимъ, что ея подножье начинаетъ какъ будто уходить въ землю у самаго горизонта. Отойдемъ еще дальше, верстъ на 12,—колокольня скроется до половины; а за 25 верстъ отъ нея не остается никакого слѣда. Если мы, наоборотъ, будемъ къ ней приближаться, то сначала на горизонтѣ, какъ будто изъ-за края земли, покажется крестъ, потомъ куполъ, потомъ постепенно будетъ появляться сама колокольня, и на разстояніи около $4^1/_2$ верстъ она появится вся до самаго основанія.

Такимъ образомъ всякій предметъ, отъ котораго мы удалимся на $4^1/_2$ версты по ровному мѣсту, начинаетъ скрываться отъ насъ на горизонтѣ, какъ будто за вершиной холма или пригорка.

Отчего же это происходитъ? Если бы поверхность земли была плоская, тогда удаляющіеся отъ насъ предметы не исчезали бы за краемъ горизонта, а постепенно уменьшаясь, обратились бы въ едва замѣтную точку. Отсюда ясно, что поверхность земли не можетъ быть плоской; она выпукла, какъ вершина круглаго, невысокаго холма. Особенно это замѣтно на морѣ или на озерѣ. Такимъ образомъ исчезаніе предметовъ по частямъ за краемъ горизонта доказываетъ, что *поверхность земли выпукла.*

Что же такое представляетъ изъ себя край горизонта, та линія, гдѣ небо какъ будто сходится съ краемъ земли? Она, какъ видимъ, дѣйствительно представляетъ изъ себя край, но только не всей земной поверхности, а лишь ничтожной ея части, видимой нашему глазу. Съ высоты человѣка средняго роста, стоящаго среди плоской равнины или на берегу моря, разстояніе до края горизонта будетъ всего 4 версты 200 саженъ, т.-е. немного меньше $4^1/_2$ верстъ. Съ колокольни въ 30 саженъ высоты мы, конечно, можемъ окинуть взглядомъ бо́льшую часть земной поверхности: разстояніе горизонта будетъ здѣсь 27 верстъ съ небольшимъ Съ высоты 1 версты край горизонта находится на разстояніи 100 верстъ, а съ вершины самой высокой изъ земныхъ горъ (вершина Эверестъ въ Гималайскихъ горахъ, около 8 верстъ высоты)—на 300 верстъ. Обманъ зрѣнія состоитъ не въ томъ, что край горизонта кажется близко, а въ томъ, что на краю горизонта небо будто касается земли. Явленія расширенія горизонта съ поднятіемъ наблюдателя надъ земной поверхностью также доказываютъ намъ *выпуклость земли.*

Рис. 1-й показываетъ расширеніе горизонта съ увеличеніемъ высоты наблюдателя: Если глазъ наблюдателя находится въ точкѣ B, тогда разстояніе до края горизонта будетъ BD или

BE, если же наблюдатель поднимется въ точку *C*, разстояніе до края горизонта увеличится и будетъ *CF* или *CG*. Рис. 2-й показываетъ возможность видѣть верхнія части высокихъ предметовъ, находящихся за линіей горизонта. Наблюдатель изъ точки *B* можетъ видѣть вершину *DF* горы, основаніе которой скрыто отъ него за краемъ горизонта.

Можно показать теперь, что земная поверхность есть нѣкоторая поверхность *замкнутая*. Это доказываютъ намъ *кругосвѣтныя путешествія*: можно, выѣхавши изъ даннаго мѣста въ какомъ-либо направленіи, объѣхать землю и снова возвратиться въ то же самое мѣсто, *не измѣнивши ни разу направленія своего движенія*.

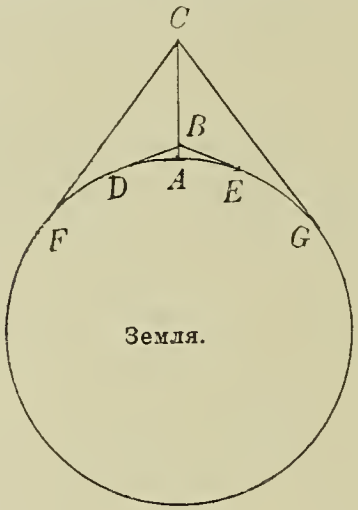


Рис. 1.

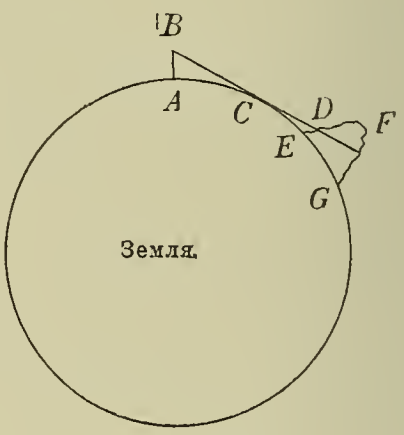


Рис. 2.

Первое кругосвѣтное путешествіе было совершено въ 1519 году испанскимъ мореплавателемъ Фердинандомъ Магелланомъ. Онъ выѣхалъ изъ Испаніи на западъ, переплылъ Атлантическій океанъ, направился къ югу вдоль берега Южной Америки, обогнулъ ея южную оконечность, затѣмъ переплылъ весь громадный Великій океанъ и достигъ Филиппинскихъ острововъ у восточнаго берега Азіи. Самъ Магелланъ погибъ здѣсь въ сраженіи съ туземцами; но его спутники продолжали путь; наконецъ одинъ изъ трехъ кораблей съ 18 уцѣлѣвшими матросами, объѣхавъ вокругъ Африки, возвратился въ Испанію черезъ 3 года послѣ начала путешествія.

Впослѣдствіи кругосвѣтныя путешествія стали повторяться все чаще, и теперь каждый легко можетъ объѣхать всю землю за 2—3 мѣсяца.

Наконецъ, шарообразность земли доказывается тѣмъ фактомъ, что гдѣ бы на земной поверхности ни находился наблюдатель, и на какую высоту надъ нею онъ ни поднимался, всегда

линія горизонта (рис. 3) представляется ему въ видѣ круга (если, конечно, не обращать вниманія на случайныя неровности земной поверхности). Единственной же поверхностью, на которой видимый горизонтъ можетъ представляться кругомъ, является только шаръ. Итакъ, круглый видъ горизонта—доказательство *шарообразности земли.*

О шарообразности земли можно заключить также изъ того, что во время луннаго затменія край тѣни, отбрасываемой землею на лунный дискъ, представляетъ дугу круга, а кругообразную тѣнь могутъ имѣть предметы лишь круглые или шарообразные.

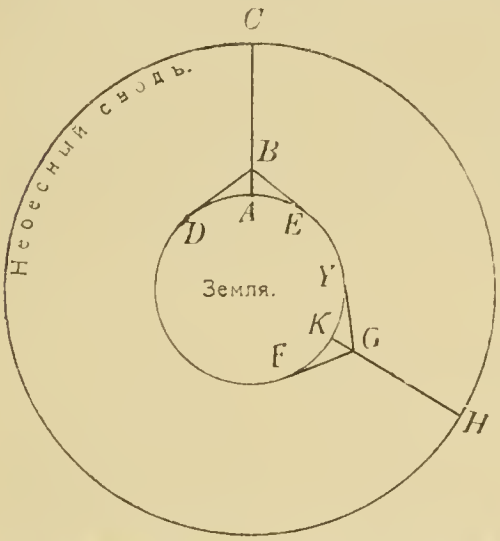


Рис. 3. Для наблюдателя AB въ точкѣ земнаго шара A зенитъ находится въ точкѣ C небесной сферы; край горизонта въ точкахъ D и E. Для наблюдателя K G зенитъ въ точкѣ H, край горизонта въ точкахъ Y и F.

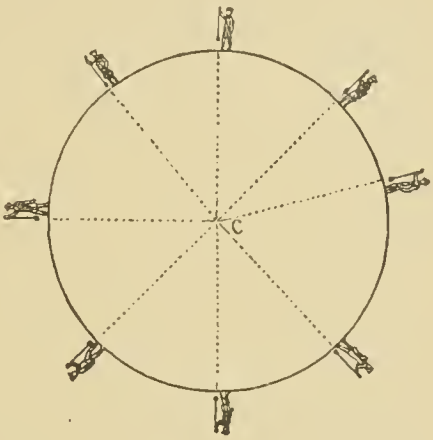


Рис. 4. На всемъ земномъ шарѣ падающія тѣла направляются къ центру.

Уже въ древности нѣкоторыми учеными высказывалась мысль о шарообразности земли; но ихъ ученіе не находило обыкновенно поддержки. Противники новаго ученія возражали имъ, что если бы земля была шарообразна, то люди, находящіеся на сторонѣ ея, противоположной съ нами, должны были бы упасть внизъ или ходить вверхъ ногами. Но дѣло объясняется неправильнымъ пониманіемъ словъ «верхъ» и «низъ». Понятіе «низъ» опредѣляется тѣмъ направленіемъ, по которому въ данномъ мѣстѣ земли падаютъ свободно пущенныя тѣла, а такія тѣла падаютъ по направленію къ центру земли (рис. 4); слѣдовательно, для каждой точки земной поверхности «низъ» тамъ, гдѣ центръ земли. Поэтому понятіе «низъ» и «верхъ» непрерывно измѣняется съ перемѣной положенія наблюдателя на земной поверхности, и если онъ перейдетъ на сторону земли противоположную нашей, то и «низъ» приметъ для него направленіе противоположное съ на-

шимъ; для него низъ будетъ тамъ, гдѣ центръ земли, и онъ скажетъ, что *внизу* у него подъ ногами земля, а *надъ* нимъ небо.

II. Звѣздное небо.

1. Суточное вращеніе небеснаго свода. Каждое утро передъ восходомъ солнца небо начинаетъ свѣтлѣть близъ горизонта въ сторонѣ, которая называется *восточной*. Постепенно весь небесный сводъ становится изъ темнаго свѣтло-голубымъ. На самомъ свѣтломъ мѣстѣ у горизонта появляется ярко-красная полоса, подобная зареву пожара—это *утренняя заря*. Наконецъ, въ самомъ свѣтломъ мѣстѣ этой зари появляется изъ-за горизонта верхній край солнца. Минутъ черезъ пять все солнце поднимается надъ горизонтомъ. Оно красно, лишено лучей; на него легко можно смотрѣть простымъ глазомъ. Оно медленно поднимается, подвигаясь въ то же время все вправо. Съ каждой минутой оно становится все ярче и все бѣлѣе, и скоро свѣтъ его становится ослѣпительнымъ для глазъ. Черезъ нѣсколько часовъ послѣ восхода, въ полдень, солнце достигаетъ самаго высокаго положенія на небѣ. Сторона неба, гдѣ находится въ это время солнце, называется *южной*. Если мысленно провести линію отъ солнца въ полдень прямо внизъ къ горизонту, то точка горизонта, находящаяся прямо подъ солнцемъ, называется *точкой юга*. Послѣ того солнце начинаетъ спускаться, постоянно подвигаясь вправо. Наконецъ, оно касается горизонта въ той его сторонѣ, которая называется *западной*. Въ это время солнце опять становится краснымъ и лишается блеска. Минутъ черезъ пять оно заходитъ на такомъ же разстояніи въ право отъ точки юга, на какомъ взошло влѣво отъ нея. Отъ полудня до заката проходитъ столько же времени, сколько отъ восхода до полудня.

Часа черезъ два послѣ заката солнца наступаетъ ночь и все небо покрывается тысячами мерцающихъ звѣздъ.

Станемъ лицомъ къ востоку (O—рис. 5), гдѣ всходило утромъ солнце; тутъ мы увидимъ, что надъ горизонтомъ ($OSWN$) постепенно появляются все новыя и новыя звѣзды, (напр., S_1, S_2; см. рис. 5). Каждая звѣзда, поднимаясь, движется вправо (въ направленіяхъ, указанныхъ стрѣлками) къ южной части неба, черезъ нѣсколько часовъ послѣ восхода достигаетъ своего самаго высокаго положенія, (напр., B_1, B_2) надъ точкой юга S; потомъ опускается, продолжая подвигаться вправо, и, наконецъ, заходитъ на западѣ (S'_1, S'_2), при чемъ мѣста восхода и заката каждой звѣзды равно отстоятъ отъ точки юга, т.-е. дуга $S_1S =$ $=$ дугѣ SS'_1; дуга $S_2S =$ дугѣ SS'_2.

Станемъ спиною къ югу; направо отъ насъ будетъ востокъ, налѣво—западъ, а прямо передъ нами будетъ *сѣверъ N*. Если мы поднимемъ глаза, то увидимъ ближе къ зениту, чѣмъ къ горизонту, одинокую, довольно яркую звѣзду; это — Полярная звѣзда (см. звѣздную карту, въ концѣ книги). (Какъ найти ее, указано ниже.) Она отличается отъ всѣхъ звѣздъ тѣмъ, что всегда находится почти на одномъ и томъ же мѣстѣ. Уже съ давнихъ поръ она указываетъ дорогу всѣмъ путешественникамъ на сушѣ и на морѣ, потому что по ней легко найти сѣверъ. Всѣ другія звѣзды на сѣверной сторонѣ неба находятся въ постоянномъ движеніи, замѣтить которое не трудно, и каждая изъ нихъ непрерывно движется на одномъ неизмѣнномъ разстояніи отъ Полярной звѣзды. Вообще всѣ небесныя свѣтила движутся постоянно равномѣрнымъ движеніемъ съ востока на западъ, описывая круги около Полярной звѣзды. Каждое свѣтило совершаетъ свой кругъ въ 24 часа, т.-е. въ сутки.

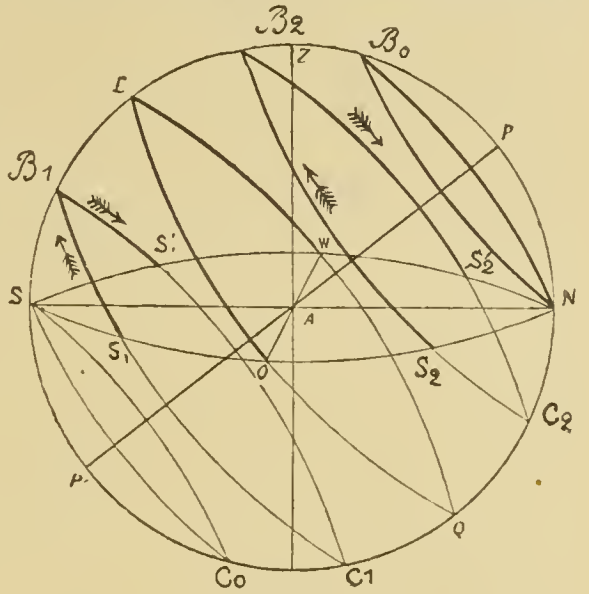


Рис. 5.

A—наблюдатель.
OSWN — плоскость горизонта.
S—точка юга.
N— » сѣвера.
O— » востока.
W—точка запада.
Z — зенитъ наблюдателя *A*.
P — сѣверный полюсъ міра.
P'—южный полюсъ міра.

Это движеніе происходитъ такъ, какъ будто всѣ звѣзды прикрѣплены къ небесному своду, а само небо вмѣстѣ со всѣми звѣздами вращается съ востока на западъ вокругъ воображаемой оси; эта ось (*PAP*) встрѣчаетъ небесный сводъ въ точкѣ, которая называется *сѣвернымъ полюсомъ міра* (*P*) и находится очень близко около Полярной звѣзды. Другая же точка (*южный полюсъ міра P'*), въ которой ось міра встрѣчаетъ небесную сферу, находится въ мѣстѣ неба прямо противоположномъ сѣверному полюсу, и потому южный полюсъ у насъ невидимъ, онъ находится подъ горизонтомъ. Полярная звѣзда не находится какъ разъ въ точкѣ сѣвернаго полюса (см. звѣздную карту); но, въ виду ея близости къ полюсу, кругъ, описываемый ею въ теченіе сутокъ, очень малъ, и потому ея движеніе очень медленно и незамѣтно для глаза.

Круги, которые описываютъ звѣзды, называются *параллельными кругами* (напр., кругъ $S_1B_1S'_1C_1$ или $S_2B_2S'_2C_2$). Чѣмъ дальше

звѣзда отъ полюса, тѣмъ кругъ ея больше. Если звѣзда находится на равномъ разстояніи отъ обоихъ полюсовъ, то кругъ EQ, который описываетъ эта звѣзда, называется *небеснымъ экваторомъ*. Это самый большой изъ параллельныхъ круговъ. Раздѣляя небо на два полушарія—сѣверное (EPQ) и южное ($EP'Q$), онъ пересѣкается съ горизонтомъ въ двухъ противоположныхъ точкахъ, *востока* O и *запада* W. Въ этихъ точкахъ экваторъ дѣлится пополамъ; половина OEW находится надъ горизонтомъ; половина же OQW невидима, такъ какъ находится подъ горизонтомъ. Параллельные круги къ сѣверу отъ экватора и къ югу отъ него дѣлятся горизонтомъ на двѣ *неравныя* части: у сѣверныхъ—большая часть надъ горизонтомъ (напр., $S_2B_2S'_2$), меньшая, невидимая $S'_2C_2S_2$—подъ горизонтомъ; у южныхъ—меньшая ($S_1B_1S'_1$) надъ горизонтомъ, большая ($S'_1C_1S_1$) подъ горизонтомъ. Наконецъ, параллельные круги звѣздъ, лежащихъ около полюсовъ (внутри областей B_0PN и $SP'C_0$) совсѣмъ не пересѣкаются съ горизонтомъ. Звѣзды, находящіяся въ области B_0PN, всегда будутъ находиться надъ плоскостью нашего горизонта; это будутъ звѣзды *незаходящія;* звѣзды же, расположенныя внутри области $SP'C_0$, будутъ *невосходящими*.

Проведемъ мысленно по небесному своду линію отъ зенита Z черезъ сѣверный полюсъ P до самаго горизонта. На вогнутой небесной поверхности это будетъ не прямая линія, а четверть круга. Продолжимъ ту же линію отъ зенита въ южную сторону до горизонта; получится цѣлый полукругъ, который раздѣляетъ небо на двѣ равныхъ половины, восточную и западную, и пересѣкается съ горизонтомъ въ двухъ противоположныхъ точкахъ, сѣвера N (подъ сѣвернымъ полюсомъ) и юга S. Этотъ полукругъ называется *небеснымъ меридіаномъ* (другая его половина находится подъ горизонтомъ). Если проведемъ по земной поверхности прямую линію отъ точки сѣвера къ точкѣ юга, то это будетъ *земной меридіанъ* NS или *полуденная линія*. Каждое мѣсто на земномъ шарѣ имѣетъ свой небесный меридіанъ и свой земной меридіанъ.

Небесный меридіанъ дѣлитъ пополамъ всѣ параллельные круги звѣздъ. Каждая незаходящая (около полярной) звѣзда въ своемъ суточномъ пути пересѣкаетъ меридіанъ два раза *(кульминируетъ)*: одинъ разъ въ высшей точкѣ своего пути (верхняя кульминація), второй разъ въ—низшей точкѣ (нижняя кульминація). Сама Полярная звѣзда тоже проходитъ меридіанъ два раза въ сутки, надъ полюсомъ (верхняя кульминація) и подъ полюсомъ (нижняя кульминація); но ея движеніе, какъ было сказано, мало замѣтно для невооруженнаго глаза.

Звѣзды находятся на небѣ и днемъ, но намъ мѣшаетъ ихъ видѣть яркій голубой цвѣтъ неба. Этотъ голубой цвѣтъ происходитъ отъ воздуха, освѣщеннаго солнцемъ. Если бы не было воздуха, мы бы могли видѣть звѣзды цѣлый день и слѣдить за движеніемъ ихъ вокругъ полюса. Но куда же дѣваются тѣ звѣзды, которыя скрылись за западнымъ краемъ горизонта? Пока не было установлено, что земля шарообразна, существовало много различныхъ ошибочныхъ предположеній. Когда же стало извѣстно, что земля шаръ, то стало ясно, что свѣтила отъ заката до восхода продолжаютъ свое круговое движеніе въ противоположной половинѣ небеснаго свода, скрытой отъ насъ за плоскостью горизонта.

2. Неподвижныя звѣзды и созвѣздія. При взглядѣ на усѣянное звѣздами небо невольно кажется, что счесть ихъ невозможно. Однако это первое впечатлѣніе ошибочно: число ихъ для простого глаза вовсе невелико: всѣхъ звѣздъ на небѣ, видимыхъ невооруженнымъ глазомъ, около 6000.

Звѣзды раздѣляются по ихъ яркости на классы или величины, при чемъ «величина» нисколько не указываетъ на дѣйствительные размѣры данной звѣзды. Число звѣздъ возрастаетъ съ уменьшеніемъ ихъ яркости, при чемъ число звѣздъ до 6-й величины, видимыхъ простымъ глазомъ, какъ выше сказано, около 6000, до 8-й величины около 65.000, а всѣхъ (до 16-й величины), видимыхъ въ большіе телескопы, сотни милліоновъ.

Кромѣ отдѣльныхъ звѣздъ, на небѣ видна слабо свѣтящая полоса, которую называютъ «Млечный Путь» за ея бѣлый цвѣтъ. Она опоясываетъ все небо въ видѣ круга; въ нашихъ странахъ видна только половина этого круга. Въ одномъ мѣстѣ Млечный Путь раздѣляется на двѣ вѣтви, которыя идутъ рядомъ до самаго горизонта; въ южномъ полушаріи онѣ соединяются опять. Въ зрительныя трубы можно разсмотрѣть, что весь Млечный Путь состоитъ изъ безчисленнаго множества мелкихъ звѣздъ, расположенныхъ такъ близко другъ къ другу, что для простого глаза онѣ сливаются въ одно бѣлое сіяніе. Въ отдѣльныхъ небольшихъ участкахъ Млечнаго Пути астрономъ Гершель въ сильную трубу насчитывалъ сотни тысячъ звѣздъ, а во всемъ Млечномъ Пути много милліоновъ звѣздъ, но сколько,—еще не знаютъ.

Легко замѣтить, что звѣзды разсѣяны по всему небу неравномѣрно: мѣстами онѣ образуютъ замѣтныя фигуры: тутъ крестъ, тамъ кругъ, тамъ треугольникъ, тамъ четырехугольникъ. Если мы замѣтимъ какую-нибудь изъ этихъ фигуръ и будемъ слѣдить за ней, то увидимъ, что и завтра, и послѣ завтра, и черезъ годъ, и черезъ десятки лѣтъ эта фигура останется безъ перемѣны. Болѣе 3000 лѣтъ тому назадъ вавилонскіе и египет-

скіе астрономы наблюдали на небѣ тѣ же самыя фигуры, какія мы видимъ теперь. Эти фигуры называются *созвѣздіями.*

За 120 съ небольшимъ лѣтъ до Рождества Христова греческій астрономъ Гиппархъ (прозванный отцомъ астрономіи) составилъ полный списокъ всѣхъ звѣздъ до 5-ой величины. Этимъ первымъ звѣзднымъ спискомъ (каталогомъ) пользовались всѣ астрономы почти 1500 лѣтъ; послѣ того стали составлять новые, болѣе точные и подробные каталоги.

Всѣ мелкія звѣзды, не составлявшія замѣтныхъ фигуръ, причисляли къ ближайшимъ созвѣздіямъ. Такимъ образомъ все небо было раздѣлено на созвѣздія, и каждое мѣсто на небесномъ сводѣ непремѣнно оказывается въ какомъ-нибудь созвѣздіи. Въ каждомъ созвѣздіи отдѣльныя звѣзды обыкновенно обозначаютъ буквами греческой азбуки; самая яркая звѣзда обыкновенно обозначается буквой α (альфа), вторая β (бэта) и такъ далѣе, до конца азбуки; потомъ идутъ буквы латинской азбуки *a*, *b*, *c*... и т. д. (см. въ концѣ книги алфавитъ. Табл. XI).

Звѣзды, входящія въ составъ созвѣздій, называются *неподвижными* на томъ основаніи, что ихъ взаимныя расположенія не измѣняются. Это названіе дано имъ въ отличіе отъ подвижныхъ звѣздъ или *планетъ*, о которыхъ будетъ сказано ниже.

Каждую ясную ночь, во всѣ времена года, въ сѣверной части неба можно видѣть семь довольно яркихъ звѣздъ, образующихъ фигуру въ родѣ ковша или кастрюли. Эта фигура была извѣстна всѣмъ народамъ; древніе называли ее Большой Медвѣдицей, у русскаго простого народа она называется «возъ».

Если соединить мысленно прямою линіей двѣ изъ семи звѣздъ Большой Медвѣдицы, самыя дальнія отъ хвоста, и продолжить эту линію (вверхъ, если хвостъ обращенъ влѣво; внизъ, если хвостъ обращенъ вправо), въ пять разъ дальше, то она пройдетъ близко отъ звѣзды второй величины, стоящей одиноко въ сѣверной части неба. Это—*Полярная звѣзда.* Найдя такимъ образомъ Полярную звѣзду, читатель съ помощью прилагаемой въ концѣ книги звѣздной карты легко найдетъ всѣ главнѣйшія созвѣздія.

3. Опредѣленіе положеній звѣздъ на небесномъ сводѣ. Всякій кругъ дѣлится на 360 равныхъ частей (см. стр. 85), называемыхъ *градусами* (градусъ обозначается значкомъ °); градусъ дѣлится на 60 *минутъ* (значокъ ′), минута—на 60 *секундъ* (″). Такимъ образомъ въ полукругѣ считается 180°0′0″. Всякая звѣзда въ сутки, т.-е. въ 24 часа, проходитъ весь свой параллельный кругъ, т.-е. 360°, въ 12 часовъ — 180°, въ 6 часовъ—четверть круга, или 90°, въ 1 часъ—15°. Въ одну минуту времени звѣзда проходитъ 15′, въ одну секунду—15″.

Чтобы измѣрить разстояніе на небѣ между двумя звѣздами, мы проводимъ мысленно черезъ эти звѣзды *большой кругъ*. Большимъ кругомъ называется такой, который дѣлитъ небесную сферу пополамъ; центръ такого круга находится въ центрѣ небесной сферы. Экваторъ, меридіанъ и горизонтъ суть тоже большіе круги. Всѣ большіе круги равны между собою; поэтому и градусы ихъ равны. Всѣ разстоянія на небѣ мы измѣряемъ градусами большого круга Всякіе два большіе круга на небѣ, пересѣкаясь между собою, дѣлятъ другъ друга пополамъ.

Чтобы опредѣлить положеніе звѣзды *S* на небесномъ сводѣ, проводимъ мысленно большой кругъ черезъ зенитъ *Z* и эту звѣзду (рис. 6).

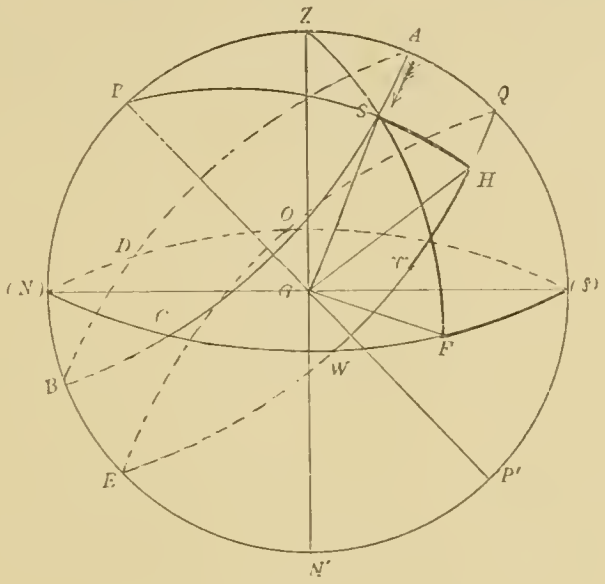


Рис. 6.

P— сѣверный полюсъ міра.
*P*¹—южный » »
*PP*¹—ось міра.
EOQW— небесный экваторъ.
S—свѣтило.
ASCBD— суточная параллель свѣтила *S*.
O(*S*)*W*(*N*)— плоскость горизонта.
O—точка востока.
(*S*)— точка юга.
W—точка запада.
(*N*)—точка сѣвера.
(*S*)(*N*)—полуденная линія.
G—наблюдатель или центръ небесн. сферы.
Стрѣлка указываетъ направленіе видимаго суточнаго движенія свѣтила *S*.
Z—*зенитъ* наблюдателя *G*.
N—*надиръ* наблюдателя *G*.
(*N*)*PZQ*(*S*)*P'*—плоскость меридіана.
D—точка восхода свѣтила.
A—точка, въ которой свѣтило кульминируетъ.
C—точка заката.
B—точка нижней кульминаціи.
ZSF—кругъ высоты свѣтила *S*.
ZS или уголъ *ZGS* — *зенитное разстояніе* свѣтила.
SF или уголъ (*SGF*)—*высота* свѣтила.
(*S*)*F*—*азимутъ*.
PSH—кругъ склоненія свѣтила.
SH или уголъ *SGH* — *склоненіе* свѣтила.
γ—точка весенняго равноденствія.
γH—*прямое восхожденіе* свѣтила.

Такой кругъ называется *вертикальнымъ кругомъ или вертикаломъ* (небесный меридіанъ тоже принадлежитъ къ вертикальнымъ кругамъ). Затѣмъ измѣряютъ, на сколько градусовъ по этому кругу звѣзда отстоитъ отъ горизонта; это будетъ *высота* звѣзды.

Высота измѣняется отъ 0° до 90°. Если звѣзда находится на горизонтѣ (при восходѣ или закатѣ), высота ея равна 0°; если она находится въ зенитѣ, высота ея будетъ 90°. Потомъ измѣряютъ разстояніе вертикальнаго круга звѣзды по горизонту отъ точки юга; это будетъ *азимутъ* звѣзды. Азимутъ измѣняется отъ 0° до 360° и считается къ западу отъ точки юга. Азимутъ точки юга 0° или 360°, точки запада 90°, точки сѣвера 180°, точки востока 270°.

Во время движенія звѣзды ея высота и азимутъ непрерывно измѣняются. Для восходящей и заходящей звѣзды наибольшая высота бываетъ, когда она проходитъ меридіанъ (при кульминаціи); тогда ея азимутъ равенъ 0° или 180°.

Чтобы опредѣлить постоянное положеніе звѣзды среди созвѣздій, проводятъ мысленно кругъ черезъ оба полюса и эту звѣзду Такой кругъ называется *кругомъ склоненія*. Потомъ измѣряютъ, на сколько градусовъ по этому кругу звѣзда отстоитъ отъ экватора; это будетъ *склоненіе* звѣзды. Склоненіе считается отъ экватора къ сѣверу или къ югу отъ 0° до 90°; сѣверныя склоненія обозначаются знакомъ +, южныя знакомъ—. Если звѣзда на экваторѣ, то ея склоненіе равно 0°; склоненіе сѣвернаго полюса равно+90°, южнаго полюса—90°.

На небесномъ экваторѣ есть точка, называемая *точкой весенняго равноденствія* (обозначеніе ея ♈; въ ней солнце бываетъ 8 марта) Разстояніе, считая по экватору на востокъ отъ этой точки до встрѣчи съ кругомъ склоненія какой-нибудь звѣзды, называется *прямымъ восхожденіемъ* этой звѣзды. Прямое восхожденіе вмѣстѣ со склоненіемъ и опредѣляетъ вполнѣ положеніе звѣзды на небесномъ сводѣ (см. рис. 6).

Прямое восхожденіе и склоненіе каждой звѣзды хотя и измѣняются, но очень медленно; поэтому, измѣривъ прямое восхоженіе и склоненіе главныхъ звѣздъ, можно сдѣлать звѣздный глобусъ, или начертить звѣздную карту.

Звѣзднымъ или небеснымъ глобусомъ называется шаръ, на которомъ обозначаютъ два полюса, проводятъ между ними посрединѣ экваторъ, который дѣлятъ на 24 равныхъ части и черезъ точки дѣленія проводятъ 24 круга склоненія. Одинъ изъ этихъ круговъ дѣлятъ отъ экватора къ полюсамъ въ обѣ стороны на градусы, отъ 0° до 90°; черезъ точки дѣленія проводятъ (приблизительно черезъ каждые 10°) параллельные круги. Потомъ по извѣстнымъ склоненію и прямому восхожденію обозначаютъ на шарѣ мѣста звѣздъ. При этомъ надо представлять себѣ, что мы смотримъ на небо изнутри, а на глобусъ снаружи; поэтому то, что на небѣ будетъ направо, на глобусѣ помѣщаемъ налѣво, и наоборотъ.

На звѣздныхъ картахъ созвѣздія рисуются такъ же, какъ они видны на небѣ; но зато очертанія ихъ на глобусѣ передаются вѣрнѣе, чѣмъ на картѣ.

4. Небо мѣняется съ перемѣной мѣста на землѣ. Размѣры земли. Разстояніе до звѣздъ. Передвигаясь по земной поверхности, на востокъ или на западъ, мы не замѣтимъ никакой перемѣны въ звѣздномъ небѣ: тѣ же самыя звѣзды будутъ подниматься и опускаться надъ нашимъ горизонтомъ. Но если мы будемъ двигаться на сѣверъ или на югъ, то перемѣна будетъ скоро замѣтна: съ каждой сотней верстъ при движеніи къ сѣверу Полярная звѣзда становится выше; съ каждой 1000 верстъ она приближается къ зениту на $^1/_9$ часть всего разстоянія отъ зенита до горизонта. *Сѣвернымъ полюсомъ земли называется* мѣсто, гдѣ Полярная звѣзда (вѣрнѣе, сѣверный полюсъ неба, находится какъ разъ надъ нашей головой, въ самомъ зенитѣ, и всѣ звѣзды движутся слѣва направо сохраняя одинаковую высоту надъ плоскостью горизонта; онѣ ни восходятъ ни заходятъ.

Если ѣхать не на сѣверъ, а на югъ, то Полярная звѣзда опускается все ниже, а впереди, на югѣ, появляются новыя звѣзды, которыя не были видны раньше, и мы найдемъ такое мѣсто, гдѣ Полярная звѣзда находится на самомъ горизонтѣ, въ точкѣ сѣвера, а противъ нея, въ точкѣ юга будетъ находиться *южный полюсъ неба*.

Всѣ точки земной поверхности съ которыхъ видны одновременно оба полюса неба, лежатъ на большомъ кругѣ, называемомъ *земнымъ экваторомъ*.

Направляясь дальше къ югу, за экваторъ, мы замѣтимъ, что небо мѣняется. Сѣверный полюсъ совсѣмъ исчезнетъ за краемъ горизонта, южный будетъ показываться на небѣ, поднимаясь на $^1/_9$ часть разстоянія отъ зенита до горизонта на каждыя 1000 верстъ пути. Это—*южное полушаріе* земли, а мы живемъ *въ сѣверномъ полушаріи*. Наконецъ, существуетъ на земномъ шарѣ и такое мѣсто, гдѣ южный полюсъ неба находится прямо надъ головой, въ зенитѣ; это мѣсто—*южный полюсъ земли*.

Такимъ способомъ можно приблизительно измѣрить земной шаръ. Если мы ѣдемъ къ сѣверу или къ югу, то на каждыя 1000 верстъ нашего пути полюсъ неба передвигается отъ горизонта къ зениту или обратно приблизительно на $^1/_9$ часть разстоянія зенита отъ горизонта. Поэтому, если мы проѣдемъ 9000 верстъ, то полюсъ перейдетъ отъ зенита (на земномъ полюсѣ) до горизонта (на земномъ экваторѣ). Поэтому отъ земного экватора до одного изъ земныхъ полюсовъ 9000 верстъ, а отъ полюса до полюса 18.000 верстъ; въ общемъ же длина круговой ли-

ніи, проходящей черезъ оба полюса *(земного меридіана)* равна 36.000 верстъ. Такъ какъ поперечникъ или діаметръ всякаго шара приблизительно втрое короче его окружности, то, слѣдовательно, діаметръ земного шара равенъ приблизительно 12.000 верстамъ, а разстояніе отъ центра до поверхности земли (полупоперечникъ или рàдіусъ земли) равняется приблизительно 6000 верстъ. Таковы приблизительные размѣры земли.

Взаимное разстояніе двухъ звѣздъ на небесномъ сводѣ мы можемъ выразить только въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дуги большого круга, проведеннаго черезъ эти двѣ звѣзды. Но мы не можемъ отсюда заключить о дѣйствительномъ разстояніи между звѣздами, т.-е. не можемъ узнать, сколько верстъ отъ одной звѣзды до другой: двѣ звѣзды могутъ представляться совсѣмъ близкими одна къ другой (т.-е. ихъ угловое разстояніе будетъ мало), но дѣйствительное разстояніе ихъ можетъ составить многіе милліоны верстъ.

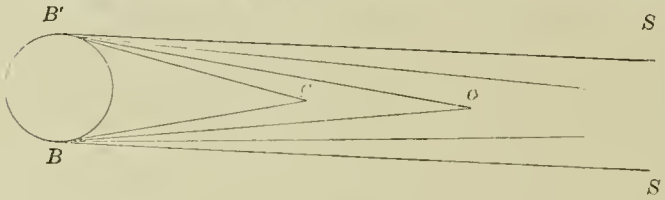


Рис. 7.

Далѣе, очень трудно опредѣлить разстояніе звѣздъ отъ земли: мы можемъ лишь показать, что эти разстоянія весьма велики. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ на земной поверхности три точки: A, B и C. Въ точкахъ A и B поставимъ двѣ зрительныхъ трубы и направимъ ихъ въ точку C; тогда между направленіями трубъ AC и BC образуется уголъ ACB. Если точка C станетъ удаляться отъ точекъ A и B, то этотъ уголъ станетъ уменьшаться, и когда разстояніе точки C отъ A и B станетъ неизмѣримо больше, чѣмъ разстояніе между точками A и B, тогда направленія обѣихъ трубъ станутъ параллельными другъ другу. Поэтому, если изъ двухъ точекъ земли (B, B'; см. рис. 7), находящихся на разстояніи нѣсколькихъ тысячъ верстъ, направить зрительныя трубы на какую угодно звѣзду S, то направленія этихъ трубъ будутъ почти параллельны; слѣдовательно, разстояніе звѣзды отъ земли неизмѣримо больше разстоянія между точками наблюденій. Отсюда слѣдуетъ, что нашъ земной шаръ, имѣющій приблизительно 12.000 верстъ въ поперечникѣ и кажущійся намъ столь огромнымъ, ничтоженъ въ сравненіи съ разстояніями до неподвижныхъ звѣздъ.

III. Движеніе солнца.

1. Движеніе солнца между звѣздами. Звѣзды движутся передъ нашими глазами постоянно съ востока на западъ вокругъ оси міра. Совершая полный кругъ ровно въ сутки, каждая звѣзда

восходитъ и заходитъ постоянно въ однѣхъ и тѣхъ же точкахъ горизонта, и путь ея на небесномъ сводѣ для каждаго мѣста на земномъ шарѣ остается всегда неизмѣннымъ.

Иначе движутся солнце, луна и планеты. Такъ какъ движеніе луны и планетъ связано съ движеніемъ солнца, то разсмотримъ сперва какъ движется солнце.

Мѣсто его восхода и заката, путь на небесномъ сводѣ и высота въ полдень въ меридіанѣ ежедневно мѣняются въ теченіе года. Около 8 марта солнце восходитъ *въ точкѣ востока* приблизительно въ 6 часовъ утра; черезъ 6 часовъ оно достигаетъ меридіана на такой же высотѣ, какъ звѣзды, находящіяся на небесномъ экваторѣ; еще черезъ 6 часовъ оно заходитъ приблизительно въ точкѣ запада. Такимъ образомъ въ этотъ день отъ восхода до заката солнца проходитъ 12 часовъ, т.-е. полсутокъ; другими словами, *день* въ это время *равенъ ночи*. Вотъ почему 8 марта называется *днемъ весенняго равноденствія*.

Суточный путь солнца надъ горизонтомъ въ этотъ день какъ разъ совпадаетъ съ небеснымъ экваторомъ. Такъ какъ небесный экваторъ опоясываетъ все небо и проходитъ черезъ много созвѣздій, то какимъ образомъ можно узнать, въ которомъ изъ нихъ находится солнце? Яркій дневной свѣтъ не позволяетъ видѣть тѣ звѣзды, среди которыхъ находится солнце; но мѣсто его легко опредѣлить иначе. Мы знаемъ, что каждая точка экватора (а значитъ и та, гдѣ находится солнце) обходитъ полный кругъ, 360^0, въ 24 часа; а полкруга, 180^0, она пройдетъ въ 12 часовъ. Значитъ, въ полночь эта точка будетъ въ сѣверной половинѣ меридіана, ниже точки сѣвера (подъ горизонтомъ), а на ея мѣстѣ надъ точкой юга будетъ въ полночь противоположная ей (отстоящая на полкруга) точка экватора. Наблюдая небо въ полночь 8 марта мы увидимъ въ меридіанѣ созвѣздіе Дѣвы, именно мѣсто его между звѣздами 3-й величины β и γ_1. По картѣ или глобусу найдемъ мѣсто солнца на 180^0 отъ этихъ звѣздъ по экватору. Это будетъ точка въ созвѣздіи Рыбъ; она называется *точкой весенняго равноденствія*.

Съ каждымъ днемъ послѣ 8 марта солнце восходитъ все раньше, а заходитъ позже и позже; день становится длиннѣе ночи. Мѣсто восхода солнца отодвигается съ каждымъ днемъ влѣво, мѣсто заката все дальше вправо (опять-таки ближе къ сѣверу) отъ точки запада. Въ полдень оно проходитъ меридіанъ съ каждымъ днемъ выше и выше. Отмѣчая мѣсто солнца ежедневно на картѣ, мы увидимъ, что оно передвигается по созвѣздіямъ Рыбъ, Овна и Тельца, удаляясь отъ экватора и точки весенняго равноденствія къ сѣверо-востоку.

9 іюня солнце достигаетъ своего самаго удаленнаго положенія отъ экватора: на $23^1/_2{}^0$ къ сѣверу отъ него. Въ этотъ день оно восходитъ всего раньше; въ полдень проходитъ меридіанъ на наибольшей высотѣ и заходитъ позже всего. Это день *лѣтняго солнцестоянія*, и въ этотъ день жители сѣвернаго полушарія земли получаютъ отъ солнца наибольшее количество тепла и свѣта. Вслѣдъ за этимъ днемъ начинается самое жаркое время года. Мѣста восхода и заката солнца въ этотъ день наиболѣе удалены къ сѣверу отъ точекъ востока и запада. Отмѣчая высоту солнца въ полдень, найдемъ, что оно находится на параллельномъ кругѣ въ $23^1/_2{}^0$ къ сѣверу отъ экватора; этотъ кругъ называется *лѣтнимъ тропикомъ* (поворотнымъ кругомъ), или *тропикомъ Рака*. На слѣдующій день солнце уже поворачиваетъ назадъ къ экватору (отъ этого тропикъ (поворотный кругъ) и получилъ свое названіе). Оно съ каждымъ днемъ снова восходитъ и заходитъ все ближе и ближе къ точкамъ востока и запада, проходитъ меридіанъ въ полдень ниже и ниже; время восхода становится позже, время заката—раньше; день уменьшается, ночь прибываетъ. Отмѣчая путь солнца между звѣздами, видимъ, что оно проходитъ по созвѣздіямъ Близнецовъ, Рака и Льва, подвигаясь къ юго-востоку,—къ экватору.

11 сентября день опять равенъ ночи и солнце опять на экваторѣ; это *день осенняго равноденствія*. Солнце восходитъ въ точкѣ востока, заходитъ въ точкѣ запада; въ полночь въ меридіанѣ на той же высотѣ теперь проходитъ точка весенняго равноденствія, которая была невидима въ мартѣ. Солнце теперь находится въ созвѣздіи Дѣвы, въ *точкѣ осенняго равноденствія*.

Слѣдующіе дни солнце уже восходитъ правѣе (южнѣе) точки востока, послѣ 6 часовъ утра, проходитъ въ полдень въ меридіанѣ все ниже и ниже и заходитъ все лѣвѣе (южнѣе) точки запада. День становится меньше ночи; съ каждымъ днемъ наши страны получаютъ все меньше свѣта и тепла; наступаетъ сырая и холодная осень. Солнце передвигается въ это время къ юго-востоку по созвѣздіямъ Дѣвы, Вѣсовъ, Скорпіона и южной части Змѣеносца.

10 декабря самый короткій день. Солнце въ этотъ день находится на $23^1/_2{}^0$ къ югу отъ экватора, въ созвѣздіи Стрѣльца. Его суточный параллельный кругъ въ этотъ день называется *тропикомъ Козерога* или *зимнимъ тропикомъ*. Слѣдующіе дни послѣ 10 декабря солнце поворачиваетъ опять къ сѣверу и приближается къ экватору. Продолжительность дня опять увеличивается; время восхода становится раньше, время заката—позже. Мѣста восхода и заката подвигаются къ сѣверу, при-

ближаясь съ каждымъ днемъ къ точкамъ востока и запада. 8 марта солнце достигаетъ экватора въ точкѣ весенняго равноденствія, и весь годичный кругъ начинается опять въ томъ же порядкѣ.

Итакъ, солнце не занимаетъ постояннаго мѣста на небесной сферѣ; оно постоянно перемѣщается изъ одного созвѣздія въ другое. Созвѣздія, въ которыхъ бываетъ солнце, называются *зодіакальными*.

2. Эклиптика и Зодіакъ. Предвареніе равноденствій. Если бы можно было на небесной сферѣ каждый день отмѣчать положеніе солнца между звѣздами (это можно сдѣлать на небесномъ глобусѣ), то получился бы рядъ точекъ, опоясывающій все небо. Соединивъ всѣ эти точки, мы получимъ правильный кругъ, одинъ изъ большихъ круговъ небесной сферы. Этотъ кругъ $LNM\gamma$, годичный путь солнца, называется *эклиптикой*. (См. рис. 8). Эклиптика имѣетъ два полюса A и B (т.-е. двѣ наиболѣе удаленныя отъ нея точки). Эклиптика пересѣкается съ экваторомъ EQ въ двухъ противоположныхъ точкахъ, именно въ точкахъ равноденствій весенняго (γ) и осенняго (N). Двѣ ея наиболѣе удаленныя отъ экватора точки M и L, лѣтняго и зимняго солнцестоянія, удалены отъ него на $23^0 27'$ къ сѣверу и къ югу. Въ этихъ точкахъ эклиптика касается тропиковъ Рака KM и Козерога LS.

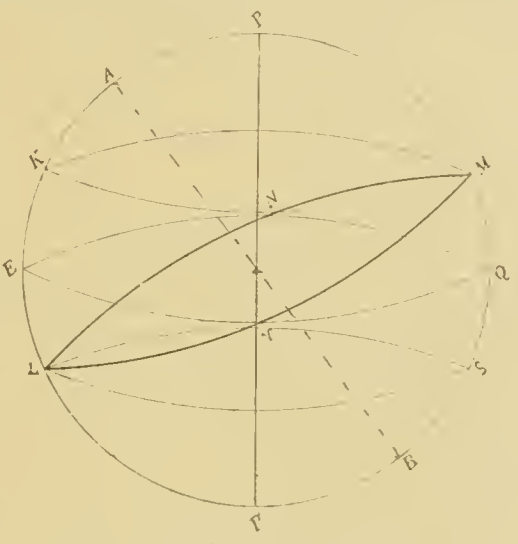


Рис. 8.

Эклиптика — важнѣйшій изъ круговъ небесной сферы; по ней движется солнце; вдоль нея движутся луна и планеты. Поэтому еще въ глубокой древности египетскіе и вавилонскіе астрономы тщательно опредѣлили положеніе эклиптики среди созвѣздій; они раздѣлили всю эклиптику съ запада на востокъ, отъ точки весенняго равноденствія, на 12 равныхъ частей, по числу мѣсяцевъ въ году; эти части были названы знаками Зодіака. Точка весенняго равноденствія тогда была въ созвѣздіи Овна; поэтому она и обозначается знакомъ созвѣздія Овна; точка лѣтняго солнцестоянія была въ созвѣздіи Рака; отсюда лѣтній тропикъ былъ названъ тропикомъ Рака; точно такъ же точка осенняго равноденствія была въ созвѣздіи Вѣсовъ, а зимняго солнцестоя-

нія—въ созвѣздіи Козерога. Знаки зодіака получили свое особое обозначеніе, сохранившееся и теперь на многихъ картахъ и въ календаряхъ. Вотъ эти обозначенія: ♈ Овенъ, ♉ Телецъ, ♊ Близнецы, ♋ Ракъ, ♌ Левъ, ♍ Дѣва, ♎ Вѣсы, ♏ Скорпіонъ, ♐ Стрѣлецъ, ♑ Козерогъ, ♒ Водолей, ♓ Рыбы.

Положеніе эклиптики на небѣ среди созвѣздій почти не мѣняется, но положеніе экватора мѣняется постоянно, хотя и очень медленно. Точка весенняго равноденствія двигаясь очень медленно по эклиптикѣ съ востока на западъ (въ ту же сторону, какъ и суточное движеніе, но противъ годичнаго движенія солнца), навстрѣчу солнцу, передвигается въ годъ всего на 50″,2; слѣдовательно, всю эклиптику она обойдетъ приблизительно въ 26.000 лѣтъ. Съ тѣхъ поръ, какъ эклиптика была раздѣлена на знаки зодіака, прошло болѣе 2.500 лѣтъ, а за это время точка весенняго равноденствія успѣла передвинуться больше, чѣмъ на 35°, т.-е. больше, чѣмъ на цѣлый знакъ Зодіака; изъ созвѣздія Овна она перешла уже давно въ созвѣздіе Рыбъ. Но прежнія названія знаковъ остались, хотя знаки и разошлись съ одноименными созвѣздіями.

Вслѣдствіе передвиженія экватора солнце приходитъ въ точку весенняго равноденствія раньше, чѣмъ обойдетъ весь кругъ эклиптики, поэтому *тропическій годъ* (т.-е. время отъ одного весенняго равноденствія до другого—періодъ, заключающій всѣ четыре времени года) приблизительно на 20 минутъ короче *звѣзднаго года* (т.-е. времени полнаго оборота солнца между звѣздами).

Вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ экватора перемѣщаются, конечно, и оба его полюса. Сѣверный полюсъ, находящійся теперь около Полярной звѣзды, обходитъ приблизительно въ 26.000 лѣтъ вокругъ полюса эклиптики полный кругъ по созвѣздіямъ Малой Медвѣдицы, Цефея, Лебедя, Лиры, Геркулеса и Дракона, оставаясь отъ него постоянно на разстояніи 23° 27′. Вслѣдствіе этого движенія видъ звѣзднаго неба для даннаго мѣста постоянно мѣняется; но измѣненія эти происходятъ такъ медленно, что многія поколѣнія людей смѣняютъ другъ друга, не замѣчая никакой перемѣны.

Приблизительно за 120 лѣтъ до Р. Х. знаменитый греческій астрономъ Гиппархъ, составляя первую карту звѣзднаго неба, замѣтилъ, что по его наблюденіямъ всѣ звѣзды имѣютъ иное положеніе, чѣмъ по наблюденіямъ прежнихъ астрономовъ. Свѣряя всѣ, извѣстныя ему, прежнія наблюденія со своими, онъ открылъ это вѣковое перемѣщеніе экватора, полюса и точекъ равноденствій, и назвалъ это перемѣщеніе «*предвареніемъ равноденствій*».

3. Скорость движенія и разстояніе солнца отъ земли. Перигей и апогей. Солнце проходитъ весь кругъ эклиптики, 360 градусовъ, не въ 360 дней, а приблизительно въ $365^1/_4$; слѣдовательно, въ сутки оно среднимъ числомъ проходитъ меньше градуса, именно 59 съ небольшимъ минутъ. Но это движеніе солнца неравномѣрно. Лѣтнюю половину эклиптики (которая лежитъ къ сѣверу отъ экватора) солнце проходитъ въ 186 дней (отъ 8 марта до 11 сентября), зимнюю половину (лежащую къ югу отъ экватора)—въ $179^1/_4$ дней (отъ 11 сентября до 8 марта); медленнѣе всего солнце движется между 17 и 20 іюня (стараго стиля). Затѣмъ движеніе его постепенно ускоряется; около 18—20 декабря оно достигаетъ наибольшей величины, а потомъ вновь постепенно замедляется. Мѣсто, гдѣ солнце движется быстрѣе всего, называется *перигеемъ*, а противоположная точка—*апогеемъ*. Вмѣстѣ съ измѣненіемъ скорости движенія солнца, мѣняется и его видимая величина: въ перигеѣ его поперечникъ оказывается больше, а въ апогеѣ меньше, чѣмъ въ остальные дни года; чѣмъ быстрѣе движен.е солнца, тѣмъ больше его діаметръ, и наоборотъ.

Вслѣдствіе *рефракціи*, т.-е. преломленія свѣта въ слояхъ воздуха, лучи свѣта отъ каждаго свѣтила (кромѣ свѣтилъ, находящихся въ зенитѣ) идутъ къ нашимъ глазамъ не по прямой линіи, и каждое свѣтило мы видимъ на небесномъ сводѣ нѣсколько выше того мѣста, гдѣ оно на самомъ дѣлѣ находится. Чѣмъ ближе къ горизонту, тѣмъ больше эта разница между дѣйствительнымъ и видимымъ положеніемъ свѣтила. Поэтому нижній край солнца близъ горизонта дѣйствіемъ рефракціи поднимается нѣсколько больше, чѣмъ верхній, такъ что вертикальный поперечникъ солнца какъ бы укорачивается. Мы видимъ восходъ солнца на нѣсколько минутъ раньше дѣйствительнаго, а заходъ, наоборотъ, — позже. Вслѣдствіе этого продолжительность дня увеличивается, а продолжительность ночи уменьшается.

Угловая величина солнца (и всякаго предмета) показываетъ намъ связь между его дѣйствительной величиной и разстояніемъ: *всякій круглый предметъ, удаленный отъ нашихъ глазъ приблизительно въ 107 разъ больше своего поперечника*, будетъ имѣть видимый діаметръ въ 32′, т.-е. *будетъ равенъ диску солнца*. Такъ, напримѣръ, серебряный рубль, отнесенный на 5 аршинъ отъ глазъ, или гривенникъ, отдаленный на $2^1/_2$ аршина, будутъ почти какъ разъ равны діаметру солнца. Изъ этого слѣдуетъ, что солнце находится отъ насъ въ 107 разъ дальше своей величины; если мы узнаемъ его разстояніе, то будемъ знать и его настоящую

величину, и наоборотъ. Величина солнца, какъ сказано, увеличивается по мѣрѣ ускоренія его движенія и уменьшается при замедленіи движенія. Въ перигеѣ діаметръ солнца достигаетъ $32^1/_2'$, т.-е. оно находится отъ насъ приблизительно въ 105 разъ дальше своей величины; въ апогеѣ—въ іюнѣ—въ 109 разъ; діаметръ его тогда не превышаетъ $31^1/_2'$. Трудно думать, что измѣняется дѣйствительная величина солнца; поэтому необходимо признать, что измѣняется его разстояніе отъ земли, и что въ перигеѣ оно находится ближе къ землѣ, чѣмъ въ апогеѣ.

4. Суточное движеніе солнца. Итакъ, солнце является какъ бы подвижной звѣздой: оно обращается суточнымъ движеніемъ вмѣстѣ съ звѣзднымъ небомъ съ востока на западъ, и въ то же время передвигается между звѣздами годичнымъ движеніемъ съ запада на востокъ. Вслѣдствіе этого движенія, каждая звѣзда восходитъ, проходитъ меридіанъ и заходитъ, сравнительно съ солнцемъ, въ среднемъ минуты на 4 раньше, чѣмъ наканунѣ.

Если мы будемъ изъ средней Россіи передвигаться къ сѣверу, то увидимъ, что лѣтомъ день становится все длиннѣе, а зимою все короче сравнительно съ ночью, высота же солнца въ полдень и зимою и лѣтомъ становится меньше и меньше. Приблизительно на 650 верстъ сѣвернѣе Петербурга, на широтѣ 66° 33′ (это мѣсто называется *сѣвернымъ полярнымъ кругомъ*), солнце 9 іюня вовсе не заходитъ: оно только касается въ полночь горизонта въ точкѣ сѣвера и сейчасъ же опять поднимается. Зато 10 декабря солнце не восходитъ цѣлые сутки: оно только прикасается къ горизонту въ точкѣ юга въ полдень и тотчасъ же опять скрывается.

На сѣверѣ Финляндіи, близъ города Торнео, есть небольшая гора Авасакса, съ которой 8 іюня бываетъ видно въ полночь незаходящее солнце; многіе путешественники ѣздятъ въ Торнео и восходятъ на эту гору только для того, чтобы увидать *полуночное солнце сѣвера*.

Еще сѣвернѣе полярнаго круга солнце лѣтомъ не заходитъ уже нѣсколько дней, дальше къ сѣверу—нѣсколько недѣль, а зимою столько же времени не восходитъ; только свѣтлое пятно зари появляется на югѣ около полудня, а потомъ опять погасаетъ. На самомъ сѣверномъ полюсѣ земли солнце не появляется на небѣ цѣлые полгода—съ 11 сентября по 8 марта. Съ ноября до конца января царитъ полная ночь, освѣщаемая только свѣтомъ звѣздъ и луны и блескомъ сѣверныхъ сіяній. 8 марта все солнце отдѣляется отъ горизонта и начинаетъ двигаться параллельно горизонту, незамѣтно поднимаясь выше и выше. 9 іюня

оно достигаетъ наибольшей высоты, на $23^0\ 27'$ выше горизонта, а затѣмъ постепенно понижается, продолжая кружиться параллельно горизонту. 11 сентября оно достигаетъ горизонта и черезъ три оборота (т.-е. черезъ трое сутокъ) заходитъ совсѣмъ. Такимъ образомъ на сѣверномъ полюсѣ полгода длится лѣтній день и полгода зимняя ночь. Если мы будемъ изъ средней Россіи ѣхать не къ сѣверу, а къ югу, то разница между днемъ и ночью, какъ зимою, такъ и лѣтомъ будетъ становиться меньше и меньше, а высота солнца въ полдень—больше и больше. Когда мы достигнемъ земного тропика Рака (географическая широта $+23^0\ 27'$), т.-е. мѣста, гдѣ небесный тропикъ Рака проходитъ черезъ зенитъ (этотъ тропикъ проходитъ черезъ южный Египетъ, Аравію и т. д.), то увидимъ, что 9 іюня въ полдень солнце проходитъ черезъ самый зенитъ: въ этотъ моментъ вертикально стоящій столбъ не даетъ тѣни, и дно самыхъ глубокихъ колодцевъ освѣщается лучами солнца.

На земномъ экваторѣ два раза въ годъ, 8 марта и 11 сентября солнце въ полдень проходитъ черезъ зенитъ. На тропикѣ Козерога, проходящемъ черезъ Южную Африку, т.-е. на южной широтѣ—$23^0\ 27'$, солнце проходитъ черезъ зенитъ, одинъ разъ въ году, 10 декабря.

На южномъ полюсѣ земли солнце не восходитъ съ марта по сентябрь и не заходитъ съ сентября по мартъ.

IV. Движеніе луны.

1. Внѣшній видъ луны. Фазы. Послѣ солнца, среди другихъ свѣтилъ на небесномъ сводѣ выдѣляется своимъ свѣтомъ и величиной луна. Поперечникъ полной луны тоже приблизительно равенъ половинѣ градуса. Всякій круглый предметъ, отнесенный отъ нашихъ глазъ на разстояніе *въ $110^1/_2$ разъ больше своей величины*, равняется средней величинѣ луннаго диска (средній поперечникъ луны $= 31'8''$, т.-е. нѣсколько меньше поперечника солнца).

Внѣшній видъ луны постоянно мѣняется: она является, то въ видѣ серпа или полумѣсяца, то въ видѣ неравнобокаго диска, то въ видѣ полнаго, правильнаго круга. Эти перемѣны называются *лунными фазами*. Главныхъ фазъ считается четыре: 1) новолуніе; 2) первая четверть; 3) полнолуніе; 4) послѣдняя четверть; онѣ слѣдуютъ черезъ недѣлю одна за другой, всѣ же фазы заканчиваются въ $29^1/_2$ дней (отъ новолунія до новолунія); этотъ періодъ называется *синодическимъ мѣсяцемъ*.

Объясняются лунныя фазы такъ: луна представляетъ изъ себя шарообразное тѣло, не имѣющее своего собственнаго свѣта;

свѣтлая часть ея диска—это сторона ея, освѣщенная солнцемъ; въ полнолуніи она обращена одновременно къ намъ и къ солнцу; такое положеніе называется *противостояніемъ* или *оппозиціей*; при новолуніи къ землѣ обращена темная, неосвѣщенная сторона, потому что луна находится между землею и солнцемъ (такое положеніе называется *соединеніемъ*); въ четвертяхъ къ землѣ обращена половина свѣтлой и половина темной стороны угловое разстояніе луны отъ солнца въ это время равно 90^0 (это положеніе называется *квадратурой*).

На рисункѣ 9-мъ представлены положенія луны въ ея пути кругомъ земли; солнечный свѣтъ падаетъ слѣва.

Въ теченіе 4—5 дней передъ первой четвертью и дней 5 послѣ послѣдней четверти внутри роговъ луннаго серпа можно бываетъ видѣть темный дискъ, слабо свѣтящійся такъ называемымъ *пепельнымъ* свѣтомъ. Пепельный свѣтъ обусловливается освѣ-

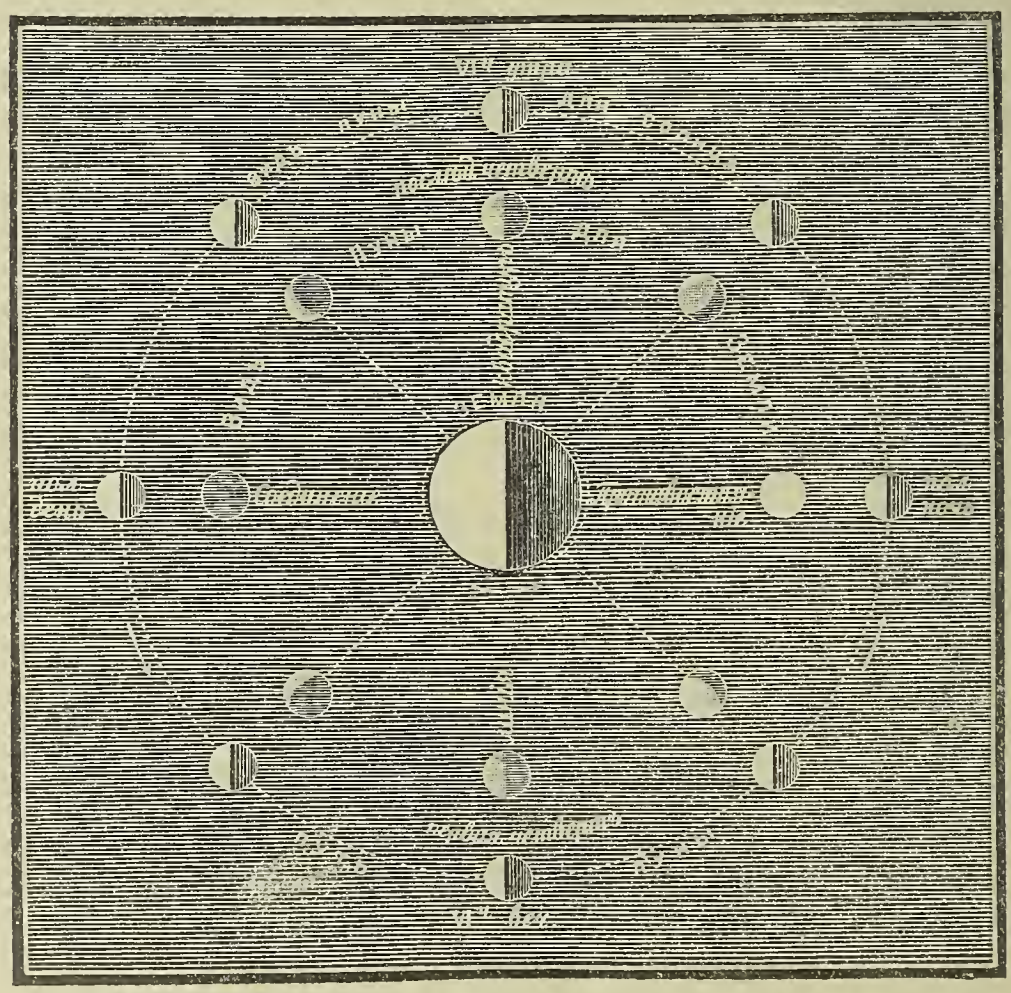


Рис. 9. Фаза луны.

щеніемъ лунной поверхности солнечными лучами, отразившимися отъ поверхности земли.

2. Орбита луны, время обращенія, узлы, перигей и апогей. Наблюдая луну и рядомъ съ нею какую-нибудь звѣзду, нетрудно видѣть, что оба свѣтила движутся суточнымъ движеніемъ съ востока на западъ съ неодинаковой скоростью: звѣзда движется скорѣе, луна медленнѣе. Черезъ часъ луна отстаетъ отъ звѣзды къ востоку приблизительно на величину своего поперечника, что легко замѣтить простымъ глазомъ. И за сутки луна передвигается къ востоку между звѣздами больше, чѣмъ на 13^0; слѣдовательно, она движется почти въ 13 разъ скорѣе солнца, и движется, такъ же, какъ и солнце, съ запада на востокъ, противъ суточнаго движенія.

Подобно солнцу, луна всегда находится въ одномъ изъ зодіакальныхъ созвѣздій; однако она движется не по самой эклиптикѣ, какъ солнце, а только вблизи нея. Два раза въ мѣсяцъ луна пересѣкаетъ эклиптику, одинъ разъ съ юга на сѣверъ, другой разъ съ сѣвера на югъ; эти точки пересѣченія называются *узлами восходящимъ* и *нисходящимъ*. Въ серединѣ между узлами луна удаляется отъ эклиптики до 5^0 съ небольшимъ къ сѣверу и къ югу.

Узлы не остаются на одномъ и томъ же мѣстѣ: они движутся по эклиптикѣ отъ востока къ западу навстрѣчу лунѣ, и проходятъ въ годъ около $19^0\ 20',5$. Черезъ 18 лѣтъ лунные узлы, обойдя всю эклиптику, возвратятся на свои прежнія мѣста.

Движеніе луны къ востоку неравномѣрно: точка ея орбиты, въ которой луна движется всего быстрѣе, называется, какъ и у солнца, *перигеемъ*; точка, гдѣ ея движеніе наиболѣе медленно, называется *апогеемъ*. Разстояніе луны отъ земли постоянно измѣняется: въ перигеѣ она ближе всего къ землѣ, тогда ея разстояніе приблизительно въ $102^1/_2$ раза больше ея поперечника; въ апогеѣ же приблизительно въ 117 разъ.

Время обращенія луны по орбитѣ, называемое вообще *мѣсяцемъ*, бываетъ различное. Представимъ себѣ, что луна однажды пересѣкла эклиптику въ восходящемъ узлѣ какъ разъ въ точкѣ весенняго равноденствія, 8 марта, притомъ въ самый моментъ новолунія. Черезъ 27 дней 7 часовъ 43 минуты 11,5 секундъ луна, пройдя всю свою орбиту (т.-е. свой путь по зодіаку), возвратилась на то же самое мѣсто между звѣздами; это—*звѣздный* или *сидерическій мѣсяцъ*. За это время восходящій узелъ успѣлъ подвинуться навстрѣчу лунѣ на $1^1/_2$ градуса, и луна прошла его приблизительно на $2^1/_2$ часа раньше, такъ что *узловой* (или *драконическій*) мѣсяцъ, самый короткій, содержитъ только 27 дней

5 часовъ 5 минутъ 36 секундъ. Наконецъ, солнце за 27 дней передвинулось почти на 27^0 къ востоку, и лунѣ надо его догонять больше двухъ дней, чтобы опять наступило новолуніе; такимъ образомъ *синодическій* мѣсяцъ, самый длинный (отъ новолунія до новолунія), продолжается 29 дней 12 часовъ 44 минуты 4 секунды.

3. Покрытія звѣздъ луною. Затменія солнечныя и лунныя. При своемъ движеніи по небесному своду луна встрѣчаетъ звѣзды, и тогда происходитъ такъ называемое *покрытіе звѣзды* луною: звѣзда, скрывшись за восточнымъ краемъ луннаго диска, по прошествіи нѣсколькихъ минутъ появляется изъ-за его западнаго края.

Точно такъ же можетъ произойти покрытіе луною яркихъ планетъ: Марса, Юпитера, Сатурна, Венеры, Меркурія. Разница только въ томъ, что планета не гаснетъ мгновенно, какъ звѣзда, при прикосновеніи луны, а исчезаетъ постепенно, отъ нѣсколькихъ секундъ (Меркурій) до $1^1/_2$ минуты (Юпитеръ, Венера). Изъ покрытій планетъ слѣдуетъ, что *луна ближе всѣхъ планетъ къ землѣ.*

Когда луна и солнце встрѣчаются на одномъ мѣстѣ эклиптики, то происходитъ *покрытіе солнца*, называемое *солнечнымъ затменіемъ*. Если бы луна, какъ и солнце, двигалась по эклиптикѣ, то она встрѣчалась бы съ солнцемъ каждое новолуніе, и всякій разъ происходило бы солнечное затменіе. Но луна пересѣкаетъ эклиптику только два раза въ мѣсяцъ, когда проходитъ черезъ свои узлы; если въ этотъ день приходится новолуніе, то происходитъ солнечное затменіе.

Солнечныя затменія бываютъ *полныя*, *кольцеобразныя* и *частныя*. Полныя и кольцеобразныя бываютъ тогда, когда новолуніе случается въ самомъ узлѣ или очень близко къ нему. Если при этомъ луна находится въ перигеѣ или близко къ нему, то дискъ ея больше солнечнаго; тогда происходитъ *полное* затменіе, т.-е. луна закрываетъ все солнце. Если луна далеко отъ перигея, то дискъ ея меньше солнечнаго; тогда луна покрываетъ не все солнце, а только середину его, и происходитъ *кольцеобразное* затменіе.

Полное солнечное затменіе происходитъ такимъ образомъ: на *правомъ* (западномъ) краѣ солнца внезапно появляется какъ будто небольшое углубленіе, которое увеличивается вначалѣ быстро, потомъ медленнѣе; изъ солнца какъ будто вырѣзается небольшой кусокъ, ограниченный дугой круга. Вырѣзка постепенно увеличивается, захватываетъ середину солнечнаго диска; солнце принимаетъ видъ серпа, обращеннаго рогами къ западу (вправо). Съ каждой минутой серпъ дѣлается все тоньше; небо темнѣетъ;

наступаютъ сумерки. Затѣмъ серпъ солнца дѣлается узкимъ, какъ нитка, и, наконецъ, исчезаетъ совсѣмъ. Наступаетъ ночь; температура воздуха замѣтно понижается; лѣтомъ на травѣ появляется нерѣдко роса. На небѣ зажигаются звѣзды 1-й и 2-й величины; на мѣстѣ исчезнувшаго солнца ясно виденъ темный дискъ луны, окруженный вѣнцомъ серебристо-бѣлыхъ лучей; этотъ вѣнецъ называется *солнечной короной*; ее можно видѣть только во время полныхъ затменій.

Черезъ 2 — 3 минуты (иногда черезъ нѣсколько секундъ) на правой сторонѣ луннаго диска появляется узкій серпъ солнца, онъ становится все шире, превращается въ дискъ съ выемкой на лѣвомъ (восточномъ) краю; наконецъ, и эта выемка исчезаетъ, и солнце сіяетъ опять, какъ до затменія. Весь ходъ затменія, отъ перваго прикосновенія луны до послѣдняго, длится обыкновенно отъ $2^1/_2$ до $3^1/_2$ часовъ (самое долгое затменіе, и притомъ только на земномъ экваторѣ, можетъ длиться до $4^1/_2$ часовъ), при чемъ полная фаза продолжается не болѣе 8 минутъ, чаще всего отъ 2 до 4.

Рис. 10. Солнечное затменіе. (Изъ книги Стратонова Солнце).

Кольцеобразное затменіе (рис. 10) происходитъ вначалѣ совершенно такъ же, какъ и полное; но когда остается узкій серпъ солнца, то онъ не исчезаетъ вполнѣ; рога его начинаютъ удлиняться и, наконецъ, соединяются по правую сторону луннаго диска; получается блестящій узкій (не шире $1^1{}'_2$ минуты) ободокъ солнца въ видѣ кольца вокругъ чернаго диска луны. Правая сторона этого кольца постепенно расширяется, лѣвая сужнвается и, наконецъ, разрывается посреднѣ; получается серпъ рогами влѣво. Дальше все идетъ въ томъ же порядкѣ, какъ и при полномъ затменіи. Темнота при кольцеобразномъ затменіи бываетъ тоже довольно сильная, но ни звѣздъ, ни солнечной короны видно не бываетъ.

При частномъ затменіи закрывается не все солнце, а лишь верхняя (сѣверная) или нижняя (южная) его часть.

Какъ всякое непрозрачное тѣло, освѣщенное солнцемъ, луна отбрасываетъ отъ себя *тѣнь* и *полутѣнь* (см. рис. 11). *Тѣнью* мы

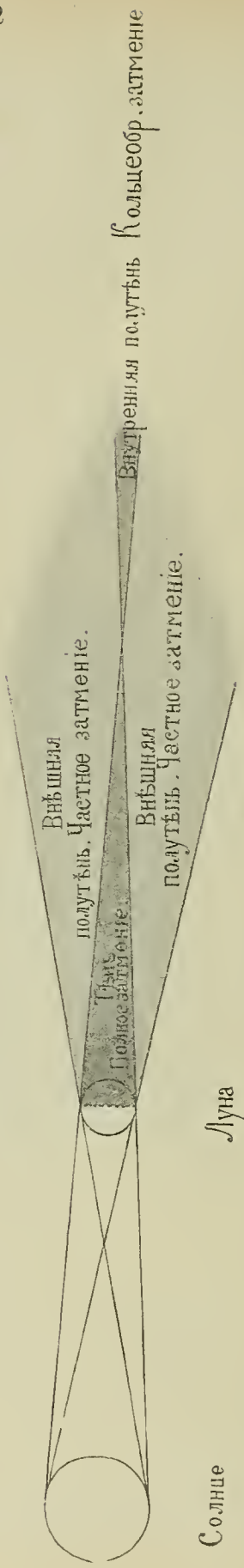


Рис. 11.

называемъ мѣсто, гдѣ солнца вовсе не видно, *полутѣнью* — мѣсто, гдѣ видна часть солнца, а часть закрыта луною. И та и другая, конечно, имѣютъ круглое очертаніе. Тѣнь суживается постепенно по мѣрѣ удаленія отъ луны въ формѣ конуса. Закончившись острой вершиной, этотъ конусъ вновь расширяется въ подобный же конусъ *внутренней полутѣни* (такъ мы называемъ мѣсто, гдѣ видно кольцеобразное затменіе). Обѣ онѣ, тѣнь и внутренняя полутѣнь, окружены, какъ футляромъ, расширяющимся конусомъ *внѣшней полутѣни*, внутри которой видно частное затменіе (рис. 11).

При новолуніи луна проходитъ между солнцемъ и землею; тѣнь и полутѣнь падаютъ по направленію къ землѣ. Если луна находится въ узлѣ, то она какъ разъ помѣщается на линіи, соединяющей солнце и землю; тогда ея полутѣнь падаетъ на земную поверхность (см. рис. 12) и образуетъ на ней огромное (отъ 7.000 до 9.000 и болѣе верстъ въ поперечникѣ) пятно, круглое въ очертаніи; на мѣстахъ, покрытыхъ имъ, видно частное солнечное затменіе. Самую середину этого пятна занимаетъ небольшой кружокъ тѣни или внутренней полутѣни (поперечникъ его въ обоихъ случаяхъ не превышаетъ 300 верстъ). Если луна вблизи перигея, тѣнь ея достигаетъ земной поверхности; на мѣстахъ, которыя она покрываетъ, видно полное солнечное затменіе. Если луна находится вблизи апогея, тѣнь ея не можетъ достигнуть до земли; тогда на земную поверхность падаетъ пятно внутренней полутѣни, въ предѣлахъ котораго видно кольцеобразное затменіе.

На рис. 12 изображены: внизу — земля, вокругъ которой обходитъ луна,

а вверху—солнце. Отъ земли и луны въ противоположную отъ солнца сторону направляются расходящіеся конусы земной и лунныхъ полутѣней и сходящіеся конусы полныхъ тѣней. При движеніи луны, тѣнь ея тоже движется по землѣ съ запада на востокъ узкой полосою верстъ въ 300 шириною. Въ предѣлахъ ея видно полное затменіе. Полутѣнь, гдѣ видно частное затменіе, проходитъ къ югу и къ сѣверу отъ нея полосою приблизительно отъ 3.500 до 4.500 верстъ въ обѣ стороны. Отъ различной ширины тѣни и полутѣни зависитъ то, что частныя солнечныя затменія бываютъ видны въ каждомъ мѣстѣ на землѣ черезъ 2 — 3 года, а полное затменіе повторяется крайне рѣдко, не чаще двухъ разъ въ столѣтіе, иногда же черезъ 200, 300, 500 и болѣе лѣтъ.

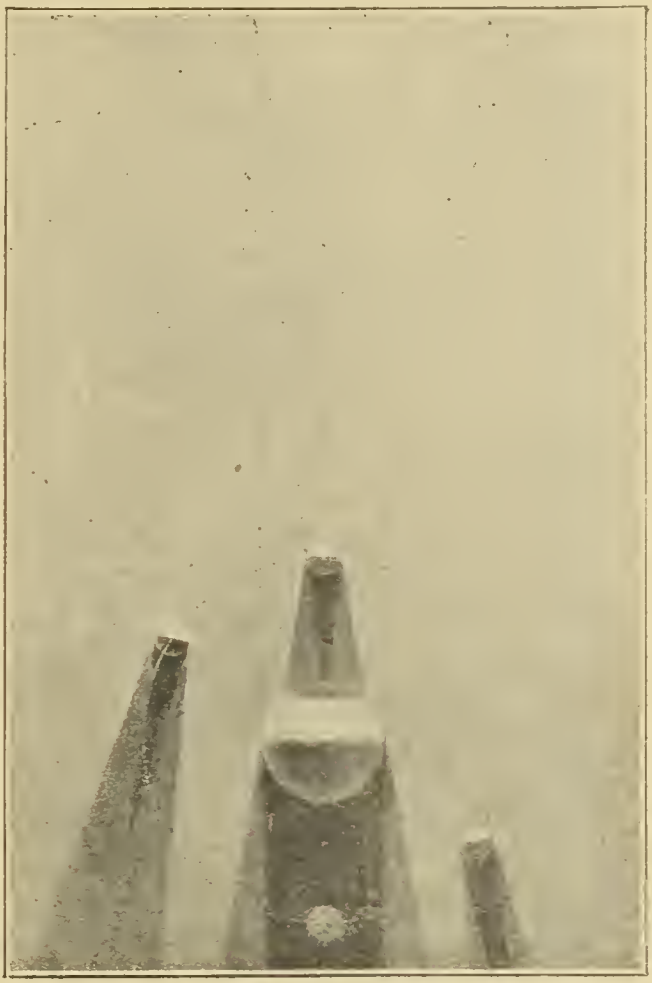


Рис. 12. Теорія затменій.
(Изъ книги Стратонова Солнце).

Когда луна бываетъ не въ самомъ узлѣ во время новолунія, тѣнь ея проходитъ иногда къ сѣверу или къ югу отъ земли, не задѣвая земной поверхности, а полутѣнь захватываетъ часть сѣвернаго или южнаго полушарія. Тогда въ этихъ, мѣстахъ бываетъ только частное затменіе.

Когда луна еще дальше отъ узла, то и полутѣнь ея проносится мимо сѣвернаго или южнаго полюса земли, не попадая на земную поверхность. Это бываетъ во всѣ новолунія, кромѣ тѣхъ, которыя близки къ узлу.

Кромѣ солнечныхъ затменій бываютъ *затменія лунныя*, полныя и частныя. Кольцеобразныхъ лунныхъ затменій не бываетъ. Лунныя затменія бываютъ только во время *полнолунія*, если при этомъ луна находится въ узлѣ или близко къ нему (не дальше 12^0).

При частномъ лунномъ затменіи только верхняя или нижняя часть луны захватывается тѣнью, а иногда одной полутѣнью.

Лунныя затменія рѣзко отличаются отъ солнечныхъ:

1. Лунное затменіе бываетъ только при полнолуніи.

2. При затменіи луна обыкновенно не исчезаетъ совсѣмъ, а только темнѣетъ.

3. Лунное затменіе видно одновременно на всей земной поверхности, гдѣ только видна сама луна.

Отсюда слѣдуетъ, что луна при затменіи ничѣмъ не заграждается отъ насъ, а на самомъ дѣлѣ теряетъ свой свѣтъ.

Откуда же берутся тѣнь и полутѣнь, затемняющія луну?

Мы знаемъ, что во время полнолунія луна находится на мѣстѣ неба, прямо противоположномъ мѣсту солнца; между ними по эклиптикѣ считается 180°, т.-е. полъ-круга. Слѣдовательно, земля помѣщается въ это время какъ разъ между солнцемъ и луной. Какъ всякое тѣло, освѣщенное солнцемъ, земной шаръ тоже долженъ бросать тѣнь и полутѣнь, и тѣнь его во время полнолунія должна падать по направленію къ лунѣ. Когда луна попадетъ въ земную полутѣнь, часть солнца будетъ отъ нея закрыта землею, и поверхность луны будетъ освѣщена слабѣе; когда она войдетъ въ земную тѣнь, все солнце будетъ закрыто землею, и поверхность луны вовсе лишится солнечнаго свѣта. Такъ и происходитъ при лунномъ затменіи.

Лунное затменіе даетъ намъ весьма важныя указанія относительно формы и величины земли:

1. *Земля шарообразна*, потому что ея тѣнь и полутѣнь всегда имѣютъ круглое очертаніе.

2. *Земля меньше солнца*, потому что тѣнь ея суживается.

3. *Земля больше луны*, потому что ея тѣнь больше луны.

Уже вавилонскіе астрономы замѣтили, что по прошествіи 18 лѣтъ и 11 дней, періода названнаго ими *саросомъ*, солнечныя и лунныя затменія начинаютъ повторяться въ прежнемъ порядкѣ. Это объясняется тѣмъ, что въ этомъ періодѣ заключается почти цѣлое число синодическихъ (223) и драконовыхъ (242) мѣсяцевъ, другими словами, если въ началѣ сароса луна была, напримѣръ, въ фазѣ новолунія и въ восходящемъ узлѣ, то по прошествіи 18 лѣтъ и $11^1/_3$ дней луна будетъ находиться въ той же фазѣ и въ томъ же узлѣ, и лунныя и солнечныя затменія начнутъ повторяться въ прежнемъ порядкѣ, но не съ полной точностью: съ теченіемъ времени въ саросѣ одни затменія исчезаютъ, а другія появляются вновь. Изложенное даетъ основаніе для предсказанія затменій солнечныхъ и лунныхъ. Напримѣръ, вычислено, что съ 1910 по 1999 г. въ Россіи будутъ видимы два полныхъ

солнечныхъ затменія: въ 1914 году 8(21) августа и въ 1954 году 17(30) іюня и одно кольцеобразное въ 1912 г. 4(17) апрѣля. Солнечныя затменія имѣютъ важное значеніе для хронологіи; если, напримѣръ, въ лѣтописи сказано, что какое-нибудь историческое событіе произошло въ извѣстной мѣстности одновременно съ полнымъ солнечнымъ затменіемъ, то, вычисливши годъ и день этого затменія, мы тѣмъ самымъ установимъ и точное время историческаго событія.

V. Измѣреніе времени. Календарь.

Въ основѣ измѣренія времени лежитъ наблюденіе надъ какимъ-нибудь періодически совершающимся явленіемъ, періодъ котораго есть величина постоянная. Явленіемъ, удовлетворяющимъ этому требованію и даннымъ намъ природой, представляется вращеніе небеснаго свода около оси міра. Періодъ времени отъ кульминаціи верхней или нижней какой-нибудь звѣзды до слѣдующей такой же кульминаціи той же звѣзды принятъ въ астрономіи за единицу времени подъ названіемъ *звѣздныхъ сутокъ*. За начало ихъ принимается моментъ верхней кульминаціи точки весенняго равноденствія. За другую единицу времени могутъ быть приняты такъ называемыя *истинныя солнечныя сутки*, т.-е. промежутокъ времени между одинаковыми кульминаціями солнца, за начало коихъ въ астрономіи принимается моментъ верхней кульминаціи центра солнца (полдень). Солнечныя сутки длиннѣе звѣздныхъ (приблизительно на 4 минуты). Въ то же время солнечныя сутки—величина непостоянная, такъ какъ солнце движется на своей орбитѣ въ перигеѣ—скорѣе, въ апогеѣ—медленнѣе) и совершаетъ свой путь не по экватору, а по эклиптикѣ, расположенной подъ угломъ къ экватору. Поэтому предполагаютъ, что по экватору движется нѣкоторое воображаемое, такъ называемое, *среднее* солнце съ постоянной скоростью равной средней изъ суточныхъ скоростей истиннаго солнца по эклиптикѣ. Промежутокъ времени отъ верхней или нижней кульминаціи средняго солнца до слѣдующей такой же кульминаціи называется *средними сутками*. Такъ какъ скорость средняго солнца по экватору — величина постоянная, то продолжительность среднихъ сутокъ также постоянна; среднія сутки длиннѣе звѣздныхъ на 3 м. 56 с. Какъ среднія, такъ и звѣздныя сутки дѣлятся на 24 часа (соотвѣтственно среднихъ или звѣздныхъ), часъ—на 60 минутъ, и минута—на 60 секундъ.

Моментъ верхней кульминаціи средняго солнца (средній полдень) въ астрономіи принимается за начало новыхъ среднихъ

сутокъ, гражданскія же сутки начинаются въ среднюю полночь (моментъ нижней кульминаціи средняго солнца). Въ средній полдень наши часы должны, слѣдовательно, указывать ровно 12 часовъ. Опредѣлить непосредственными наблюденіями моментъ кульминаціи средняго солнца мы не можемъ, такъ какъ средняго солнца въ дѣйствительности не существуетъ, но, зная движеніе истиннаго солнца по эклиптикѣ, мы можемъ составить на каждый день года разность между среднимъ и истиннымъ временемъ. Эта разность называется *уравненіемъ времени* и дается на каждый день въ астрономическихъ ежегодникахъ подъ рубрикой: «уравненіе времени», или, что то же, «среднее время въ истинный полдень». Мы можемъ опредѣлить моментъ истиннаго полудня, напримѣръ, по времени кратчайшей тѣни, а такъ какъ уравненіе времени дано, то будемъ имѣть возможность поставить наши часы по среднему времени. Другой болѣе крупной единицей является *тропическій годъ*, т.-е. промежутокъ времени отъ одного весенняго равноденствія до слѣдующаго. Тропическій годъ короче *звѣзднаго года*, т.-е. времени полнаго обращенія земли вокругъ солнца. Тропическій годъ содержитъ 365,242199 среднихъ сутокъ, (или 365 дн. 5 ч. 48 м. 46 с.), а звѣздный — 365,25636 среднихъ сутокъ.

Въ основѣ всѣхъ лѣтосчисленій лежитъ тропическій годъ. Но, какъ видимъ, онъ не содержитъ цѣлаго числа сутокъ, и потому считать начало слѣдующаго новаго года какъ разъ съ того момента, когда окончился предыдущій тропическій годъ въ гражданской жизни было бы неудобно. Дѣйствительно, предположимъ, что мы условились считать начало года 1 января съ 12 часовъ дня, тогда слѣдующій новый годъ мы должны будемъ начать 1 января въ 5 ч. 48 м. 46 с. пополудни или приблизительно въ 5 ч. 49 м., а еще слѣдующій въ 11 ч. 38 м. вечера, что, конечно, было бы крайне неудобно. Поэтому считаютъ три года подъ рядъ по 365 дней *(простые года)*, а четвертый—въ 366 дней *(високосный)*, при чемъ лишній день прибавляется къ февралю, и тогда въ февралѣ не 28 дней, а 29 дней. При этомъ счетѣ тропическій годъ въ среднемъ содержитъ 365 сутокъ и 6 часовъ. Такое лѣтосчисленіе было установлено при римскомъ императорѣ Юліи Цезарѣ въ 45-мъ году до Р. Х.

Когда въ римской имперіи было введено христіанство, Никейскій соборъ въ 325 году по Р. Х. принялъ *юліанскій календарь*. Но со времени Юлія Цезаря равноденствіе, бывшее при немъ 24 марта, передвинулось и стало 21 марта. Это случилось потому, что на самомъ дѣлѣ тропическій годъ состоитъ не изъ $365^1/_4$ сутокъ, какъ принялъ Юлій Цезарь, а изъ 365,242199, т.-е на 11 м. 14 с.

короче. За 360 лѣтъ со смерти Юлія Цезаря до Никейскаго собора накопилось лишнихъ 3 дня. Никейскій соборъ установилъ весеннее равноденствіе на 21 марта на вѣчныя времена, а длину года оставилъ въ $365^1/_4$ дней. Съ тѣхъ поръ всѣ христіанскіе народы стали считать три года по 365 дней, а четвертый, високосный, въ 366 дней.

Однако черезъ каждые 128 лѣтъ равноденствіе приходилось бы на 1 день раньше.

Въ 1582 году папа римскій, Григорій XIII, велѣлъ исправить накопившуюся ошибку и считать послѣ 4 октября прямо 15-е; такимъ образомъ выпали 10 дней въ году, и на слѣдующій годъ равноденствіе пришлось опять на 21 марта. А чтобы ошибка не накопилась опять, онъ повелѣлъ впредь изъ каждыхъ 400 лѣтъ выбрасывать 3 дня. Это лѣтосчисленіе названо *григоріанскимъ*.

Въ юліанскомъ (или старомъ) календарѣ прибавляютъ 1 день къ каждому году, который дѣлится на 4. Въ григоріанскомъ же (новомъ) не прибавляютъ дня къ тому високосному году, который дѣлится на 100, но не дѣлится на 400.—Этотъ календарь (новый стиль) приняла вся Европа, кромѣ Греціи, Россіи и южныхъ славянъ, т.-е. странъ съ православнымъ вѣроисповѣданіемъ; у нихъ остался юліанскій календарь (старый стиль). Въ 1600 году, который дѣлится на 400, въ обоихъ календаряхъ было 29 февраля, годъ былъ високосный. Въ 1700 году по юліанскому календарю было 29 февраля (годъ дѣлится на 4), а по григоріанскому не было (годъ дѣлится на 100, но не дѣлится на 400). Оба стиля разошлись на 11 дней, равноденствіе стало приходиться на 10 марта стараго стиля и 21 марта новаго стиля. Въ 1800 году оба стиля разошлись на 12 дней, равноденствіе стало на 9 (21) марта. Въ 1900 году равноденствіе пришлось на 8 (21) марта, разница получилась въ 13 дней. Эта разница будетъ существовать до 2100 года.

Григоріанскій календарь тоже не вполнѣ точенъ: онъ выбрасываетъ изъ 400 лѣтъ 3 дня, а слѣдовало бы выбрасывать 3,113. Ошибка въ 1 день накопится приблизительно въ 3350 лѣтъ.

Періодичность лунныхъ фазъ заставила многихъ древнихъ народовъ принять за единицу времени синодическій мѣсяцъ, но такое счисленіе времени оказалось крайне неудобнымъ, съ одной стороны, въ виду того, что въ синодическомъ мѣсяцѣ заключается не цѣлое число сутокъ, а съ другой—въ тропическомъ году не цѣлое число синодическихъ оборотовъ. Въ нашемъ календарѣ раздѣленіе года на 12 *мѣсяцевъ* и ведетъ свое начало отъ прежняго счисленія времени по синодическимъ мѣсяцамъ;

но нашъ теперешній *гражданскій* мѣсяцъ не равенъ синодическому, такъ какъ въ году содержится 12 синодическихъ мѣсяцевъ и 11 дней.

Наконецъ, можно замѣтить, что недѣля приблизительно представляетъ промежутокъ отъ одной фазы луны до слѣдующей.

Празднованіе пасхи. Никейскій соборъ, признавая днемъ равноденствія 21 марта, постановилъ праздновать Пасху въ первое воскресенье послѣ полнолунія, которое случится въ день равноденствія или послѣ него. Если 21 марта будетъ суббота и въ этотъ день будетъ полнолуніе, то 22 марта будетъ Пасха; это ея самый ранній срокъ. Если полнолуніе пришлось 20 марта, то слѣдующее наступитъ 19 апрѣля; если 19 апрѣля придется въ воскресенье, то праздновать пасху должно черезъ недѣлю, т.-е. 25 апрѣля, это ея самый поздній срокъ. Такія правила были установлены для того, чтобы христіанская Пасха не совпала съ еврейскою, которая празднуется *въ самое полнолуніе* послѣ весенняго равноденствія.

Въ настоящее время католическая Церковь и всѣ протестантскія празднуютъ Пасху послѣ весенняго равноденствія, которое по григоріанскому календарю бываетъ 21 марта, а по нашему—8 марта. Православная же Церковь празднуетъ Пасху *послѣ 21 марта* своего юліанскаго календаря. Такъ какъ евреи празднуютъ свою Пасху послѣ весенняго равноденствія, которое бываетъ 8 (21) марта, то ихъ Пасха можетъ совпасть съ католической, но не съ православной. Гауссъ далъ слѣдующее простое правило для вычисленія Пасхи по юліанскому календарю: число года надо раздѣлить на 19, на 4 и на 7 и полученные остатки означить буквами a, b, c, затѣмъ дѣлятъ $19\,a+15$ на 30 и означаютъ остатокъ черезъ d. Наконецъ, составляютъ сумму $2\,b+4\,c+6\,d+6$ и дѣлятъ ее на 7; остатокъ пусть будетъ e. Тогда Пасха будетъ (22-го $+\,d+e$) марта или, если сумма больше 31, то ($d+e-9$) апрѣля.

VI. Движеніе планетъ.

1. Видимыя движенія планетъ. Системы древнихъ. Коперникъ. Кромѣ неподвижныхъ звѣздъ, солнца и луны, среди созвѣздій зодіака иногда бываютъ видимы яркія свѣтила, уже по внѣшнему виду отличающіяся отъ неподвижныхъ звѣздъ: они не мерцаютъ, но свѣтятъ ровнымъ и спокойнымъ свѣтомъ. Не занимая постояннаго положенія и оставаясь вблизи эклиптики, они медленно переходятъ изъ одного зодіакальнаго созвѣздія въ другое, совершая видимое движеніе крайне неправильно и запутанно. Двигаясь большею частью *прямымъ движеніемъ* (съ запада

на востокъ), эти свѣтила иногда останавливаются (стояніе), мѣняютъ движеніе съ востока на западъ (движеніе обратное), потомъ опять останавливаются (стояніе) и движутся снова прямымъ движеніемъ, описывая петли и зигзаги, почему уже древніе назвали ихъ «*планетами*», т.-е. блуждающими. Древніе насчитывали семь планетъ: Меркурій, Венера, Марсъ, Юпитеръ, Сатурнъ. Къ планетамъ же они причисляли солнце и луну. Меркурій и Венера находятся всегда вблизи солнца и потому бываютъ видимы или на западной сторонѣ сейчасъ же послѣ заката солнца или на восточной—передъ его восходомъ. Меркурій отходитъ отъ солнца къ западу или къ востоку не болѣе 23° по долготѣ, а Венера—на 46°—48°. Когда Венера находится къ западу отъ солнца, она восходитъ передъ его восходомъ и тогда называется *утренней* звѣздою, а находясь къ востоку, она заходитъ послѣ заката солнца и тогда называется *вечерней звѣздой*. Меркурій и Венера никогда не бываютъ на сторонѣ неба, противоположной солнцу, т.-е. никогда не кульминируютъ въ полночь, изъ чего можно заключить, что они ближе къ солнцу, чѣмъ земля; они называются *нижними планетами*. *Верхнія планеты:* Марсъ, Юпитеръ и Сатурнъ отходятъ отъ солнца на любой уголъ и могутъ кульминировать въ полночь; отсюда заключаемъ, что онѣ дальше отъ солнца, чѣмъ земля. Кромѣ указанныхъ трехъ верхнихъ планетъ, въ настоящее время извѣстны еще двѣ планеты: Ураиъ и Нептунъ и нѣсколько сотъ такъ называемыхъ *малыхъ*, которыя видимы лишь въ телескопы. Когда планета бываетъ близко отъ солнца, тогда говорятъ, что она находится въ соединеніи съ солнцемъ. Нижнія планеты бываютъ въ верхнемъ и въ *нижнемъ соединеніи*, въ первомъ случаѣ видимый въ телескопъ діаметръ планеты достигаетъ наименьшей величины, во второмъ—наибольшей. Венера и Меркурій имѣютъ фазы, подобныя луннымъ: въ верхнемъ соединеніи они представляются намъ въ видѣ полнаго круга, при наибольшемъ западномъ или восточномъ удаленіи отъ солнца — въ видѣ четверти; во время нижняго соединенія—въ видѣ очень узкаго серпа. Въ это время они иногда проходятъ по солнечному диску въ видѣ темнаго кружка. Изъ всего этого заключаемъ, что во время верхняго соединенія нижнія планеты находятся по ту сторону солнца, а во время нижняго—между солнцемъ и землею. Верхнія планеты въ нижнемъ соединеніи не бываютъ, когда же верхняя планета находится на сторонѣ неба, противоположной солнцу, тогда говорятъ, что планета находится въ *оппозиціи* или *противостояніи съ солнцемъ*. Иногда планеты закрываютъ отъ насъ звѣзды — происходитъ *покрытіе* звѣзды планетою, изъ чего уже древніе заключили, что планеты ближе

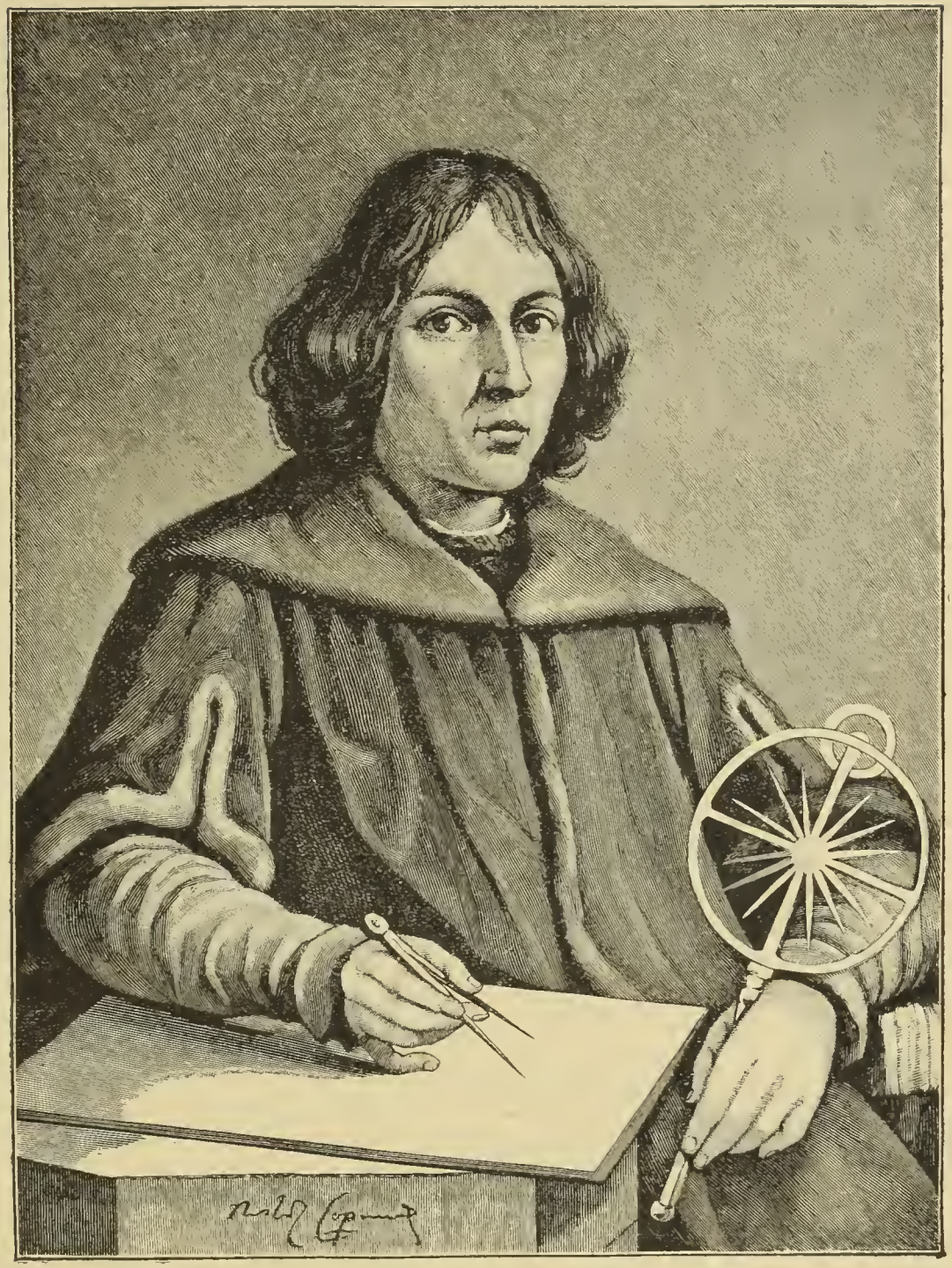
къ намъ, чѣмъ неподвижныя звѣзды. Верхнія планеты имѣютъ также фазы, но мало замѣтныя. Отсюда заключаемъ, что планеты суть тѣла темныя, свѣтящія отраженнымъ солнечнымъ свѣтомъ. Промежутокъ времени между двумя соединеніями или оппозиціями называется синодическимъ оборотомъ. Величины этихъ промежутковъ (см. таблица IX, въ концѣ книги) съ большой точностью были извѣстны уже древнимъ.

Различныя объясненія сложныхъ планетныхъ движеній предлагались уже въ древности, но наибольшее распространеніе получила теорія («система міра») Птоломея (140 лѣтъ послѣ Р. Х.), извѣстная подъ именемъ *Альмагеста*. Онъ предполагалъ, «что планеты движутся съ извѣстными скоростями по кругамъ, называемымъ *эпициклами*; центры этихъ круговъ, также съ надлежащимъ образомъ подобранною скоростью, движутся въ свою очередь по кругамъ, называемымъ *деферентами*, въ центрѣ же этихъ деферентовъ, т.-е. въ центрѣ міра, находится наша земля. Эта система получила большое распространеніе и по ней учились всѣ астрономы вплоть до XVI столѣтія, пока, наконецъ, Коперникъ (1473—1543) не показалъ, что всѣ запутанныя планетныя движенія могутъ быть очень просто объяснены, если принять, что планеты обращаются вокругъ солнца, вокругъ него же обращается и наша земля, которая является лишь одной изъ планетъ.

Несмотря на простоту системы Коперника и полную возможность объясненія посредствомъ ея всѣхъ сложныхъ планетныхъ движеній, у нея оказалось много противниковъ. Даже знаменитый астрономъ Тихо Браге (1546—1601), сдѣлавшій много важныхъ и очень точныхъ, для своего времени, наблюденій, утверждалъ, что земля неподвижна и находится въ центрѣ вселенной, а солнце, планеты и весь небесный сводъ обращаются вокругъ нея. Но несостоятельность подобныхъ воззрѣній и полная справедливость теоріи Коперника скоро были доказаны наблюденіями Галилея[1]) и работами ученика Тихо Браге, Іоанна Кеплера.

2. Тихо Браге. Галилей. Кеплеръ. Противники Коперника указывали, между прочимъ, что если бы планеты были устроены подобно лунѣ и землѣ и не имѣли бы собственнаго свѣта, то мы должны были бы видѣть ихъ фазы, когда онѣ (особенно Меркурій и Венера) поворачиваются къ землѣ неосвѣщенной стороной. Галилею удалось вставивъ въ одинъ конецъ трубки большое выпуклое, а въ другой — маленькое вогнутое стекло, получить зрительную трубу: если смотрѣть въ вогнутое стекло, обра-

[1]) Портретъ Галилея находится при стр. 230.



Коперникъ.

тивъ выпуклое къ отдаленному предмету, то этотъ предметъ кажется сильно увеличеннымъ и какъ бы приблизившимся.

Въ 1610 г. по Р. Х. зрительная труба была впервые направлена на небо. Галилей немедленно увидѣлъ то, о чемъ мечтали сторонники Коперника: Венера около времени своей наибольшей яркости имѣла видъ узкаго серпа, подобнаго молодой лунѣ. Галилей не рѣшался обнародовать свое открытіе, пока не прослѣдилъ всего обращенія Венеры и не убѣдился, что около верхняго соединенія Венера имѣетъ видъ очень маленькаго диска, подобнаго полной лунѣ, въ наибольшемъ удаленіи отъ солнца она имѣетъ видъ луны въ первой четверти, потомъ принимаетъ видъ серпа, у котораго ширина быстро уменьшается, а длина увеличивается (см. рис. 13). Послѣ нижняго соединенія тѣ же фазы повторяются въ обратномъ порядкѣ. Отсюда становится совершенно несомнѣннымъ:

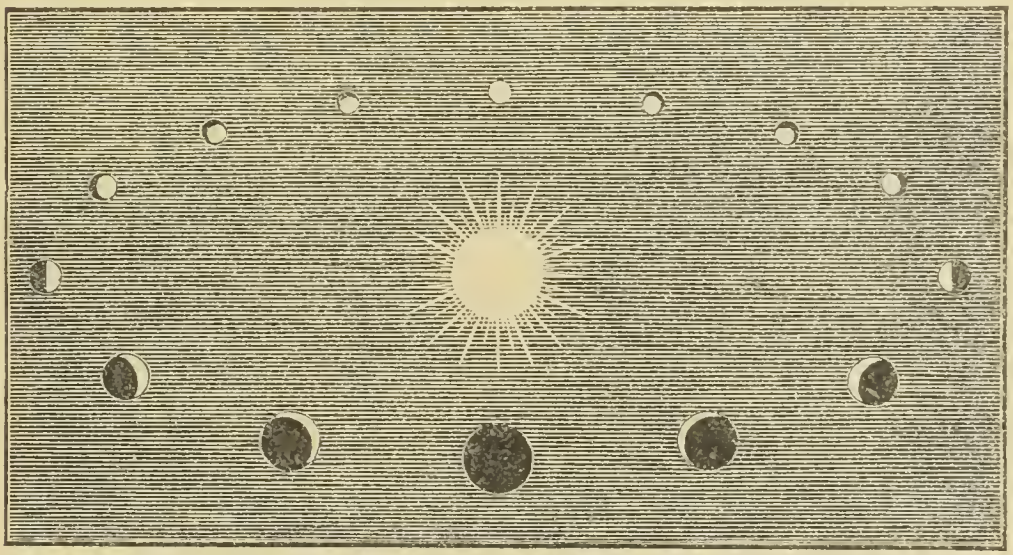


Рис. 13. Фазы Венеры.

1. Венера—темное шарообразное тѣло, обращающееся вокругъ солнца.

2. При нижнемъ соединеніи Венера проходитъ между землею и солнцемъ, при верхнемъ—позади солнца.

Тѣ же самыя фазы имѣетъ и Меркурій, но размѣры его диска всегда меньше, чѣмъ у Венеры.

Открытія Галилея совершенно уничтожили всякія возраженія противъ системы Коперника: было доказано съ полной несомнѣнностью, что планеты—такія же темныя шарообразныя тѣла, какъ земля и луна, освѣщаемыя солнцемъ.

Кеплеръ много лѣтъ тщательно изслѣдовалъ всѣ наблюденія Тихо Браге. Прослѣдивъ по нимъ движеніе Марса вокругъ солнца, онъ убѣдился, что Марсъ не можетъ двигаться по кругу: какой бы величины ни былъ кругъ, на какомъ бы разстояніи отъ солнца ни помѣщался центръ этого круга,—все таки положенія Марса по наблюденіямъ отличались отъ тѣхъ, которыя получались по вычисленію. Послѣ долгихъ попытокъ Кеплеръ пришелъ къ выводу:

Планеты движутся вокругъ солнца не по кругамъ, а по какимъ-то другимъ линіямъ.

Больше всѣхъ линій къ кругу подходитъ *эллипсъ* (см. рис. 14).

Кеплеръ попробовалъ вычислить, въ какихъ точкахъ неба былъ бы виденъ Марсъ, если бы онъ двигался по эллипсу, близкому къ кругу и если бы солнце находилось въ центрѣ этого эллипса; но вычисленія дали иныя положенія, чѣмъ наблюденія Тихо Браге. Тогда Кеплеръ попробовалъ вычислить положенія Марса, въ томъ предположеніи, что онъ движется по эллипсу, при чемъ солнце находится не въ центрѣ, а въ одномъ изъ фокусовъ (см. стр. 132). Онъ началъ вычислять положенія Марса, начиная съ перигелія, т.-е. съ положенія, наиболѣе близкаго къ солнцу, и сравнивать съ наблюденіями; и оказалось, послѣ длиннаго ряда вычисленій, что Тихо Браге наблюдалъ Марса какъ разъ въ такихъ же положеніяхъ, въ какихъ онъ долженъ быть по вычисленію. Кеплеръ прослѣдилъ и всѣ прочія планеты, всѣ оказались движущимися по эллипсамъ, но у однѣхъ, какъ у Венеры, эллипсъ очень похожъ на кругъ, у другихъ, напримѣръ, у Меркурія, онъ замѣтно вытянутъ. Разстояніе фокуса отъ центра у Меркурія составляетъ $^1/_5$ часть половины большой оси. Эта дробь называется *эксцентриситетомъ*; по эксцентриситету мы узнаемъ, насколько эллипсъ отличается отъ круга.

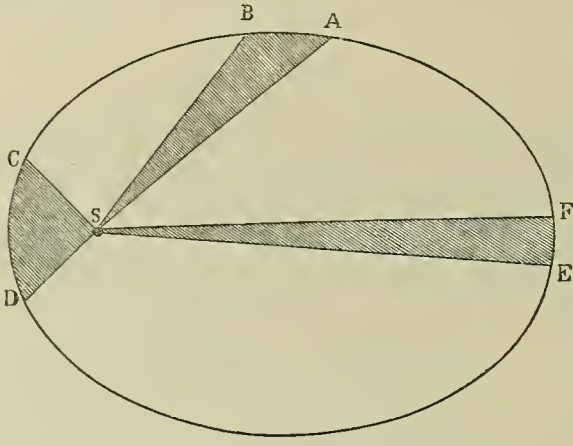


Рис. 14.

Убѣдившись, что планеты движутся по эллипсамъ, Кеплеръ сталъ изслѣдовать, какъ мѣняется скорость этого движенія въ различныхъ частяхъ орбиты. Вблизи перигелія разстояніе планеты отъ солнца меньше, но движеніе ея быстрѣе: она проходитъ въ сутки бо̀льшую дугу, чѣмъ вблизи афелія (т.-е.

Кеплеръ.

положенія, наиболѣе удаленнаго отъ солнца). Послѣ долгихъ усилій Кеплеръ замѣтилъ, что «радіусъ-векторъ (т.-е. линія, соединяющая планету съ солнцемъ) въ равныя времена описываетъ равныя площади».—Это второй законъ Кеплера.

На рис. 14-омъ планета вблизи афелія проходитъ въ сутки отъ *E* до *F*, слѣдовательно, линія, соединяющая ее съ солнцемъ, *S*, проходитъ длинную и узкую площадь *SEF*. Вблизи перигелія планета въ сутки пройдетъ отъ *C* до *D*, слѣдовательно, ея радіусъ-векторъ пройдетъ площадь *SCD*, эта площадь, короткая, но широкая, въ точности равна по величинѣ площадямъ *SEF* и *SAB*.

Убѣдившись въ этомъ, Кеплеръ сталъ добиваться, какой законъ существуетъ между скоростями движенія различныхъ планетъ и ихъ разстояніями отъ солнца. Онъ нѣсколько лѣтъ изучалъ движенія Марса и Юпитера, чтобы уловить, какое отношеніе существуетъ между ихъ обращеніями; послѣ многихъ неудачъ и ошибокъ онъ, наконецъ, убѣдился, что время обращенія Юпитера, возведенное въ квадратъ (т.-е. помноженное само на себя), во столько же разъ больше времени обращенія Марса, возведеннаго въ квадратъ, во сколько разъ разстояніе Юпитера, возведенное въ кубъ (т.-е. помноженное дважды само на себя), больше разстоянія Марса, возведеннаго въ кубъ.

Кеплеръ провѣрилъ этотъ законъ на другихъ планетахъ и убѣдился, что онъ вѣренъ для всѣхъ. Тогда онъ обнародовалъ свою книгу, въ которой изложилъ и доказалъ три главныхъ закона планетныхъ движеній:

1. Всѣ планеты движутся вокругъ солнца по эллипсамъ, въ фокусѣ которыхъ находится солнце.

2. Радіусъ-векторъ, соединяющій планету съ солнцемъ, въ равныя времена проходитъ равныя площади.

3. Квадраты временъ обращенія планетъ относятся, какъ кубы ихъ среднихъ разстояній отъ солнца.

3. Ньютонъ. Всемірное тяготѣніе. Лѣтъ черезъ 60 послѣ Кеплера (около 1666 г.) одинъ изъ величайшихъ математиковъ и астрономовъ, англичанинъ Исаакъ Ньютонъ [1]), далъ полное объясненіе тѣхъ законовъ, которые управляютъ движеніемъ планетъ. Онъ высказалъ предположеніе, которое теперь называется закономъ всемірнаго тяготѣнія и состоитъ въ слѣдующемъ: *всякія два тѣла притягиваются другъ къ другу, и это притяженіе прямо пропорціонально произведенію ихъ массъ и обратно пропорціонально квадратамъ разстояній между ними.* Это значитъ, что

[1]) Портретъ Ньютона находится при стр. 152.

если бы мы взяли, напримѣръ, два шара, съ массою вѣсомъ (см. стр. 230) въ 5 пудовъ и 3 пуда, и помѣстили бы ихъ гдѣ-нибудь вдали отъ всякихъ другихъ тѣлъ на разстояніи между центрами, положимъ, 10 саженъ, то между ними обнаружилось бы нѣкоторое притяженіе; далѣе, если бы мы увеличили разстояніе между ними въ 3 раза, т.-е. поставили бы ихъ на 30 саженъ другъ отъ друга, то притяженіе уменьшилось бы въ 3×3, т.-е. въ 9 разъ; если бы разстояніе увеличилось въ 5 разъ, то притяженіе уменьшилось бы въ 5×5, т.-е. въ 25 разъ. Наоборотъ, если бы разстояніе уменьшилось, напримѣръ, въ 2 раза, то притяженіе между шарами увеличилось бы въ 2×2, т.-е. въ 4 раза и т. д., а если бы мы, оставивши то же разстояніе, т.-е. 10 саженъ, взяли бы шары съ большей массою, напримѣръ, одинъ въ 20 пудовъ, а другой въ 18 пудовъ, т.-е. въ 4 и 6 разъ больше, то притяженіе увеличилось бы въ 4×6, или 24 раза. Этому закону подчиняются всѣ тѣла, какъ на поверхности земли, такъ и въ небесномъ пространствѣ. Всѣ тѣла на поверхности земли стремятся падать на землю, потому что притягиваются къ ея центру и тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше ихъ масса, напримѣръ, пудовая гиря притягивается въ 40 разъ сильнѣе, чѣмъ фунтовая. Если бы мы какое-нибудь тѣло удалили отъ поверхности земли на 6.000 верстъ, т.-е. увеличили бы разстояніе его отъ центра земли вдвое противъ прежняго, то тѣло будетъ стремиться падать на землю съ силою въ 4 раза меньшею. Теперь является вопросъ, почему же небесныя тѣла, напримѣръ, планеты и солнце, земля и луна, будучи взаимно притягиваемы, не падаютъ другъ на друга, а кружатся одно около другого? Для объясненія этого вообразимъ, что надъ поверхностью земного шара, напримѣръ, въ точкѣ A (рис. 15) находится камень, который мы бросимъ по горизонтальному направленію съ нѣкоторой скоростью. Земля, притягивая камень, не позволяетъ ему двигаться по горизонтальному направленію, а отклоняетъ его внизъ, и онъ упадетъ на нѣкоторомъ разстояніи, описавши кривую линію AB. Если мы тотъ же камень бросимъ съ большею скоростью, то онъ пролетитъ дальше и опишетъ кривую AC. Бросимъ еще сильнѣе — онъ полетитъ по линіи AD и упадетъ еще дальше.

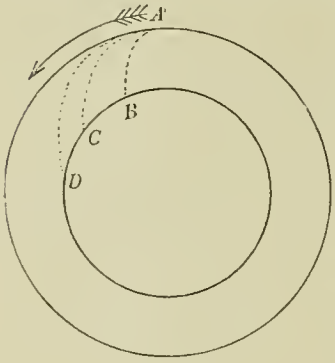


Рис.15

Можно представить себѣ такую скорость первоначальнаго движенія, при которой камень уже совсѣмъ не упадетъ на землю; земля будетъ какъ бы уходить изъ-подъ него, и онъ черезъ нѣ-

которое время, описавъ вокругъ земли окружность, возвратится въ первоначальное положеніе A, но не остановится, а будетъ продолжать свое движеніе и будетъ вѣчно кружиться около земли. Вычислили, что для того, чтобы это произошло, нужно камню сообщить первоначальную скорость около $7^1/_2$ верстъ въ секунду, т.-е. во много больше скорости пушечнаго ядра, предполагая притомъ, что на землѣ не было бы воздуха, который сильно препятствуетъ движенію. Такимъ образомъ движеніе луны около земли можно представить себѣ какъ бы постояннымъ паденіемъ луны на землю подъ вліяніемъ притяженія, но паденіемъ не осуществляемымъ на самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе когда-то полученной луною первоначальной скорости, удаляющей ее отъ земли. Точно такъ же земля и планеты движутся вокругъ солнца подъ вліяніемъ двухъ причинъ: силы тяготѣнія, приближающей ихъ къ солицу, и первоначальной скорости, стремящейся удалить ихъ отъ солнца. Ньютонъ доказалъ, что всѣ тѣла, притягиваемыя солнцемъ, должны двигаться около него, въ зависимости отъ величины первоначальной скорости, или по кругу, или по эллипсу, или по параболѣ, или по гиперболѣ (см. стр. 132—137), что на самомъ дѣлѣ и наблюдается. Чтобы понять, что такое парабола, вообразимъ эллипсъ; оставляя разстояніе одного изъ фокусовъ отъ вершины эллипса неизмѣннымъ, заставимъ другой фокусъ удаляться все дальше и дальше. Эллипсъ станетъ растягиваться, и если, наконецъ, фокусъ удалится на безконечное разстояніе, то эллипсъ превратится въ кривую, имѣющую только одинъ фокусъ и состоящую изъ двухъ постепенно расходящихся вѣтвей. Кривая линія съ болѣе расходящимися вѣтвями, чѣмъ парабола, называется гиперболой (см. рис. 16). Изъ закона всемірнаго тяго-

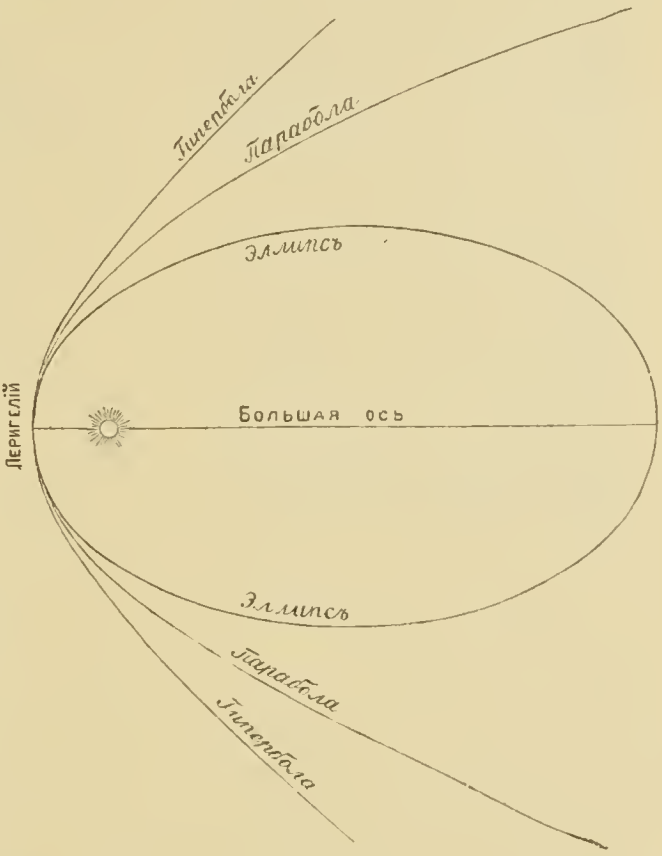


Рис. 16.

тѣнія выводятся, какъ слѣдствія, математическимъ путемъ три закона Кеплера, полученные имъ изъ наблюденій надъ движеніями планетъ. По закону тяготѣнія планеты должны оказывать притяженіе также другъ на друга, отчего происходятъ нѣкоторыя неправильности въ ихъ движеніи около солнца, такъ называемыя *возмущенія*, но въ виду незначительности ихъ массъ, въ сравненіи съ массою солнца, эти неправильности не нарушаютъ устойчивости и стройности планетной системы.

VII. Телескопы и обсерваторіи.

Астрономическія трубы, или телескопы бываютъ двухъ типовъ: *рефракторы* и *рефлекторы*. Первые состоятъ въ простѣйшемъ случаѣ изъ двухъ двояко-выпуклыхъ стеколъ (линзъ), — большого, называемаго *объективомъ* и обращеннаго къ разсматриваемому предмету, и малаго, *окуляра*, въ который смотритъ наблюдатель. Объективъ даетъ дѣйствительное, уменьшенное и обратное, но болѣе яркое и очень близкое къ наблюдателю изображеніе предмета, которое разсматривается потомъ черезъ окуляръ, какъ черезъ лупу. Въ рефлекторахъ же объективъ замѣненъ параболически-вогнутымъ зеркаломъ, которое отражаетъ лучи отъ источника свѣта и имѣетъ то же назначеніе, что и объективъ; окуляръ такой же, какъ и у рефракторовъ, но помѣщается по большей части или сбоку или впереди трубы, такъ что наблюдатель стоитъ или бокомъ или спиною къ разсматриваемому предмету. Увеличеніемъ трубы называется отношеніе угла, подъ которымъ мы видимъ предметъ черезъ телескопъ, къ углу, подъ которымъ мы видимъ тотъ же предметъ безъ телескопа: увеличеніе зависитъ отъ объектива и отъ окуляра. При одномъ и томъ же объективѣ всегда имѣется нѣсколько окуляровъ съ различными увеличеніями; но для каждаго объектива существуетъ предѣлъ увеличенія, выше котораго нельзя переходить, иначе изображенія становятся очень неясными. Всѣ планеты представляются въ телескопъ въ видѣ кружковъ или дисковъ, на которыхъ можно видѣть различной формы пятна и полосы; неподвижныя же звѣзды и въ телескопѣ остаются свѣтлыми точками, такъ эти громадныя солнца далеки отъ насъ! Но зато въ телескопы мы видимъ во много разъ больше звѣздъ, благодаря указаннымъ выше собирательнымъ свойствамъ объектива.

Телескопы предназначаются, во-первыхъ для разсматриванія небесныхъ свѣтилъ, а во-вторыхъ, для опредѣленія ихъ положеній на небесномъ сводѣ, чѣмъ и обусловливается та или другая ихъ конструкція. Большіе приборы, которые могутъ быть

направлены на любую точку небеснаго свода, называются *экваторіалами*. Экваторіалъ (рис. 17) состоитъ изъ астрономической трубы 00', вращающейся вокругъ оси *AB*, называемой *осью склоненій*. Эта ось, въ свою очередь, вращается вокругъ оси *CД (часовой оси)*, перпендикулярной къ *AB* и параллельной оси міра. При вращеніи трубы вокругъ оси *AB*, она описываетъ плоскость, перпендикулярную плоскости экватора, т.-е. плоскость какого-нибудь круга склоненія; склоненіе при этомъ отсчитывается на кругѣ *EF* помощью указателя или ноніуса *q*. На концѣ же *C* оси *CД* прикрѣпленъ другой

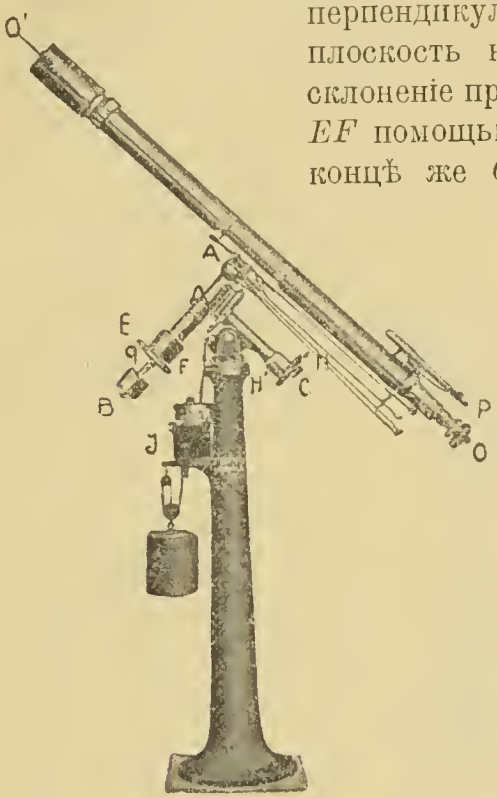


Рис. 17. Экваторіалъ.

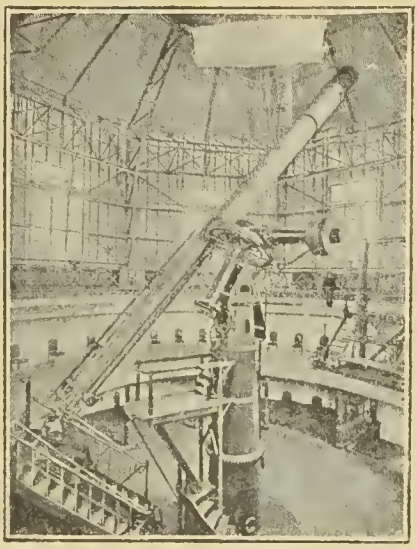


Рис. 18. 30-дюйм. рефракторъ Пулковской обсерваторіи.

раздѣленный кругъ *HH'*, параллельный экватору. Изъ отсчетовъ этого круга можно получить прямое восхожденіе свѣтила. Чтобы удерживать свѣтило въ полѣ зрѣнія, телескопъ помощью часового механизма *J* заставляютъ вращаться отъ востока къ западу вокругъ часовой оси со скоростью суточнаго вращенія небеснаго свода; такая установка экваторіала называется *параллактической*.

Самые громадные рефракторы въ настоящее время находятся въ Америкѣ на обсерваторіи Іеркеса въ Чикаго (поперечникъ объектива 40 дюймовъ) и на обсерваторіи Лика въ Калифорніи (діаметръ объектива 36 дюймовъ); но и въ другихъ странахъ много рефракторовъ, мало уступающихъ имъ по величинѣ. Всѣ они — экваторіалы, снабжены часовымъ механизмомъ, всѣ установлены въ огромныхъ башняхъ внутри вращающагося купола. Рисунокъ 18-ый изображаетъ самый большой рефракторъ въ

Россіи въ Пулковской обсерваторіи, вблизи Петербурга (діаметръ отверстія 30 дюймовъ).

Главная часть каждаго телескопа — его объективъ; труднѣе и дороже всего сдѣлать и отшлифовать какъ хорошее большое стекло, такъ и большое зеркало. Объективъ большого Пулковскаго рефрактора стоитъ около 100.000 рублей.

Кромѣ хорошаго изображенія и значительнаго увеличенія, современныя большія трубы даютъ возможность увеличивать луну и планеты до 1.000 разъ.

Кромѣ экваторіаловъ зрительныя трубы употребляются и для другихъ измѣрительныхъ инструментовъ, но здѣсь уже не дѣлаютъ такихъ большихъ объективовъ и такихъ длинныхъ трубъ.

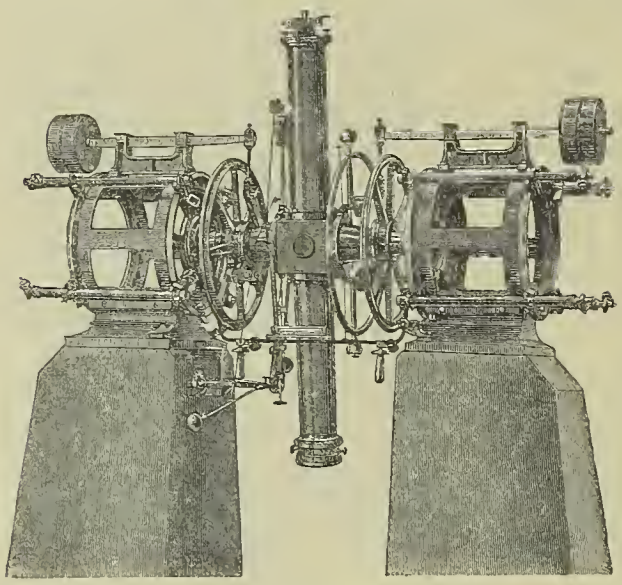


Рис. 19. Меридіанный кругъ.

Самый важный по точности измѣрительный инструментъ *меридіанный кругъ* (рис. 19). Это довольно большой инструметъ; подобно большимъ экваторіаламъ онъ устанавливается неподвижно на опредѣленномъ мѣстѣ, труба его насажена на горизонтальную ось, направленную съ востока на западъ; концы оси лежатъ на двухъ каменныхъ устояхъ, фундаментъ которыхъ во избѣжаніе сотрясеній уходитъ глубоко въ землю. Сбоку трубы помѣщенъ очень точно раздѣленный кругъ. Труба можетъ поворачиваться только вверхъ и внизъ отъ зенита къ точкѣ юга и къ точкѣ сѣвера, но ни на волосъ не можетъ повернуться ни вправо, ни влѣво. Наблюдая въ трубу какую-нибудь звѣзду, проходящую меридіанъ, мы на раздѣленномъ кругѣ получаемъ ея высоту, а вычитая отсюда высоту экватора (высота экватора получится, если вычесть высоту полюса изъ 90^0), получаемъ склоненіе свѣтила. Наблюдая по точнымъ часамъ моментъ, когда свѣтило проходитъ черезъ среднюю изъ паутиновыхъ нитей, натянутыхъ въ фокусѣ окуляра, получаемъ точное время прохожденія свѣтила черезъ меридіанъ; а вычитая отсюда время, когда проходила меридіанъ точка весенняго равноденствія, получимъ прямое вос-

хожденіе звѣзды. Меридіанный кругъ даетъ самыя точныя опредѣленія положенія свѣтилъ.

Для измѣренія высоты и азимута свѣтилъ употребляется инструментъ, называемый *теодолитомъ*, *универсальнымъ инструментомъ* (рис. 20), или *альтазимутомъ*. Онъ состоитъ изъ небольшой трубы *f*, вращающейся вокругъ горизонтальной оси *h*, на которую насаженъ вертикальный кругъ *k*. При вращеніи трубы вверхъ и внизъ, кругъ движется мимо указателя или микроскопа *m*, который и даетъ въ градусахъ высоту. Труба и вертикальный кругъ вмѣстѣ съ своей общей горизонтальной осью вращаются вокругъ вертикальной оси *r*, снабженной внизу горизонтальнымъ кругомъ *k'*. При поворачиваніи трубы вправо или влѣво указатель или микроскопы *m* и *m'*, двигающіеся по этому кругу, указываютъ, на сколько градусовъ повернулась труба по азимуту.

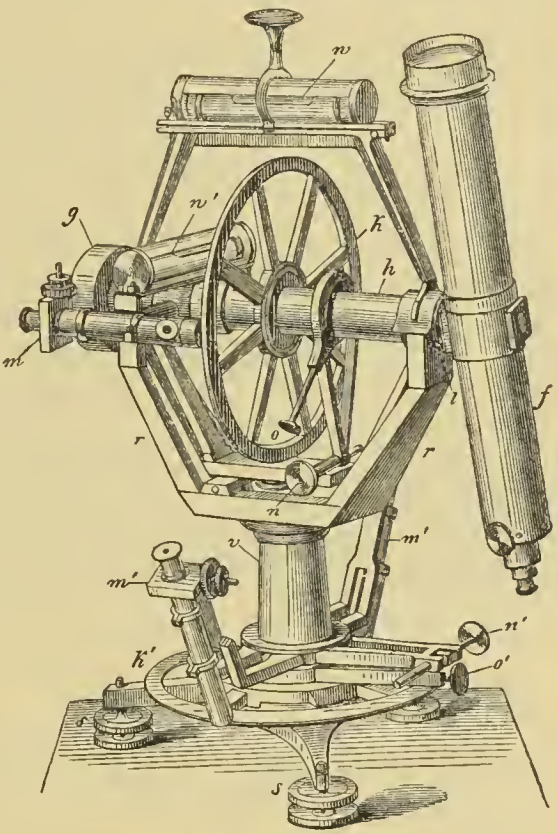


Рис. 20. Универсальный инструментъ.

Привинчивая вмѣсто окуляра спектроскопъ, мы можемъ получать спектры различныхъ небесныхъ свѣтилъ (см. таблицу I), по которымъ, какъ извѣстно изъ физики, опредѣляется химическій составъ этихъ свѣтилъ (см. отдѣлъ физики); а поставивши чувствительную фотографическую пластинку тамъ, гдѣ получается дѣйствительное изображеніе предмета отъ объектива, и заставляя экваторіалъ слѣдить за этимъ свѣтиломъ, получаемъ фотографическій снимокъ свѣтила.

Чрезвычайно важно для астронома имѣть хорошіе часы. Достоинство ихъ обусловливается только постоянствомъ ихъ хода. Часы раздѣляются на два типа: *часы съ маятникомъ* (стѣнные) и *хронометры*; первые приводятся въ дѣйствіе силою тяжести, дѣйствующей на маятникъ и гири, а вторые—пружиною.

Астрономическими обсерваторіями называются учрежденія для наблюденія и изученія небесныхъ свѣтилъ. Каждая большая

обсерваторія заключаетъ въ себѣ, во-первыхъ, башню съ вращающимся куполомъ, снабженнымъ прорѣзомъ сверху донизу; этотъ прорѣзъ бываетъ закрытъ все время, когда не производится наблюденій. Внутри башни помѣщается большой телескопъ — экваторіалъ (рефракторъ или рефлекторъ). Во-вторыхъ, на каждой обсерваторіи есть особая зала, въ которой помѣщенъ меридіанный кругъ; стѣны и потолокъ этой залы раздѣлены пополамъ разрѣзомъ, проходящимъ по меридіану съ юга

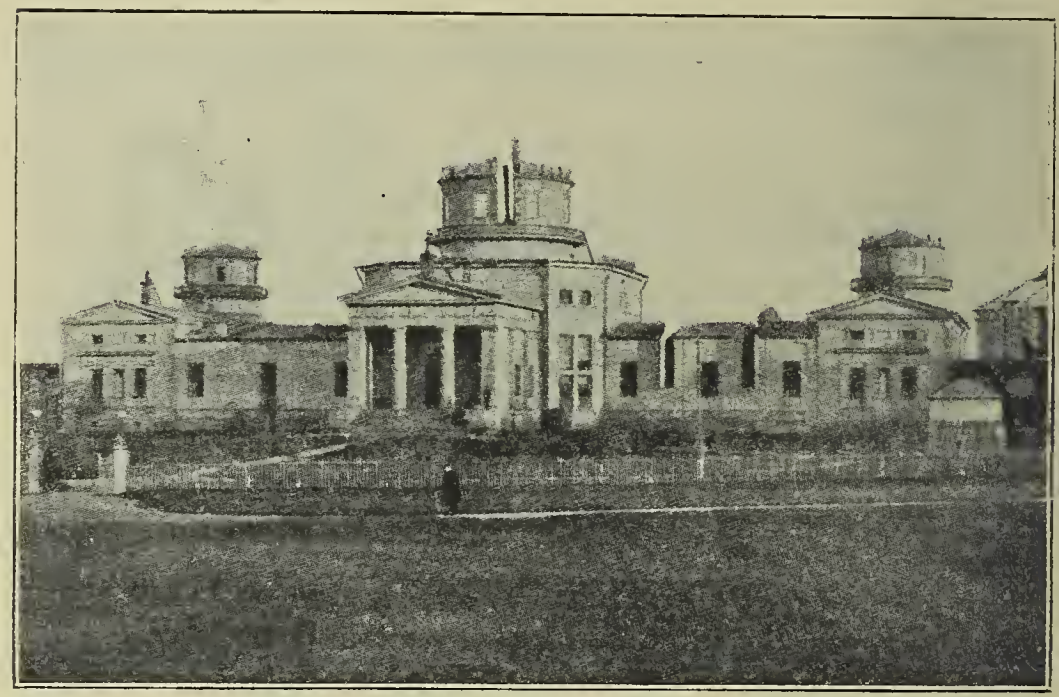


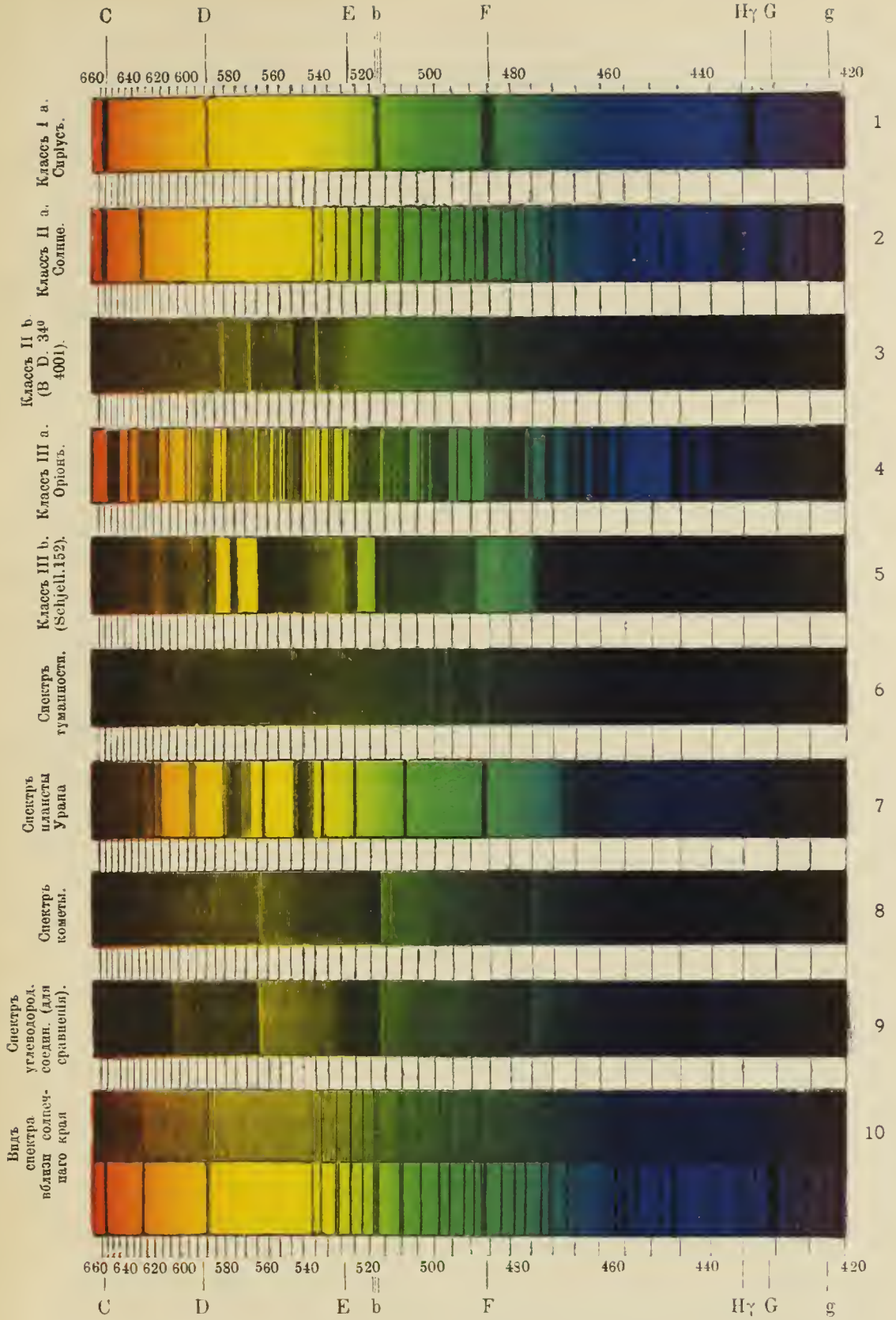
Рис. 21. Общій видъ Пулковской обсерваторіи. (Изъ книги Стратонова Солнце).

на сѣверъ. Разрѣзъ этотъ открывается во время наблюденія, обыкновенно же онъ закрытъ ставнями. Для другихъ приборовъ и инструментовъ имѣются также отдѣльныя башни, но меньшихъ размѣровъ.

Такія обсерваторіи выстроены во всѣхъ большихъ городахъ всѣхъ государствъ. Въ Россіи главная обсерваторія находится въ Пулковѣ, близъ Петербурга (рис. 21). Есть еще обсерваторіи въ Петербургѣ, Москвѣ, Казани, Кіевѣ, Харьковѣ, Юрьевѣ, Гельсингфорсѣ, Одессѣ, Ташкентѣ и въ Крыму (въ Симеизѣ).

VIII. Земля.

1. Опредѣленіе положенія точки на земномъ шарѣ. Точки p и p' земной поверхности (рис. 22), въ которыхъ ось міра (т.-е. воображаемая прямая, вокругъ которой происходитъ видимое



СПЕКТРЫ НЕБЕСНЫХЪ ТѢЛЪ.

Астрономія. Таблица I.

суточное обращеніе небеснаго свода съ востока на западъ или дѣйствительное обращеніе земли съ запада на востокъ) встрѣчаетъ поверхность земли, называются географическими (сѣвернымъ и южнымъ) *полюсами*. Если мы проведемъ черезъ центръ O земного шара плоскость перпендикулярную къ оси міра PP', то эта плоскость пересѣчетъ земную поверхность по большому кругу eq, называемому *земнымъ экваторомъ*, а небесный сводъ—по *небесному экватору* EQ; сѣченіе же земного шара плоскостями, перпендикулярными къ оси міра, но не проходящими черезъ центръ земли, даетъ на поверхности земли малые круги, параллельные земному экватору: ихъ называютъ *параллелями* (напримѣръ, ab). Проведемъ мысленно плоскость черезъ земную ось и черезъ какую-нибудь точку n земной поверхности; эта плоскость, называемая плоскостью меридіана мѣста n пересѣкается съ земной поверхностью по большому кругу $pntp'$, называемому *географическимъ меридіаномъ* даннаго мѣста; направленіе меридіана въ данномъ мѣстѣ совпадаетъ съ направленіемъ полуденной линіи, такъ какъ и меридіанъ и полуденная линія идутъ съ сѣвера на югъ. Та же плоскость пересѣчетъ воображаемую небесную сферу по *небесному меридіану* $PZMP'$; слѣдовательно, земной и небесный меридіаны лежатъ въ одной плоскости. Земной меридіанъ, какъ большой кругъ, проходящій черезъ оба земныхъ полюса и данное мѣсто, занимаетъ на земной поверхности неизмѣнное положеніе. Небесный же меридіанъ даннаго мѣста не занимаетъ среди звѣздъ неизмѣннаго положенія: вслѣдствіе вращенія земли къ востоку (или видимаго суточнаго вращенія небесной сферы къ западу) его плоскость послѣдовательно совпадаетъ съ кругами склоненій различныхъ звѣздъ; поэтому эти звѣзды проходятъ черезъ плоскость небеснаго меридіана и кульминируютъ въ данномъ мѣстѣ. Экваторъ дѣлитъ земной шаръ на два полушарія: *сѣверное* и *южное*. Разстояніе отъ каждой точки экватора до полюса равняется четверти окружности или 90°. Уголъ MCZ, между плоскостью экватора и направленіемъ

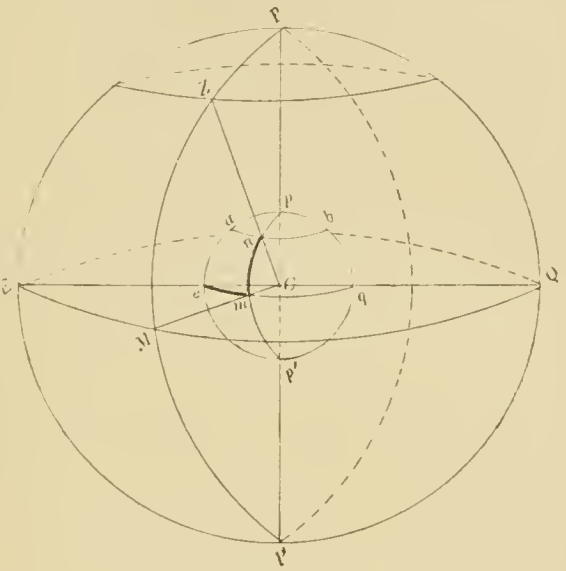


Рис. 22. Географическая широта и долгота.

къ зениту въ какой-нибудь точкѣ на земной поверхности, называется *географической широтой* этого мѣста. Широта считается отъ 0° до 90° и, если нашъ пунктъ лежитъ въ сѣверномъ полушаріи, то широта считается положительной, а если въ южномъ, то—отрицательной.

Но одной широты было бы не достаточно для опредѣленія положенія точки на земномъ шарѣ. Въ самомъ дѣлѣ, проведя параллель $a n b$ черезъ эту точку, мы увидимъ, что всѣ точки, лежащія на этой параллели, будутъ имѣть одинаковую широту. Но если мы скажемъ, что меридіанъ $p n p'$ даннаго мѣста находится на столько-то градусовъ, минутъ и секундъ, считая по экватору, къ западу или къ востоку отъ другого меридіана (напримѣръ $p a e p'$), принятаго за основной или *первый*, тогда положеніе нашей точки будетъ вполнѣ опредѣлено. Это разстояніе $e m$ между меридіанами называется *географической долготой* даннаго мѣста. Какой меридіанъ принять за первый, это безразлично. Прежде первымъ считали меридіанъ, проходящій черезъ островъ Ферро (у западныхъ береговъ Африки); теперь же въ каждомъ государствѣ за первый принимаютъ меридіанъ, проходящій черезъ главную астрономическую обсерваторію страны: во Франціи—парижскій, въ Германіи—берлинскій, въ Россіи—пулковскій, но чаще за первый принимается меридіанъ, проходящій черезъ главную астрономическую обсерваторію Англіи—Гринвичъ (близъ Лондона). Такъ какъ въ теченіе 24 часовъ земля обернется вокругъ оси и, слѣдовательно, каждая точка ея опишетъ за это время 360°, то 1° эта точка опишетъ въ 4 минуты времени, а на основаніи этого соотношенія возможно выразить долготу мѣста не въ доляхъ круга, а въ доляхъ времени. Итакъ, можно сказать, что долготой даннаго мѣста называется разстояніе отъ перваго меридіана до меридіана даннаго мѣста (считая къ западу или къ востоку по экватору), выраженное въ градусахъ, минутахъ и секундахъ дуги или часахъ, минутахъ и секундахъ времени. Обыкновенно считаютъ отъ перваго меридіана на западъ и на востокъ отъ 0° до 180° (или отъ 0^h до 12^h) и, сообразно съ этимъ, прибавляютъ, какая долгота, западная или восточная.

Покажемъ, что широта мѣста равна высотѣ полюса надъ горизонтомъ. Пусть (рис. 23) окружность $E P Q P'$ представляетъ небесную сферу, въ центрѣ ея помѣстимъ ничтожную по своимъ размѣрамъ, въ сравненіи съ небесной сферой, землю. Предположимъ, что линія $E Q$ представляетъ небесный экваторъ, eq — земной экваторъ, PP' — ось міра, pp' — совпадающая съ ней ось вращенія земли; C—центръ земли или центръ небесной сферы; предположимъ, что наблюдатель находится въ точкѣ a. Въ та-

комъ случаѣ уголъ eCa или равный ему уголъ ECZ представляетъ географическую широту мѣста a. Наблюдатель, находящійся на поверхности земли, видитъ только часть ея и называетъ ее своимъ горизонтомъ. Эта часть такъ мала въ сравненіи со всею поверхностью земли, что ее можно принять за часть плоскости, касательной къ земному шару въ мѣстѣ наблюденія. Наблюдатель, не видя предѣла своего горизонта, мысленно продолжаетъ его до пересѣченія съ небеснымъ сводомъ, и видимый горизонтъ представляется ему кругомъ, дѣлящимъ небесный сводъ на двѣ половины. Проведемъ плоскость, проходящую черезъ центръ земного шара параллельно нашему горизонту. Разстояніе между этими двумя плоскостями равно земному радіусу или 6.000 верстамъ. По причинѣ ничтожности размѣровъ земли въ сравненіи съ размѣрами небеснаго свода, эти двѣ плоскости въ астрономіи считаются совпадающими другъ съ другомъ и обѣ разсматриваются, какъ круги, дѣлящіе небесный сводъ пополамъ. Поэтому мы можемъ предполагать, что наблюдатель находится не въ точкѣ a, а въ точкѣ C, въ центрѣ земли, и горизонтомъ служитъ плоскость SN. Мы видимъ, что дуга EP равна 90°; точно такъ же и дуга NZ равна 90°; если отъ дуги EP мы отнимемъ дугу ZP, то останется дуга EZ равная, какъ сказано выше, широтѣ мѣста a; съ другой стороны, если отъ дуги ZN отнять ту же дугу ZP, то останется дуга PN; слѣдовательно, дуга EZ равна дугѣ PN. Но дуга PN есть высота полюса P надъ плоскостью обоихъ горизонтовъ (такъ какъ мы предположили, что они совпадаютъ); слѣдовательно, широта мѣста равна высотѣ полюса надъ горизонтомъ, высота же полюса надъ горизонтомъ равна полусуммѣ высотъ какой-нибудь незаходящей звѣзды въ ея верхней и нижней кульминаціи. Такимъ образомъ и можетъ быть опредѣлена широта мѣста.

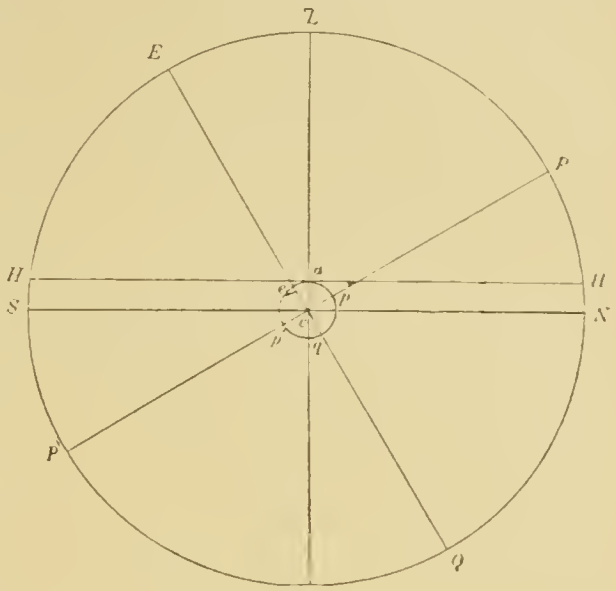


Рис. 23.

Чтобы опредѣлить географическую долготу какого-нибудь мѣста, опредѣляютъ точно время (напримѣръ, изъ наблюденія про-

хожденія какого-нибудь свѣтила черезъ меридіанъ) и узнаютъ, какое время въ этотъ моментъ на первомъ меридіанѣ. Для этого или надо имѣть съ собою точные часы, идущіе по времени перваго меридіана, или справиться по телеграфу, или же отмѣтить какое-нибудь явленіе (затменіе луны, затменіе спутника Юпитера), видимое одновременно въ обоихъ мѣстахъ. Въ астрономическомъ календарѣ всегда указано время такихъ явленій для перваго меридіана; остается только вычесть это время изъ мѣстнаго, или наоборотъ, и получится долгота въ часахъ, минутахъ и секундахъ времени; ее не трудно перевести въ градусы.

2. Величина земного шара, его поверхность и внутренность. Если измѣрить разстояніе въ верстахъ между двумя мѣстами, изъ которыхъ одно находится на 1° сѣвернѣе другого на одномъ меридіанѣ, то получимъ длину 1 градуса, т.-е. $^1/_{360}$ части земной окружности. Что измѣренное разстояніе, дѣйствительно, равно одному градусу меридіана, можно убѣдиться, опредѣляя указаннымъ выше способомъ географическія широты конечныхъ пунктовъ: если разность ихъ широтъ получится равной одному градусу, тогда, слѣдовательно, и измѣренное разстояніе было равно одному градусу. Помноживъ ее на 360, получимъ длину всей окружности меридіана, откуда узнаемъ величину земного шара. Подобныя измѣренія называются *градусными*.

Въ 1669 году Пикаръ измѣрилъ особымъ способомъ, который называется *триангуляціей*, длину дуги меридіана между Парижемъ и Амьеномъ. Въ 1735 году Парижская академія одновременно послала двѣ экспедиціи: одну въ Перу (близъ экватора), а другую на сѣверъ, въ Лапландію, чтобы такимъ образомъ получить длины одного градуса меридіана близъ экватора и близъ полюса. Результаты измѣреній показали, что длина градуса увеличивается отъ экватора къ полюсамъ. Съ теченіемъ времени среди ученыхъ появилась мысль о необходимости создать такую мѣру, которая могла бы быть возстановлена съ полной точностью, если бы основной ея образецъ былъ потерянъ или испорченъ. По совѣту знаменитаго Лапласа, въ 1790 г. за такую мѣру приняли одну десятимилліонную часть четверти земного меридіана, а для этого нужно было снова возможно точнѣе опредѣлить длину меридіана, что и было выполнено въ концѣ XVIII столѣтія Деламбромъ и Мешеномъ во Франціи. Одна десятимилліонная часть полученной длины четверти земного меридіана, подъ названіемъ *метра*, и была принята за единицу длины.

Метръ равенъ $22^1/_4$ вершкамъ, такъ что верста равна 1.067 метрамъ; 1.000 метровъ составляютъ *километръ*, который равенъ приблизительно $^{15}/_{16}$ версты: $^1/_{100}$ метра называется *сантиметромъ*.

Градусныя измѣренія показали, что земля представляетъ немного сплюснутый у полюсовъ шаръ, именно, такъ называемый *эллипсоидъ вращенія* (см. стр. 139), происходящій отъ вращенія эллипса вокругъ его малой оси. Ось вращенія земли равна 12.713 километрамъ (11.917 верстъ), діаметръ экватора равенъ 12.757 километрамъ (11.958 верстъ), такъ что разница между ними составляетъ 44 километра.

Каждое тѣло вселенной притягиваетъ другія тѣла тѣмъ сильнѣе, чѣмъ само вѣситъ больше (см. стр. 283). Сравнивая притяженіе земли съ притяженіемъ солнца и планетъ, мы можемъ узнать, во сколько разъ одно изъ этихъ тѣлъ тяжелѣе или легче другого. Но какъ узнать вѣсъ хоть одного изъ нихъ въ пудахъ и фунтахъ?

Въ 1798 году Кавендишъ сдѣлалъ приборъ для измѣренія притяженія тяжелыхъ свинцовыхъ шаровъ. Легкій прутъ (*c*), повѣшенный горизонтально (рис. 24), былъ снабженъ маленькими шариками (*b*) на концахъ (изъ этихъ шариковъ на рисункѣ виденъ одинъ правый, лѣвый скрытъ за шаромъ *W*). Къ этимъ шарикамъ осторожно приближали на подставкѣ два тяжелые свинцовые шара (*W*), одинъ справа, другой слѣва. Тогда прутъ начиналъ поворачиваться имъ навстрѣчу, производя закручиванье нити. По величинѣ его отклоненія опредѣляли, во сколько разъ притяженіе свинцовыхъ шаровъ слабѣе притяженія земли, а зная вѣсъ шаровъ, легко вычислить вѣсъ и массу земного шара.

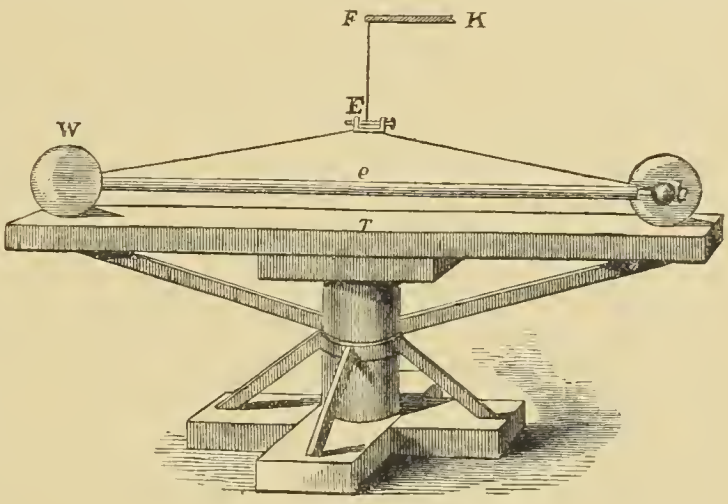


Рис. 24. Приборъ Кавендиша.

Она равняется приблизительно 360.000.000.000.000.000.000.000 пудамъ. Земной шаръ тяжелѣе воды, взятой въ такомъ же объемѣ, *въ 5½ разъ*. Это есть такъ называемая *плотность* или *удѣльный вѣсъ* земли.

Однако не всѣ части земного шара имѣютъ одинаковую плотность. Легче всего *атмосфера*, воздушная оболочка земли, состоящая изъ газовъ кислорода и азота. Она простирается при-

близительно до 300 верстъ въ вышину, т.-е. до $^1/_{40}$ земного діаметра. На глобусѣ, въ 60 сантиметровъ ($^3/_4$ аршина) въ діаметрѣ, атмосфера должна бы имѣть толщину до $1^1/_2$ сантиметра (меньше $^1/_2$ вершка). Нижніе слои атмосферы, прилегающіе къ поверхности земли, несравненно плотнѣе верхнихъ, потому что каждый слой воздуха сжатъ давленіемъ тяжести верхнихъ слоевъ. Самый нижній, самый тяжелый слой воздуха въ 773 раза легче воды.

Большая часть земной поверхности покрыта водою, суша составляетъ немного болѣе $^1/_4$ всей поверхности. Суша имѣетъ разный составъ и потому разную плотность; углубляясь внутрь земли, мы встрѣчаемъ все болѣе и болѣе плотные слои. Поэтому думаютъ, что ближе къ центру земли находятся преимущественно металлы, самыя тяжелыя составныя части земли.

Внутренность земного шара, какъ думаютъ многіе ученые, находится въ расплавленномъ состояніи, потому что, во-первыхъ, по мѣрѣ углубленія въ землю становится все жарче, во-вторыхъ, изъ отверстій вулкановъ во время изверженій появляется наружу раскаленная добѣла огненно-жидкая масса, называемая *лавой*. Думаютъ, что было время, когда вся земля была огненно-жидкимъ шаромъ и свѣтила, какъ маленькое солнце. Потомъ, остывая, она покрылась твердой корой, которая съ теченіемъ времени все утолщается и сжимается, образуя складки, т.-е. горныя цѣпи. Образованіе складокъ сопровождается *землетрясеніями*. Думаютъ, что толщина твердой земной коры не превышаетъ 200 километровъ, такъ какъ на этой глубинѣ температура должна дойти до 2.000° Цельсія, при которой почти всѣ тѣла находятся въ расплавленномъ состояніи.

3. Вращеніе земли вокругъ оси. Коперникъ призналъ вращеніе земли, какъ самое *вѣроятное* объясненіе суточнаго движенія звѣздъ; но ни онъ, ни Галилей, ни Кеплеръ, ни Ньютонъ не имѣли *доказательствъ* этого. Въ настоящее время можно указать цѣлый рядъ явленій, убѣждающихъ насъ въ справедливости предположеній Коперника.

1) Земной шаръ имѣетъ сплюснутую форму; такая форма обыкновенно происходитъ вслѣдствіе вращенія. Если мы будемъ быстро вертѣть мягкій шаръ (напримѣръ изъ глины или изъ тѣста), то онъ тоже приметъ сплюснутую форму. Земля, какъ думаютъ, была прежде огненно-жидкою; въ это время и произошла ея сплюснутость. Юпитеръ и Сатурнъ вращаются на оси быстрѣе земли, и они сплюснуты гораздо сильнѣе.

2) Воздухъ участвуетъ въ движеніи земной поверхности съ запада на востокъ; каждая точка вблизи экватора движется

быстрѣе, чѣмъ любая точка вблизи полюсовъ (потому что въ одно и то же время проходитъ большій кругъ). Поэтому воздухъ, текущій отъ полюсовъ къ экватору, стараясь сохранить первоначальную скорость, будетъ отставать отъ частицъ земной поверхности и будетъ уклоняться къ западу. Такъ и происходитъ въ дѣйствительности: въ Великомъ и Атлантическомъ океанахъ на экваторѣ воздухъ, нагрѣваясь отъ поверхности воды, поднимается постоянно вверхъ; на его мѣсто течетъ воздухъ съ сѣвера и съ юга, но, отставая отъ движенія къ востоку водяной поверхности, образуетъ такъ называемые *пассаты*, т.-е. постоянные, цѣлый годъ дующіе вѣтры: въ сѣверномъ полушаріи *сѣверо-восточный пассатъ*, въ южномъ—*юго-восточный*. Если бы земля не вращалась, пассаты не уклонялись бы къ западу и были бы просто сѣвернымъ и южнымъ.

3) Когда на сушѣ или на морѣ одно мѣсто земной поверхности нагрѣто сильнѣе окружающихъ, то воздухъ надъ нимъ, расширяясь, идетъ вверхъ, а на его мѣсто *со всѣхъ сторонъ* течетъ болѣе холодный воздухъ (въ маломъ видѣ это легко наблюдать около большого костра); воздухъ, текущій отъ полюса (въ нашемъ полушаріи съ сѣвера), будетъ отставать къ западу, а воздухъ, текущій отъ экватора, будетъ уклоняться къ востоку, потому что онъ движется къ востоку быстрѣе земной поверхности, надъ которою протекаетъ. Получается круговоротъ, такъ называемый *циклонъ*; вокругъ сильно нагрѣтаго мѣста вѣтры кружатся.

4) У рѣкъ, текущихъ съ юга на сѣверъ или съ сѣвера на югъ въ сѣверномъ полушаріи обыкновенно правый берегъ бываетъ крутой, лѣвый—пологій; въ южномъ полушаріи—наоборотъ. Это объясняется тѣмъ, что каждая частица воды рѣки, текущей въ сѣверномъ полушаріи съ юга (отъ экватора) уклоняется къ востоку, обгоняя земную поверхность, и подмываетъ восточный (правый) берегъ; рѣки, текущія съ сѣвера (отъ полюса), отстаютъ отъ движенія земной поверхности и подмываютъ западный (опять правый) берегъ. Въ южномъ полушаріи по той же причинѣ онѣ подмываютъ лѣвый берегъ. Изъ этого правила, конечно, встрѣчается много исключеній: случайно на лѣвомъ берегу можетъ быть гора выше, чѣмъ на правомъ.

5) Вершина башни или колокольни въ суточномъ движеніи описываетъ бо́льшій кругъ, чѣмъ подножіе, слѣдовательно движется къ востоку быстрѣе. Камень, взятый на вершину башни, движется скорѣе камня, лежащаго на землѣ. Падая съ вершины башни, камень сохранитъ свое болѣе быстрое, чѣмъ у основанія башни движеніе къ востоку и упадетъ *восточнѣе* подножія башни, что́ и было доказано на опытахъ.

6) При всякомъ вращеніи развивается *центробѣжная сила;* она стремится удалить движущееся тѣло отъ центра (см. стр. 236). При вращеніи земли скорость ея точекъ возрастаетъ отъ полюсовъ къ экватору; значитъ, еще больше должна возрастать центробѣжная сила, *которая должна уменьшать вѣсъ тѣлъ* (см. стр. 236—237). Провѣрить это вѣсами нельзя: на обыкновенныхъ вѣсахъ гири (разновѣски) сами тоже становятся легче; а пружинные вѣсы недостаточно чувствительны. Но есть очень чувствительный инструментъ, *маятникъ* (см. стр. 242), который употребляется и для часовъ. *Скорость качаній маятника зависитъ отъ его длины и отъ силы тяжести:* и чѣмъ больше сила тяжести, тѣмъ скорѣе онъ качается; ясно, что вблизи экватора маятникъ долженъ качаться медленнѣе, чѣмъ вблизи полюсовъ. Дѣйствительно, въ 1672 г. астрономъ Рише, переѣхавъ изъ Парижа въ Южную Америку близъ экватора, замѣтилъ, что его очень точные часы стали отставать на 2 минуты въ сутки: маятникъ сталъ качаться медленнѣе.

7) Маятникъ даетъ и другое, самое наглядное доказательство вращенія земли. Если подвѣсить маятникъ къ подставкѣ, укрѣпленной надъ кругомъ, раздѣленнымъ на градусы, привести маятникъ въ колебаніе, затѣмъ вращать кругъ вмѣстѣ съ подставкой, то маятникъ, несмотря на закручиваніе нити, будетъ все время качаться въ одной и той же плоскости, т.-е. при каждомъ размахѣ будетъ пересѣкать движущійся подъ нимъ кругъ на различныхъ дѣленіяхъ, какъ бы передвигаясь по нимъ въ сторону, обратную вращенію. Таково свойство маятника.

Если теперь мы повѣсимъ маятникъ на сѣверномъ полюсѣ земли, то земная поверхность будетъ подъ нимъ вращаться съ запада на востокъ, а маятникъ будетъ качаться въ одной плоскости; намъ же будетъ казаться, что размахи его передвигаются съ востока на западъ; въ сутки онъ совершитъ полный оборотъ, т.-е. 360°, а въ 1 часъ отклонится на 15° къ западу. На экваторѣ этого отклоненія не будетъ: плоскость качанія маятника переносится вмѣстѣ съ вращеніемъ земли къ востоку и сохраняетъ свое положеніе относительно земной поверхности неизмѣннымъ. Между экваторомъ и полюсами маятникъ будетъ отклоняться меньше, чѣмъ на 15° въ часъ,—тѣмъ меньше, чѣмъ ближе къ экватору.

Въ 1851 году Фуко повѣсилъ металлическій шаръ около 2 пудовъ вѣсомъ на проволокѣ длиною въ 32 сажени подъ куполомъ Пантеона въ Парижѣ. Шаръ былъ снабженъ внизу остріемъ, бороздившимъ при размахахъ песокъ, которымъ былъ усыпанъ полъ. Каждый размахъ уклонялся замѣтно влѣво (по ча-

совой стрѣлкѣ) отъ предыдущаго. Въ 1 часъ маятникъ уклонялся на $11^1/_2$ градусовъ. Такой же опытъ былъ повторенъ въ Кельнѣ съ такимъ же успѣхомъ. Отклоненіе маятника въ 1 часъ вычисляется для каждаго мѣста заранѣе, и опытъ въ точности подтверждаетъ вычисленіе.

IX. Движеніе земли вокругъ солнца.

Признавши, что земля движется вокругъ неподвижнаго солнца, Коперникъ, однако, не могъ привести прямыхъ доказательствъ своего предположенія. Неизбѣжнымъ слѣдствіемъ вращенія земли вокругъ солнца должно быть періодическое измѣненіе звѣздами ихъ видимыхъ положеній на небесной сферѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (рис. 25) солнце находится въ точкѣ O. Въ теченіе года наша земля обносится вокругъ солнца по круговой приблизительно орбитѣ. Пусть въ точкѣ S въ небесномъ пространствѣ, какъ разъ надъ эклиптикой, находится звѣзда. Предположимъ, что въ первый моментъ нашихъ наблюденій земля находилась на ея орбитѣ въ точкѣ T_1; въ такомъ случаѣ звѣзда S будетъ усматриваться нами по направленію $T_1 S$ и будетъ казаться прикрѣпленной къ небесному своду въ точкѣ S_1; по прошествіи нѣкотораго времени земля по своей орбитѣ перейдетъ въ точку T_2 и тогда звѣзда S будетъ усматриваться по новому направленію, именно $T_2 S$ и будетъ казаться перешедшей на небесномъ сводѣ въ точку S_2; когда черезъ полгода земля придетъ въ точку T_3, прямо противоположную начальному ея положенію T_1, тогда звѣзда будетъ видима на небесномъ сводѣ въ точкѣ S_3; наконецъ, если возьмемъ землю въ точкѣ T_4, то звѣзда на небесномъ сводѣ будетъ казаться въ точкѣ S_4. Мы увидимъ, что въ теченіе года звѣзда описала кривую, подобную земной орбитѣ, но только направленія движеній земли и звѣзды (указываемыя стрѣлками) противопо-

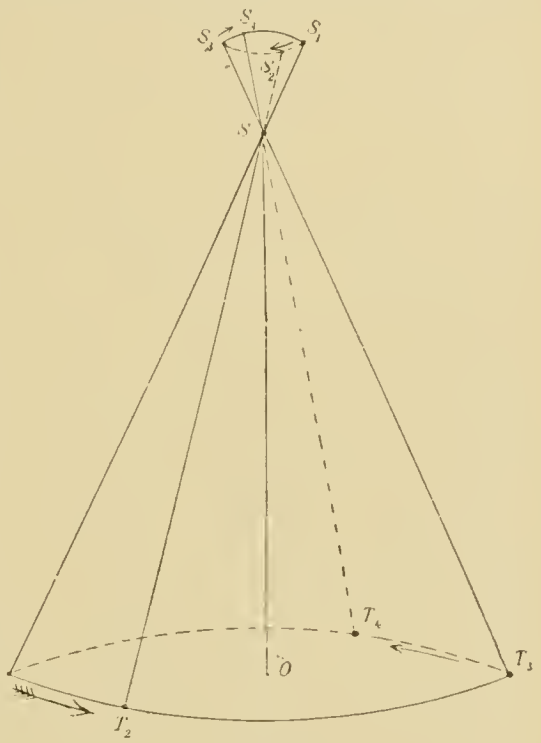


Рис. 25.

ложны. Это явленіе называется *явленіемъ годичнаго параллакса звѣздъ*, уголъ же (напримѣръ, OST_1 или OST_2), подъ которымъ наблюдатель увидѣлъ бы радіусъ (OT_1 или OT_2) земной орбиты, если бы онъ смотрѣлъ на земную орбиту съ данной звѣзды S, называется *годичнымъ параллаксомъ* этой звѣзды.

Однако, только съ усовершенствованіемъ астрономическихъ приборовъ стало возможнымъ подмѣтить и годичные параллаксы нѣсколькихъ звѣздъ. Именно, въ 40-хъ годахъ XIX столѣтія Бессель въ Кенигсбергѣ (Германія) и В. Струве въ Дерптѣ (нынѣшній Юрьевъ) опредѣлили годичные параллаксы: первый—Веги (α Лиры), а второй—61-ой звѣзды созвѣздія Лебедя. Параллаксъ Веги оказался равнымъ всего лишь $^1/_4$ секунды дуги, а 61-ой Лебедя—$^2/_5$ секунды. Изъ всѣхъ найденныхъ въ настоящее время параллаксовъ, наибольшую величину, въ $^4/_5$ секунды, имѣетъ звѣзда α центавра въ южномъ полушаріи.

Существованіе годичныхъ параллаксовъ доказываетъ намъ, что земля движется вокругъ солнца.

Но пока астрономы старались опредѣлить годичные параллаксы звѣздъ, было получено другое доказательство движенія земли вокругъ солнца. Англійскій астрономъ Брадлей, наблюдая съ 1725 по 1728 годъ звѣзду γ Дракона, съ цѣлью опредѣлить ея годичный параллаксъ, замѣтилъ, что ея положеніе, дѣйствительно, непрерывно мѣняется: звѣзда описываетъ въ теченіе года маленькій эллипсъ, большая ось котораго достигаетъ 40 секундъ. Впослѣдствіи оказалось, что и всѣ звѣзды описываютъ совершенно такой же длины эллипсы, но ширина ихъ мѣняется: чѣмъ ближе къ эклиптикѣ, тѣмъ уже эллипсъ. На самой эклиптикѣ звѣзды колеблются по прямой линіи, отходя отъ средняго положенія полгода въ одну сторону до 20″, полгода въ другую на такую же величину. Но это явленіе нельзя было объяснить *параллаксомъ*, такъ какъ звѣзды отклонялись *въ ту же сторону*, въ которую двигалась земля. Брадлей разгадалъ причину этого явленія; онъ показалъ, что періодическое измѣненіе звѣздами ихъ видимыхъ положеній на небесномъ сводѣ обусловливается тѣмъ, что мы смотримъ на нихъ съ *движущейся* земли, отчего каждая звѣзда кажется намъ немного отклоненной въ ту сторону, куда въ данный моментъ движется земля по своей орбитѣ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что S (рис. 26) есть звѣзда, OT — направленный на нее телескопъ. Если бы телескопъ былъ неподвиженъ, то свѣтовой лучъ, идущій отъ звѣзды S, пройдя черезъ объективъ, достигъ бы окуляра въ направленіи SOT, и мы видѣли бы звѣзду въ направленіи TOS. Но пусть телескопъ не находится въ покоѣ,

а вмѣстѣ съ землею онъ переносится въ пространствѣ. Направленіе этого движенія на чертежѣ указано стрѣлкою. Въ такомъ случаѣ за тотъ, хотя и очень небольшой, промежутокъ времени, пока свѣтъ пробѣжитъ вдоль телескопа, самый телескопъ успѣетъ немного перемѣститься по направленію стрѣлки, и свѣтовой лучъ попадетъ на окуляръ T уже нѣсколько лѣвѣе; поэтому мы увидимъ звѣзду не въ дѣйствительномъ ея направленіи TOS, а по TOS', т.-е. звѣзда будетъ казаться перемѣстившеюся по направленію движенія земли. Это явленіе называется *аберраціей* свѣта.

Рис. 26.

Зная скорость свѣта, скорость движенія земли и уголъ между звѣздой и направленіемъ движенія земли (онъ мѣняется въ теченіе всего года), можно точно вычислить, насколько звѣзда должна казаться смѣщенной. Когда движеніе земли и направленіе свѣта составляютъ уголъ въ 90^0, аберраціонное смѣщеніе звѣзды достигаетъ наибольшей величины, именно $20''.5$ (такъ называемая *постоянная аберраціи*).

Аберрація (отклоненіе) свѣта звѣздъ, являясь доказательствомъ движенія земли, даетъ возможность также измѣрить скорость свѣта. Скорость движенія земли по орбитѣ достигаетъ 28 верстъ въ секунду, а скорость свѣта равна 280.000 верстамъ въ секунду.

Земная орбита представляетъ эллипсъ, близкій къ кругу. Солнце занимаетъ въ ней одинъ изъ двухъ фокусовъ на главной оси (т.-е. на самомъ длинномъ діаметрѣ), вся длина которой равна приблизительно 280.000.000 верстъ. Земля около 19 декабря стараго стиля находится на одномъ концѣ главной оси, ближе всего къ солнцу; эта точка ея орбиты называется *перигеліемъ*. Разстояніе ея отъ солнца тогда равно 138.000.000 верстъ, здѣсь ея движеніе наиболѣе быстро. 18 іюня земля находится на другомъ концѣ той же оси своей орбиты, въ *афеліи*; разстояніе ея отъ солнца наибольшее, 142.000.000 верстъ, скорость наименьшая. Среднее разстояніе отъ солнца, равное половинѣ большой оси, считается въ 140.000.000 верстъ. Движеніе земли въ небольшой промежутокъ времени можно считать прямолинейнымъ: въ секунду, пробѣгая 28 верстъ по прямой линіи, она отклонится въ сторону солнца меньше, чѣмъ на 3 миллиметра.

Соединимъ мысленно прямой линіей центры солнца и земли; эта линія (радіусъ земной орбиты) лежитъ вся въ плоскости земной орбиты. Продолжимъ мысленно эту линію въ обѣ стороны. При движеніи земли вокругъ солнца эта линія, вращаясь, опишетъ на воображаемой небесной сферѣ большой кругъ, прохо-

дящій по двѣнадцати зодіакальнымъ созвѣздіямъ, т.-е. *эклиптику*. Итакъ, *эклиптика есть пересѣченіе небесной сферы плоскостью земной орбиты.*

Ось земного шара, вокругъ которой онъ совершаетъ оборотъ въ теченіе сутокъ, не перпендикулярна къ плоскости земной орбиты, а образуетъ съ ней уголъ въ 66°33′. Сѣверный полюсъ направленъ къ созвѣздію Малой Медвѣдицы близъ Полярной звѣзды. Это направленіе земная ось сохраняетъ неизмѣнно весь годъ. Продолжимъ мысленно оба конца ея, сѣверный и южный, до звѣзднаго неба; тогда сѣверный пройдетъ приблизительно на $1^1/_2$ градуса около Полярной звѣзды; это мѣсто и есть *сѣверный полюсъ неба;* южный конецъ пройдетъ въ созвѣздіе Октанта среди мелкихъ звѣздъ; тамъ будетъ *южный полюсъ неба.*

Но земля не остается на одномъ мѣстѣ, такъ какъ ея ось перемѣщается вмѣстѣ съ нею параллельно самой себѣ. Должны ли перемѣщаться и небесные полюсы въ теченіе года? Нѣтъ; на безконечномъ разстояніи всѣ параллельныя линіи попадаютъ въ одну и ту же точку. Звѣзды находятся не безконечно далеко, но все-таки ихъ разстояніе сравнительно съ размѣрами земной орбиты неизмѣримо громадно. Такимъ образомъ полюсы неба можно считать всегда въ однѣхъ и тѣхъ же точкахъ.

Плоскость экватора (земного и небеснаго) пересѣкается съ плоскостью эклиптики (земной орбиты), образуя уголъ въ $23^0\ 27'$. Точки пересѣченія эклиптики и экватора на небѣ называются *точками равноденствій*: *весеннюю* — въ созвѣздіи Рыбъ и *осеннюю*—въ созвѣздіи Дѣвы. На земномъ шарѣ точекъ пересѣченія нельзя указать, потому что при вращеніи земли вокругъ оси *каждая точка земного экватора* два раза въ сутки пересѣкаетъ плоскость земной орбиты; одинъ разъ съ юга на сѣверъ, а другой разъ, черезъ 12 часовъ, съ сѣвера на югъ.

$^{11}/_{24}$ (11—по старому, 24—по новому стилю) сентября оба полюса (*N*—сѣверный, *S* — южный; рис. 27) находятся на равномъ разстояніи отъ солнца *S*, на границѣ свѣтлой и

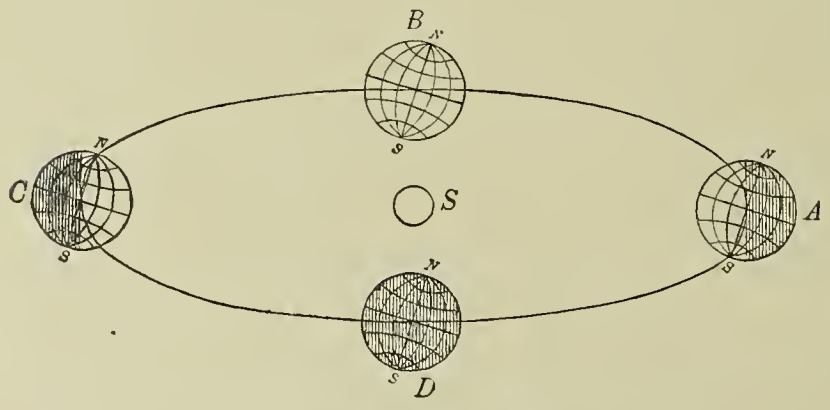


Рис. 27. Движеніе земли вокругъ солнца.

темной сторонъ; солнце, бываетъ въ зенитѣ надъ земнымъ экваторомъ (т.-е. линія, соединяющая центры земли и солнца, проходитъ въ плоскости экватора; на обоихъ полюсахъ солнце на горизонтѣ. Каждая точка земной поверхности при вращеніи земли пробѣгаетъ 12 часовъ по свѣтлой сторонѣ и столько же по темной: день вездѣ равенъ ночи (рис. 27, *D*). Земля движется сѣвернымъ полушаріемъ впередъ (на чертежѣ—направо); вскорѣ сѣверный полюсъ переходитъ на темную сторону, южный—на свѣтлую; линія, соединяющая центры солнца и земли, пересѣкаетъ поверхность земли въ южномъ полушаріи земли; тамъ наступаетъ лѣто, въ сѣверномъ—зима.

$^{10}/_{23}$ декабря южный полюсъ земли находится въ самомъ близкомъ положеніи къ солнцу; онъ освѣщенъ весь до полярнаго круга (т.-е. до круга, отстоящаго отъ него на 23°27′); въ этихъ предѣлахъ солнце не заходитъ. Сѣверный полюсъ до полярнаго круга (т.-е. на 23°27′ по широтѣ) находится во мракѣ; тамъ солнце не восходитъ. Линія, соединяющая центры солнца и земли, проходитъ въ южномъ полушаріи черезъ тропикъ Козерога (на 23°27′ южнѣе экватора). Каждая точка южнаго полушарія при вращеніи земли пробѣгаетъ бо́льшую часть своего пути по свѣтлой сторонѣ; здѣсь день длиннѣе ночи. Каждая точка сѣвернаго полушарія пробѣгаетъ бо́льшую часть пути по темной сторонѣ: день меньше ночи (рис. 27, *A*).

Постепенно оба полюса приближаются къ границѣ свѣта и тѣни, а линія, соединяющая центры солнца и земли, приближается къ земному экватору. Въ сѣверномъ полушаріи наступаетъ весна, въ южномъ—осень. 8 марта оба полюса опять на границѣ свѣта и тѣни; для нихъ солнце на горизонтѣ: на сѣверномъ оно восходитъ, на южномъ—заходитъ. Солнце въ зенитѣ надъ экваторомъ; день на всей землѣ равенъ ночи: каждая точка земли пробѣгаетъ полкруга по свѣтлой сторонѣ, полкруга—по темной (рис. 27, *B*). Земля движется южнымъ полушаріемъ впередъ.

Сѣверный полюсъ переходитъ на свѣтлу́ю сторону, южный—на темную; солнце въ зенитѣ для сѣвернаго полушарія. 9 іюня южный полюсъ наиболѣе удаленъ отъ солнца, сѣверный находится въ самомъ близкомъ положеніи къ солнцу: онъ освѣщенъ до полярнаго круга; въ этихъ предѣлахъ вѣчный день. Во всемъ сѣверномъ полушаріи день больше ночи, въ южномъ—меньше. Солнце въ зенитѣ надъ тропикомъ Рака (на 23°27′ къ сѣверу отъ экватора) (рис. 27, *C*). Теперь опять сѣверный и южный полюсы начинаютъ приближаться къ границѣ свѣта и тѣни, въ сѣверномъ полушаріи день становится короче, въ южномъ начинаетъ удлиняться. Солнце приближается къ зениту экватора.

На рис. 28 показано положеніе земли въ день лѣтняго солнцестоянія, 9 іюня. На земномъ шарѣ изображены точками тропики Рака (къ сѣверу отъ экватора) и Козерога (къ югу). Справа надписи показываютъ, сколько времени длится самый длинный день для широты, обозначенной градусами. Такъ, для широты Харькова (50°) самый длинный день длится 16 ч. 9 м., для Петербурга (60°) — 18 часовъ 30 минутъ.

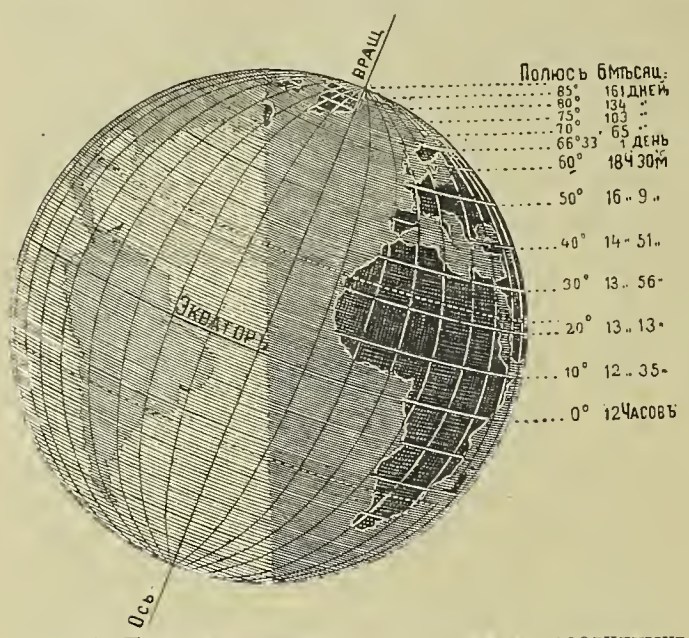


Рис. 28. Продолжительность дня и ночи въ различныхъ точкахъ земной поверхности въ день лѣтняго солнцестоянія.

Кромѣ двухъ главныхъ своихъ движеній, суточнаго вокругъ оси и годового вокругъ солнца, земля подъ вліяніемъ притяженія солнца, луны и планетъ производитъ еще нѣсколько постоянныхъ движеній.

1. Вслѣдствіе бо́льшей выпуклости земного шара у экватора, луна и солнце притягиваютъ экваторъ земли сильнѣе, чѣмъ полюсы, и стремятся приблизить земной экваторъ къ эклиптикѣ. Отъ этого земная ось колеблется, какъ ось волчка, вращеніе котораго ослабѣваетъ; она медленно поворачивается съ востока на западъ, сохраняя одинъ и тотъ же наклонъ къ плоскости орбиты. Отъ этого движенія точки пересѣченія земного экватора съ эклиптикой передвигаются по эклиптикѣ къ западу, проходя въ годъ приблизительно 50″. Такимъ образомъ *равноденствіе* наступаетъ каждый годъ раньше, чѣмъ земля обойдетъ всю свою орбиту; поэтому колебаніе земной оси называется *предвареніемъ равноденствій* (*прецессіей*).

2. Кромѣ этого медленнаго движенія, обнимающаго періодъ въ 26.000 лѣтъ, то же вліяніе луны и солнца заставляетъ ось земли совершать сравнительно быстрыя колебанія съ періодомъ въ 18.6 лѣтъ около ея средняго положенія и вслѣдствіе этого въ поступательномъ движеніи полюсовъ міра вокругъ полюсовъ эклиптики получаются небольшія извилины, точка весенняго равноденствія движется по экватору не равномѣрно и длина

тропическаго года бываетъ то немного больше, то немного меньше. Это явленіе, названное *нутаціей* было открыто *Брадлеемъ*.

3. Земная ось не остается постоянной и внутри земного шара. Она перемѣщается въ теченіе 430 дней, какъ показали послѣднія очень точныя измѣренія, весьма неправильными движеніями на небольшомъ пространствѣ. Такимъ образомъ сѣверный полюсъ движется по земной поверхности по неправильной кривой линіи, поперечникъ ея достигаетъ 8 саженъ; отъ этого широты всѣхъ мѣстъ земного шара измѣняются приблизительно на $^1/_2$ секунды. Такимъ образомъ земля вращается вокругъ то одной, то другой оси, и суточное движеніе ея имѣетъ небольшія неправильности. Причина этого явленія, вѣроятно, лежитъ въ перемѣщеніяхъ массъ внутри земли и на земной поверхности (напримѣръ, поднятіе и опусканіе материковъ, передвиженіе полярныхъ льдовъ и т. д.).

4. Вслѣдствіе вліянія планетъ плоскость земной орбиты (эклиптика) измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, и поэтому наклонъ земной оси къ орбитѣ тоже не остается постояннымъ: онъ уменьшается изъ вѣка въ вѣкъ приблизительно на 1′ въ 125 лѣтъ; земная ось стремится стать перпендикулярной къ плоскости орбиты, а экваторъ приближается къ эклиптикѣ. Въ 1800 году уголъ экватора съ эклиптикой равнялся 23°27′55″, въ 1900 году 23°27′8″, въ 1910 году — 23°27′4″. Черезъ нѣсколько столѣтій это уменьшеніе прекратится, и ось опять начнетъ наклоняться къ эклиптикѣ, а экваторъ—удаляться отъ нея. Размахи оси не превышаютъ 2°27′.

5. Сама орбита земли постепенно мѣняетъ свою форму: она постепенно приближается къ формѣ круга. Въ настоящее время разстояніе фокуса отъ центра составляетъ $\frac{168}{10.000}$ частей половины большой оси (т.-е. средняго разстоянія земли отъ солнца). Будетъ время, приблизительно черезъ 24.000 лѣтъ, когда это отношеніе (эксцентриситетъ) будетъ всего $\frac{33}{10.000}$. Затѣмъ эллипсъ опять начнетъ суживаться, и приблизительно черезъ 124.000 лѣтъ послѣ этого эксцентриситетъ будетъ равенъ $\frac{473}{10.000}$.

6. Большая ось земной орбиты не остается неподвижной: она медленно поворачивается съ запада на востокъ, въ ту же сторону, куда движется земля по орбитѣ. Полный оборотъ она дѣлаетъ приблизительно въ 113.000 лѣтъ, поворачиваясь въ годъ на $11^1{}_2''$ (секундъ). Земля, пройдя перигелій и сдѣлавъ полный оборотъ по орбитѣ, должна еще почти $4^1{}_2$ минуты двигаться,

чтобы догнать передвинувшійся перигелій. Такимъ образомъ, *аномалистическій годъ* (отъ перигелія до перигелія) длиннѣе звѣзднаго на $4^1/_2$ минуты и длиннѣе тропическаго на 24 минуты 47 секундъ.

7. Земля, двигаясь вокругъ солнца, въ то же время описываетъ небольшую орбиту вокругъ общаго центра тяжести луны и земли, лежащаго внутри земного шара, на разстояніи 4.387 верстъ отъ центра земли, на линіи между центрами земли и луны. Орбиту эту земля описываетъ въ $27^1/_2$ дней.

8. Луна притягиваетъ обращенную къ ней поверхность земли сильнѣе, чѣмъ средину, а средину земли — сильнѣе, чѣмъ противоположную сторону. Отъ этого вода океановъ на обѣихъ сторонахъ поднимается надъ земной поверхностью въ видѣ двухъ выступовъ (рис. 29); между ними вокругъ всей земли образуется поясъ, гдѣ вода стоитъ значительно ниже. Такимъ образомъ зе-

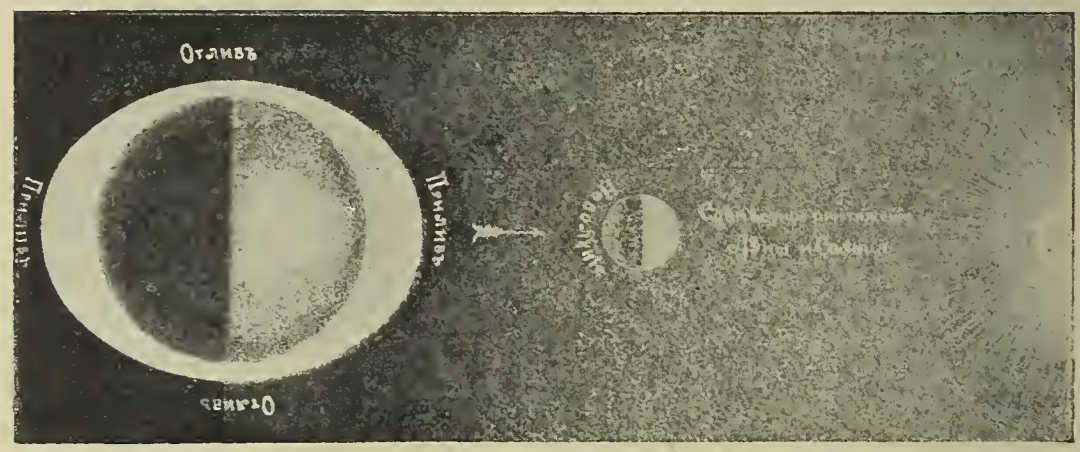


Рис. 29. Приливъ и отливъ во время новолунія.

мной шаръ какъ бы удлиняется по направленію къ лунѣ. Эти водяные выступы называются *приливами*; мѣста съ низкимъ уровнемъ воды—*отливами*. Несомнѣнно, что такіе же приливы и отливы образуются и въ атмосферѣ, хотя мы ихъ и не замѣчаемъ. Солнце тоже образуетъ на землѣ два прилива и отлива, но разница въ притяженіи солнца на обѣ поверхности земли значительно меньше вліянія луны, вслѣдствіе его громаднаго разстоянія. На рис. 29 представлено совмѣстное дѣйствіе солнца и луны, во время новолунія, на водяную поверхность земного шара.

9. Каждая изъ верхнихъ планетъ — Марсъ, Юпитеръ, Сатурнъ, Уранъ, Нептунъ—во время противостоянія своимъ притяженіемъ удаляетъ землю отъ солнца и слегка задерживаетъ ея движеніе; сильнѣе всѣхъ дѣйствуетъ Юпитеръ. Во время со-

единеній тѣ же планеты слегка приближаютъ землю къ солнцу, но въ это время ихъ дѣйствіе гораздо слабѣе. Нижнія планеты, Меркурій и Венера, всегда стремятся приблизить землю къ солнцу и ускорить ея движеніе; особенно сильно дѣйствіе Венеры при нижнемъ соединеніи. Эти притяженія семи большихъ планетъ то соединяются другъ съ другомъ, то противодѣйствуютъ одно другому; и земля подъ ихъ вліяніемъ безпрестанно уклоняется со своего пути. Измѣненіе формы земной орбиты и вращеніе ея большой оси происходятъ также и отъ дѣйствія планетъ.

10. Притяженіе тѣхъ же планетъ дѣйствуетъ и на солнце, особенно когда всѣ планеты соберутся на одной сторонѣ. Ихъ притяженіе смѣщаетъ солнце изъ фокуса земной орбиты. Земля слѣдуетъ за движеніемъ солнца и уклоняется также со своего пути.

X. Измѣреніе разстояній небесныхъ тѣлъ.

Хотя разстоянія, отдѣляющія землю отъ планетъ, кометъ, солнца и луны очень велики, но они не безконечны; поэтому направленіе, по которому мы видимъ какое-либо свѣтило изъ данной точки земной поверхности, будетъ вообще отличаться отъ того направленія, по которому мы видѣли бы его изъ центра земли. Уголъ между этими двумя направленіями называется *параллаксомъ* свѣтила.

Когда свѣтило находится въ зенитѣ, то мы считаемъ, что оно находится на продолженіи земного радіуса, проведеннаго къ намъ изъ центра земли; тогда *параллаксъ пути: мы видимъ свѣтило тамъ же, гдѣ видѣли бы его изъ центра земли.* На рис. 30 свѣтило M находится въ зенитѣ для точки C на земной поверхности; оно видно для мѣста C по тому же направленію CE, какъ и изъ центра земли O. Изъ точки же A это свѣтило M видно по линіи AB. Уголъ между линіями AB и CE, пересѣкающимися въ M, и называется *параллаксомъ* свѣтила. Параллаксъ, въ противоположность рефракціи, всегда уменьшаетъ видимую высоту свѣтила надъ горизонтомъ. Больше всего будетъ параллаксъ свѣтила, находящагося на горизонтѣ, такъ называемый *горизонтальный параллаксъ*. На горизонтѣ же сильнѣе всего рефрак-

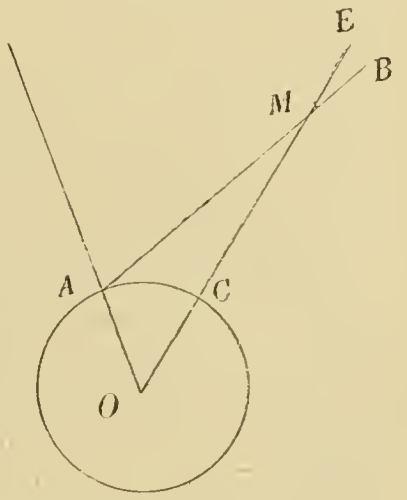


Рис. 30.

ція атмосферы: она поднимаетъ видимое мѣсто свѣтила болѣе чѣмъ на $^1/_2$ градуса. Лишь параллаксъ луны больше рефракціи, остальныхъ же свѣтилъ—гораздо меньше.

Положимъ, что, напримѣръ, въ Улеаборгѣ, въ Финляндіи, на 65° къ сѣверу отъ экватора, луна находится на горизонтѣ; въ этотъ же самый моментъ она видна въ зенитѣ въ Южной Африкѣ, на 24° къ югу отъ экватора. Уголъ между радіусами земли, проведенными къ Улеаборгу и къ лунѣ, равенъ 89° (65+24); уголъ въ Улеаборгѣ между вертикальной линіей (продолженіемъ радіуса) и горизонтальной, проведенной къ лунѣ, равенъ 90°. Отсюда слѣдуетъ, что третій уголъ треугольника, составленнаго Улеаборгомъ, луною и центромъ земли (чер. 31), равенъ 1°. Этотъ уголъ и есть *горизонтальный параллаксъ луны*. Начертимъ треугольникъ, въ которомъ одинъ уголъ равенъ 90°, другой 89°, третій 1°: измѣряемъ, во сколько разъ самая длинная сторона длиннѣе самой короткой; окажется, что почти въ 60 разъ. Слѣдовательно, разстояніе луны отъ центра земли почти въ 60 разъ больше земного радіуса. Считая длину радіуса земли круглымъ числомъ въ 6.000 верстъ, получимъ разстояніе луны отъ земли въ 360.000 верстъ.

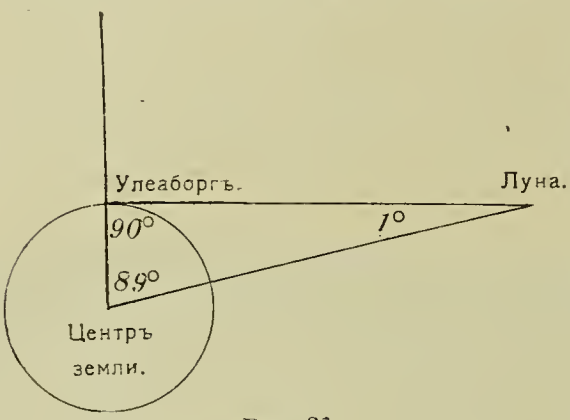


Рис. 31.

Горизонтальный параллаксъ какого-нибудь свѣтила есть не что иное, какъ уголъ, подъ которымъ съ этого свѣтила виденъ радіусъ земли; онъ во столько же разъ больше или меньше угла, подъ которымъ съ земли виденъ радіусъ этого свѣтила, во сколько разъ дѣйствительный радіусъ земного шара больше или меньше радіуса свѣтила. Такъ, горизонтальный параллаксъ луны въ среднемъ равенъ 57′2″, а радіусъ (видимый) луны равенъ въ среднемъ 15′34″; отсюда слѣдуетъ, что радіусъ земли въ 3,66 раза больше радіуса луны.

Параллаксъ луны опредѣляли приблизительно и древніе астрономы, но въ первый разъ его точно опредѣлили два французскихъ астронома, Лаландъ и Лакайль, въ 1752 году; одинъ находился въ Берлинѣ, другой — на мысѣ Доброй Надежды (въ южной Африкѣ). Рис. 32 показываетъ довольно точно уголъ между линіями, проведенными отъ луны къ двумъ оконечностямъ земного діаметра (этотъ уголъ вдвое больше горизонтальнаго параллакса).

Кромѣ луны, удалось опредѣлить горизонтальный параллаксъ Марса и нѣсколькихъ малыхъ планетъ во время противостояній и Венеры во время нижнихъ соединеній (т.-е. при наименьшихъ разстояніяхъ отъ земли). Параллаксъ Марса въ среднемъ около 23″; это значитъ, что разстояніе Марса отъ земли при противостояніи равно въ среднемъ 9.000 радіусовъ земли.

Параллаксъ Венеры опредѣлить труднѣе: во время ея ближайшаго разстоянія отъ земли она обращена къ намъ темной стороною и потому невидима. Но время отъ времени случается, что Венера, при нижнемъ соединеніи, находится какъ разъ на прямой линіи, соединяющей солнце и землю; тогда мы видимъ ее на дискѣ солнца въ видѣ чернаго кружочка, медленно ползущаго по солнцу отъ восточнаго края къ западному (слѣва направо). Астрономъ Галлей въ 1691 году показалъ, что, отмѣчая точно моментъ, когда Венера начинаетъ входить на солнечный дискъ, и моментъ, когда она сходитъ съ него, можно точно опредѣлить ея положеніе на дискѣ солнца въ любой моментъ; а сравнивая ея положенія въ одинъ и тотъ же моментъ для разныхъ мѣстъ земли, можно узнать разницу параллаксовъ солнца и Венеры.

Напримѣръ, пусть Венера V находится въ зенитѣ для мѣста земного шара C и видна оттуда на дискѣ солнца въ точкѣ D, а въ тотъ же моментъ въ мѣстѣ A она видна на горизонтѣ и находится на дискѣ солнца въ точкѣ B. Въ треугольникѣ (см. рис. 33) AVD уголъ ADV есть искомый горизонтальный параллаксъ солнца, т.-е. тотъ уголъ, подъ которымъ виденъ радіусъ земли AO для наблюдателя, находящагося на солнцѣ въ точкѣ D, а уголъ BAD есть уголъ, подъ которымъ видна съ земли линія BD на солнцѣ. Уголъ AVO есть горизонтальный параллаксъ Венеры, т.-е. уголъ, подъ которымъ виденъ съ Венеры радіусъ земли. По правиламъ геометріи мы можемъ сказать, что уголъ BAD равенъ (см. стр. 71) разности угловъ AVO и ADO, т.-е. разности параллаксовъ Венеры и солнца. Параллаксъ Венеры во столько разъ больше параллакса солн-

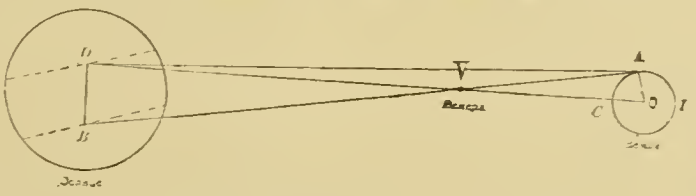


Рис. 33.

Рис. 32.

ца, во сколько разстояніе солнца отъ земли больше разстоянія Венеры отъ земли. Принимая разстояніе отъ солнца до земли равнымъ единицѣ и зная продолжительности звѣздныхъ оборотовъ земли и Венеры вокругъ солнца, мы по третьему закону Кеплера получаемъ, что разстояніе Венеры отъ солнца равно 0,72 и, слѣдовательно, отъ земли въ данномъ случаѣ 0,28. Такимъ образомъ параллаксъ Венеры во столько разъ больше параллакса солнца, во сколько 1 больше 0,28. Уголъ *VAD*— разность параллаксовъ — равняется числу дуговыхъ секундъ, заключающихся въ линіи *BD*, т.-е. угловому разстоянію двухъ точекъ солнечнаго диска, въ которыхъ наблюдатели, находящіеся въ точкахъ *A* и *C*, видятъ одновременно центръ *V* диска Венеры. Для опредѣленія этого разстоянія нужно, чтобы оба наблюдателя самымъ точнымъ образомъ опредѣлили, каждый для своего мѣста, моменты вступленія Венеры на солнечный дискъ и выступленія изъ него. Пусть соотвѣтствующій уголъ будетъ равенъ 22,6″. Зная такимъ образомъ разность параллаксовъ Венеры и солнца и отношеніе ихъ, мы можемъ вычислить, что первый равенъ 31,4″, а второй 8,8″.

Четыре прохожденія Венеры въ 1761, 1769, 1874, и 1882 годахъ тщательно наблюдались на всемъ земномъ шарѣ, и изъ нихъ опредѣлили параллаксъ солнца, въ среднемъ, 8,8″. Слѣдующее прохожденіе Венеры будетъ 8 іюня 2004 года. Опредѣливши параллаксъ солнца, находятъ разстояніе его отъ земли, равное, въ среднемъ, 149.501.000 километрамъ.

Для опредѣленія разстояній планетъ отъ солнца достаточно знать горизонтальный параллаксъ солнца, такъ какъ тогда мы опредѣлимъ разстояніе отъ земли до солнца, зная же это разстояніе, звѣздный оборотъ земли и звѣздный оборотъ планеты вокругъ солнца, мы, по третьему закону Кеплера, опредѣлимъ разстояніе этой планеты отъ солнца.

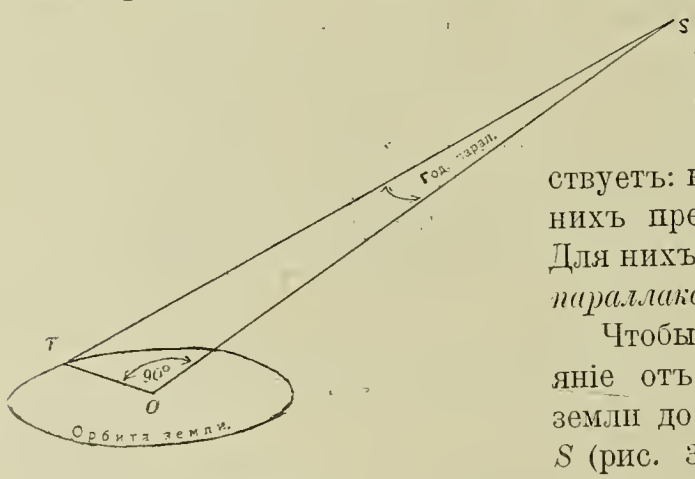


Рис. 34.

Для неподвижныхъ звѣздъ горизонтальный параллаксъ не существуетъ: весь земной шаръ для нихъ представляется точкой. Для нихъ измѣряютъ *годичный параллаксъ* (см. стр. 300).

Чтобы опредѣлить разстояніе отъ солнца *O* или отъ земли до неподвижной звѣзды *S* (рис. 34), годичный параллаксъ которой опредѣленъ изъ

наблюденій, соединимъ прямою линіею эту звѣзду съ солнцемъ и проведемъ черезъ солнце перпендикуляръ къ этой прямой такъ, чтобы онъ лежалъ въ плоскости земной орбиты; соединимъ точку пересѣченія этого перпендикуляра и земной орбиты со звѣздою S, получаемъ треугольникъ SOT прямоугольный при солнцѣ. Уголъ OST данъ—это годичный параллаксъ; сторона OT намъ извѣстна — это разстояніе отъ земли до солнца; по этимъ даннымъ мы можемъ опредѣлить стороны ST или OS, т.-е. искомое разстояніе отъ земли или отъ солнца до звѣзды (см. стр. 116—117).

XI. Луна.

1. Движеніе луны вокругъ земли и вокругъ солнца. Луна — единственное небесное свѣтило, которое дѣйствительно обращается вокругъ земли; она слѣдуетъ за землею въ ея движеніи вокругъ солнца и потому называется *спутникомъ* земли.

Луна находится къ намъ несравненно ближе всѣхъ небесныхъ свѣтилъ. Разстояніе ея отъ земли составляетъ въ среднемъ 30 земныхъ діаметровъ, т.-е. круглымъ числомъ 360.000 верстъ.

Земля находится не въ центрѣ, а въ фокусѣ лунной орбиты, которая представляетъ болѣе удлиненный эллипсъ, чѣмъ земная. Разстояніе земли отъ центра эллипса составляетъ $^1/_{18}$ часть большой полуоси, т.-е. средняго разстоянія земли и луны. Поэтому разстояніе луны отъ земли мѣняется: въ *перигеѣ* оно равно $28^1/_3$ земныхъ діаметровъ (340.000 верстъ), въ апогеѣ—$31^2/_3$ (380.000 верстъ).

Свою орбиту луна проходитъ въ 27 дней 7 часовъ 43 минуты 11 секундъ. Орбита луны наклонена къ плоскости земной орбиты; уголъ между ними равенъ 5°9′.

На рис. 35 показано для наглядности движеніе луны вокругъ земли въ сочетаніи съ движеніемъ земли вокругъ солнца. На этомъ рисункѣ большіе кружки изображаютъ соотвѣтствующія фазы луны.

Вѣроятно, каждый изъ насъ видѣлъ пятна на лунномъ дискѣ и замѣтилъ, что очертаніе ихъ, ихъ фигура остается одинаковой. Слѣдовательно, луна къ намъ обращена всегда одною своею сто-

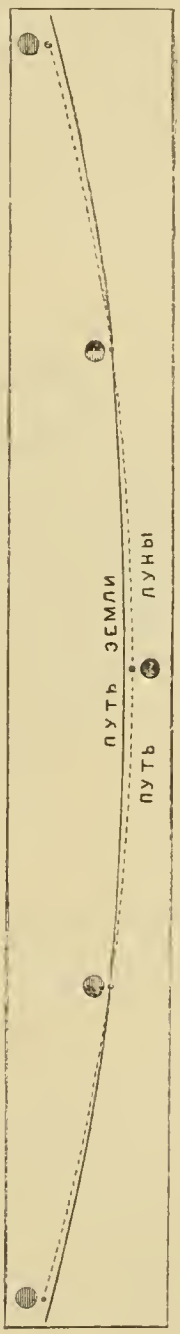


Рис. 35.

роною, а другой мы никогда не видимъ. Поэтому пока луна обойдетъ вокругъ земли, она обернется вокругъ своей оси или, говоря точнѣе, *періодъ обращенія луны вокругъ оси равенъ періоду ея обращенія вокругъ земли.* Но орбита луны—не кругъ, а эллипсъ и луна движется по ней неравномѣрно, а вращается вокругъ оси равномѣрно; кромѣ того, ось вращенія луны наклонена къ плоскости эклиптики подъ угломъ приблизительно въ 88° 29′; наконецъ, мы смотримъ не изъ центра земли, а съ различныхъ точекъ ея поверхности. Вслѣдствіе этихъ трехъ причинъ центръ и края видимаго нами луннаго диска постоянно въ теченіе мѣсяца перемѣщаются по его поверхности до 10° лунной окружности въ ту и другую сторону. Это явленіе называется *либраціей* (качаніемъ) луны. Благодаря ей мы видимъ въ продолженіи мѣсяца больше половины (почти $^6/_{10}$) лунной поверхности.

2. Величина луны. Устройство поверхности. Измѣривъ параллаксъ луны, мы получаемъ ея разстояніе отъ земли; теперь легко опредѣлить ея діаметръ. Средній видимый діаметръ луны равенъ 31′8″; слѣдовательно, истинный діаметръ луны — 0,273 земного діаметра или 3.480 километровъ (3.265 верстъ). Отсюда слѣдуетъ, что поверхность луны равна $^1/_{13}$ поверхности земного шара, т.-е. немного больше Америки и немного меньше Азіи. Объемъ луны равенъ приблизительно $^1/_{49}$ части объема земного шара.

Рис. 36. Относительные размѣры земли и луны.

На рисункѣ 36-мъ изображена относительная величина луны и земли. Плотность луны составляетъ всего $^6/_{10}$ плотности земли, т.-е. луна въ $3^1/_3$ раза тяжелѣе воды, взятой въ такомъ же объемѣ, какъ луна. Масса луны составляетъ $^1/_{81}$ массы земли.

Простымъ глазомъ мы различаемъ на поверхности луны свѣтлыя и темныя мѣста. Темныя мѣста представляютъ низменности и названы *морями.*

Луна не имѣетъ замѣтной атмосферы; мы заключаемъ это изъ двухъ явленій: 1) граница между темной и освѣщенной стороной луны видна въ трубу рѣзкой чертой; тѣни возвышен-

ностей кажутся совершенно черными; нѣтъ на темной сторонѣ никакой полосы, которая соотвѣтствовала бы нашимъ *сумеркамъ*; 2) когда луна закрываетъ отъ насъ звѣзду или планету, то закрываемое свѣтило подходитъ къ самому краю луны, не ослабѣвая въ блескѣ и не испытывая преломленія свѣта.

Если нѣтъ атмосферы, то на лунѣ нѣтъ и воды; безъ атмосферы вся вода обратилась бы въ паръ и сама образовала бы атмосферу изъ водяныхъ паровъ.

Въ трубу видно, что всѣ свѣтлыя мѣста луны, а отчасти и дно морей, усѣяны неровностями, которыя мы называемъ лунными горами и долинами. Мы знаемъ, что онѣ возвышаются надъ окружающей мѣстностью, потому что въ трубу видимъ длинныя черныя тѣни, падающія отъ нихъ въ сторону, противоположную солнцу. По длинѣ тѣни можно вычислить высоту самой горы, опредѣливши сначала высоту солнца надъ горизонтомъ мѣста на лунѣ. Высота нѣкоторыхъ горъ достигаетъ 7 верстъ.

Изображеніе луны въ трубѣ получается, конечно, *обратное*, такъ что, напримѣръ, Море Дождей и Море Ясности (рис. 37, таблица II), видны не на верху луны, какъ простымъ глазомъ, а внизу. Сѣверное полушаріе луны на этой картѣ внизу, южное—наверху, востокъ—направо, западъ—налѣво.

Вся поверхность луны на этой картѣ покрыта множествомъ большихъ и малыхъ кружковъ и эллипсовъ; это такъ называемые *цирки* и *кратеры*. Здѣсь на рисункѣ соединено вмѣстѣ все, что можно видѣть на лунѣ лишь по частямъ: большинство этихъ кратеровъ замѣтны лишь тогда, когда находятся близъ *терминатора*, т.-е. границы свѣта и тѣни, когда луна имѣетъ видъ серпа или четверти. Если мы посмотримъ на луну во время полнолунія (рис. 38, таблица III), мы увидимъ только темныя пятна морей, два-три темныхъ кратера и два-три особенно яркихъ бѣлыхъ кратера; все остальное сливается въ сплошную ярко-бѣлую поверхность. Только въ верхней, южной части выдѣляется круглый бѣлый кратеръ Тихо (въ честь астронома Тихо Браге), отъ котораго по всей лунѣ идутъ длинные бѣлые лучи или полосы. Природа этихъ лучей до сихъ поръ еще не объяснена.

Лунныя моря отличаются темнымъ цвѣтомъ и ровной поверхностью; они по большей части представляютъ глубокія котловины, окруженныя горами. На днѣ ихъ встрѣчаются отдѣльные горы, пики и кратеры. Лунныя горы, какъ и горы на землѣ, представляются въ видѣ отдѣльныхъ пиковъ, въ видѣ горныхъ цѣпей, кратеровъ и плоскогорій. Четыре главныхъ цѣпи окай-

мляютъ Море Дождей: *Апеннины* съ юго-запада (рис. 39, таблица IV), *Карпаты* съ юга; *Кавказъ* отдѣляетъ Море Дождей отъ Моря Ясности; *Альпы*, разрѣзанные глубокой узкой долиной, ограничиваютъ Море Дождей съ сѣверо-запада.

Каждый кратеръ состоитъ изъ кольцеобразнаго вала, внутри котораго находится иногда гладкое дно, усѣянное мелкими пиками, обломками и кратерами. Чаще всего въ срединѣ возвышается отдѣльный конусъ, высота котораго обыкновенно не достигаетъ уровня вала. Дно кратера обыкновенно гораздо ниже окружающей кратеръ равнины. Одинъ изъ самыхъ большихъ кратеровъ луны называется *Коперникъ*. Ширина его равна 85 верстамъ ($^1/_{38}$ часть діаметра луны); самый большой кратеръ на землѣ, на островѣ Цейлонѣ, имѣетъ въ ширину только 66 верстъ.

Въ центрѣ луны и въ южномъ полушаріи видны громадные цирки до 140—180 верстъ въ ширину; самый огромный, *Клавіусъ*, находится уже близко къ южному полюсу; поперечникъ его достигаетъ 200 верстъ, высота вала до 7 верстъ; внутри его видны три небольшихъ кратера.

Интереснымъ образованіемъ на лунѣ являются *бороздки* или *трещины*. Это—темныя, узкія, извилистыя линіи, похожія на изображенія рѣкъ на географической картѣ. Это дѣйствительно трещины въ лунной поверхности, что видно по падающей въ нихъ тѣни.

На лунѣ нѣтъ ни воздуха, ни воды; слѣдовательно, тамъ нѣтъ растеній и животныхъ.

XII. Солнце.

1. Величина, свѣтъ и температура солнца. Солнце—важнѣйшее для насъ изъ всѣхъ небесныхъ свѣтилъ. Безъ солнечнаго свѣта и тепла никакая жизнь на землѣ не была бы возможна.

Солнце находится отъ насъ приблизительно въ 389 разъ дальше луны, на разстояніи равномъ въ среднемъ 149.500.000 километрамъ. Діаметръ солнца въ 109 разъ больше діаметра земли.

Рис. 40 (стр. 315) изображаетъ величину солнца по сравненію съ землею и другими планетами.

Плотность солнца въ 4 раза *меньше* плотности земли и приблизительно въ $1^1/_2$ раза больше плотности воды. Сила притяженія на поверхности солнца въ $27^1/_2$ разъ больше, чѣмъ на поверхности земли; человѣкъ, вѣсъ котораго на землѣ—5 пудовъ, на солнцѣ вѣсилъ бы $137^1/_2$ пудовъ. Солнце вѣситъ приблизительно въ 750 разъ больше, чѣмъ всѣ планеты вмѣстѣ. Объемъ солнца въ 604 раза больше объема всѣхъ планетъ.

Югъ
Клавіусъ
Тихо
Птоломей
Океанъ бурь
Зап
Вост.
Море изобилія
Море спокойствія
Коперникъ
Кеплеръ
Море кризисовъ
Карпаты
Аппенины
Аристархъ
Море ясности
Архимедъ
Море дождей
Кавказъ
Альпы
Сѣверъ

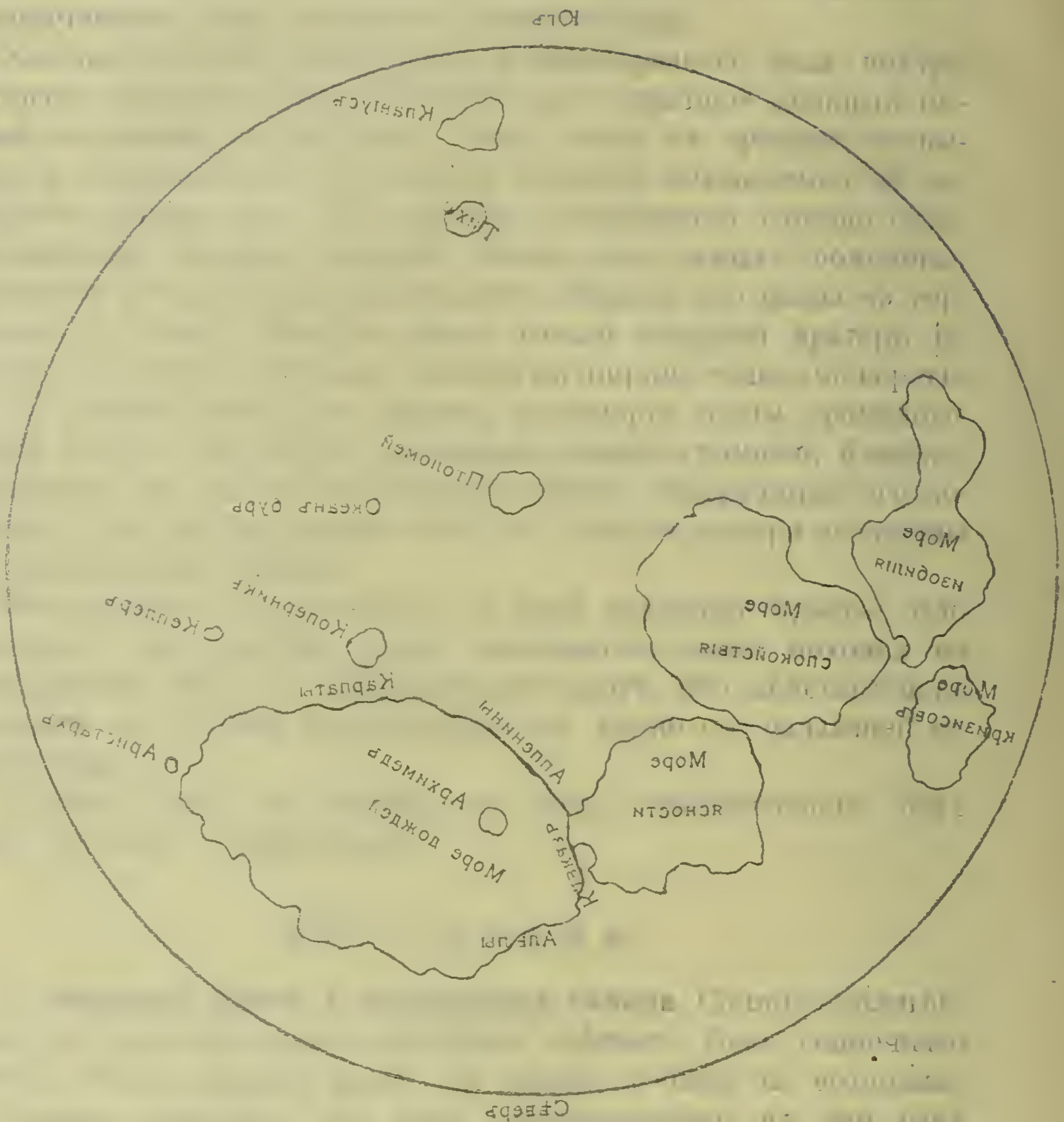


Рис. 37. Поверхность луны (стр. 313).

Рис. 38. Фотографія луны около времени полнолунія (стр. 313).

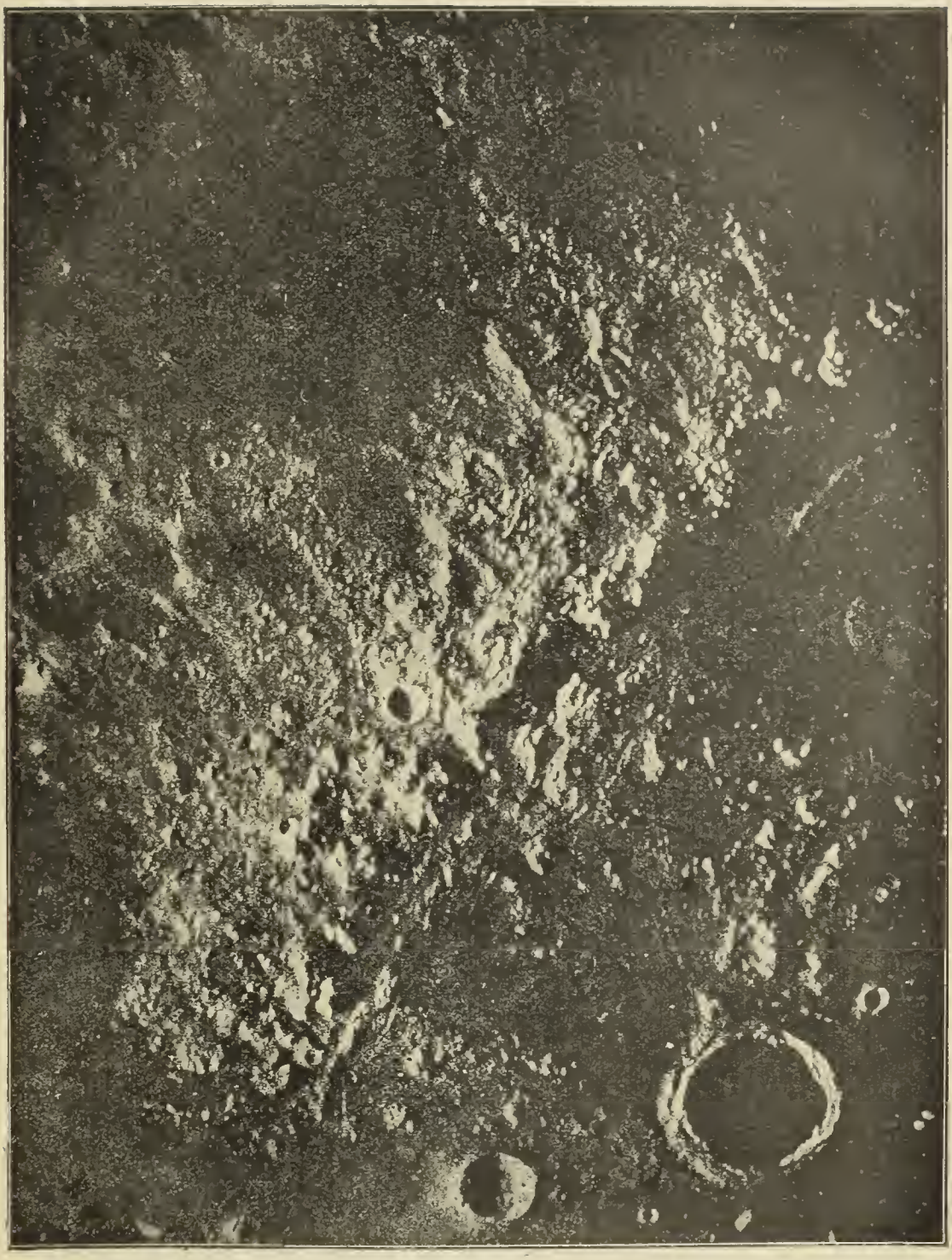


Рис. 39. Фотографія части лунной поверхности съ лунными Апеннинами (стр. 314).

Часть свѣта и тепла, получаемыхъ землею отъ солнца, теряется при прохожденіи черезъ атмосферу. Получаемый нами свѣтъ считается отъ 300.000 до 600.000 разъ сильнѣе свѣта полной луны.

Предполагаютъ, что температура солнечнаго ядра около 10.000°.

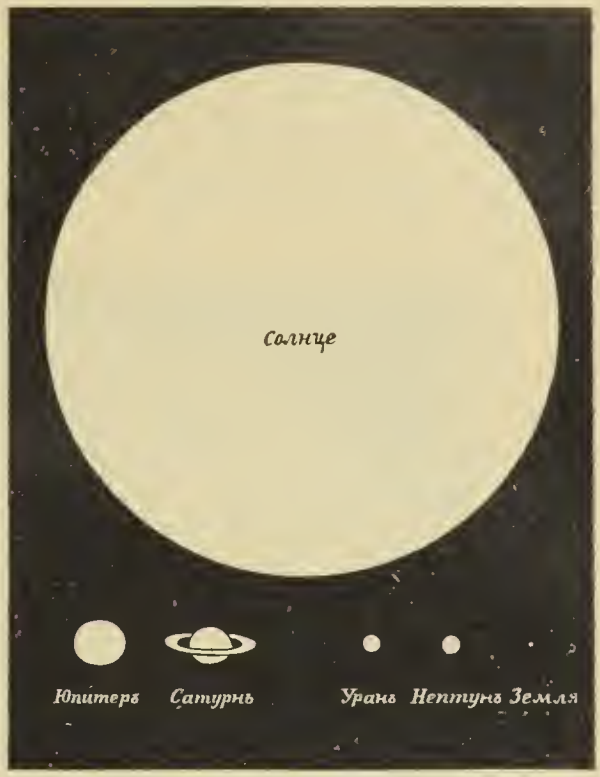


Рис. 40. Относительные размѣры солнца 5-ти большихъ планетъ.

2. Движенія солнца. Въ небольшую трубу, а иногда и простымъ глазомъ, можно бываетъ видѣть на дискѣ солнца темныя пятна различной величины и формы (рис. 41). Они то увеличиваются въ размѣрахъ, то уменьшаются, исчезаютъ и вновь появляются. Но всѣ они всегда *движутся* въ общемъ въ одну и ту же сторону, *отъ восточнаго*, лѣваго (въ трубѣ—праваго) края солнца *къ западному*, правому (въ трубѣ — лѣвому). Пятно, замѣченное нами въ центрѣ солнечной поверхности, черезъ 7 дней исчезнетъ на западномъ краю, а по прошествіи еще $13^1/_2$ дней появится на восточномъ; черезъ $27^1/_3$ дней оно окажется опять вблизи прежняго мѣста, въ центрѣ солнечной поверхности. Изъ этого заключаютъ, что солнце обращается вокругъ своей оси съ запада на востокъ. Каждое пятно, имѣющее болѣе или менѣе круглую форму въ центрѣ солнца, у краевъ его принимаетъ форму эллипса все болѣе

Рис. 41. Солнце въ небольшую астрономическую трубу.

и болѣе узкаго (рис. 42). Это показываетъ, что солнце имѣетъ шарообразную, а не плоскую форму.

Каждое пятно, проходящее черезъ центръ солнечной поверхности, какъ сказано, совершаетъ оборотъ въ $27^1/_3$ дней. На самомъ дѣлѣ оно приходитъ на прежнее мѣсто черезъ $25^1/_2$ дней, но земля въ это время успѣетъ пройти $^1/_{14}$ часть своей орбиты (25°), и солнечному пятну придется итти еще около 2 дней, чтобы его можно было видѣть съ земли вновь въ центрѣ солнца.

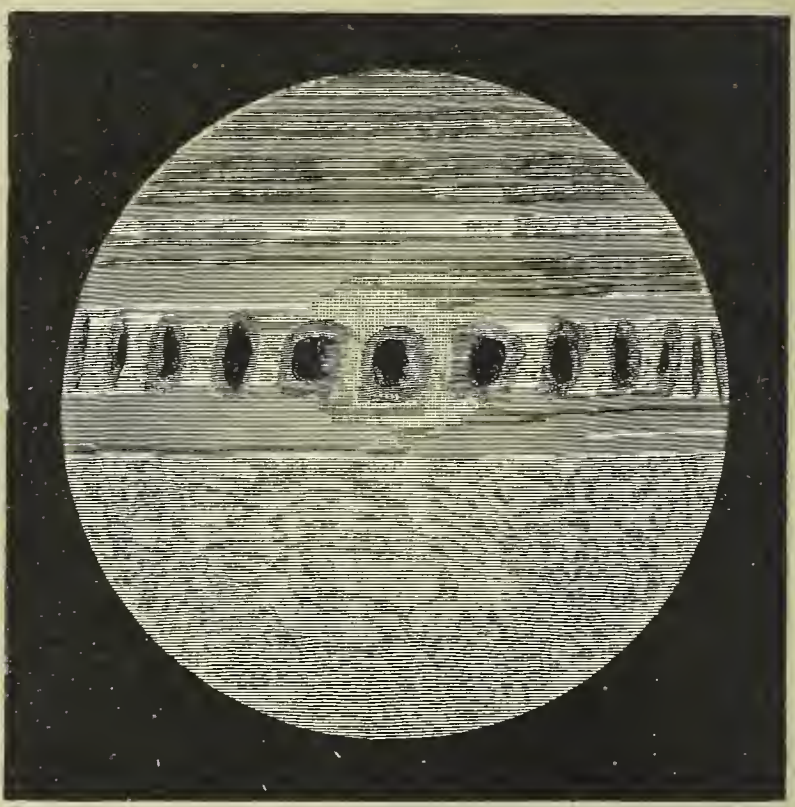


Рис. 42. Измѣненіе формы пятна по мѣрѣ приближенія его къ краю солнечнаго диска.

Солнце вращается вокругъ оси, наклоненной приблизительно на 7° къ перпендикуляру къ земной орбитѣ (т.-е. составляющей съ ней уголъ въ 83°). Но вращеніе солнечной поверхности совершается *не одновременно*; пятна, находящіяся на экваторѣ солнца, совершаютъ полный оборотъ въ 25,1 дней; но чѣмъ ближе къ полюсамъ, тѣмъ время оборота ихъ дольше. По срединѣ между полюсомъ и экваторомъ время обращенія равно почти 28 днямъ. Ближе къ полюсамъ пятенъ обыкновенно не бываетъ, но съ помощью спектроскопа можно, по перемѣщенію спектральныхъ линій, опредѣлить скорость вращенія краевъ солнца. Оказывается,

что на широтѣ 70° (въ 20° отъ полюсовъ) время обращенія равно почти 31,4 днямъ, подъ широтою 80°—36 днямъ.

Отсюда заключаемъ, что поверхность солнца не можетъ быть *твердой*; она должна быть или огненно-жидкой или газообразной.

Кромѣ вращенія на оси, солнце вмѣстѣ со всѣми планетами движется по неизвѣстной намъ орбитѣ въ ту сторону, гдѣ находятся созвѣздія Геркулеса и Лиры; о движеніи этомъ мы заключаемъ по медленному общему перемѣщенію всѣхъ звѣздъ въ противоположную сторону.

3. Солнце въ телескопъ. Солнечныя пятна открыты въ 1610 году почти одновременно Галилеемъ въ Италіи, Фабриціемъ и Шейнеромъ въ Германіи.

Величина, форма и число пятенъ весьма разнообразны. Встрѣчаются пятна меньше 1″ въ поперечникѣ, т.-е. около 700 верстъ; встрѣчаются и такія, поперечникъ которыхъ доходитъ до 2′ (болѣе 80.000 верстъ) и болѣе. Во всѣхъ большихъ и среднихъ пятнахъ, даже въ маленькую трубу, ясно различается темная средняя часть, *ядро* или *тѣнь*, и менѣе темная *полутѣнь* (рис. 43). Рис. 44 представляетъ фотографію солнца съ пятнами, полученную на Пулковской обсерваторіи. Двѣ взаимно-перпендикулярныхъ линіи на ней представляютъ изображеніе паутиновыхъ нитей, натянутыхъ въ главномъ фокусѣ фотографическаго прибора. Иныя пятна разсѣиваются и исчезаютъ въ нѣсколько часовъ; иныя бываютъ видимы недѣли и мѣсяцы. Пятно обыкновенно появляется въ зонахъ (поясахъ), лежащихъ между 10° и 30° къ сѣверу и къ югу отъ солнечнаго экватора; на самомъ же экваторѣ и въ разстояніяхъ отъ него болѣе 40° пятенъ почти никогда не бываетъ.

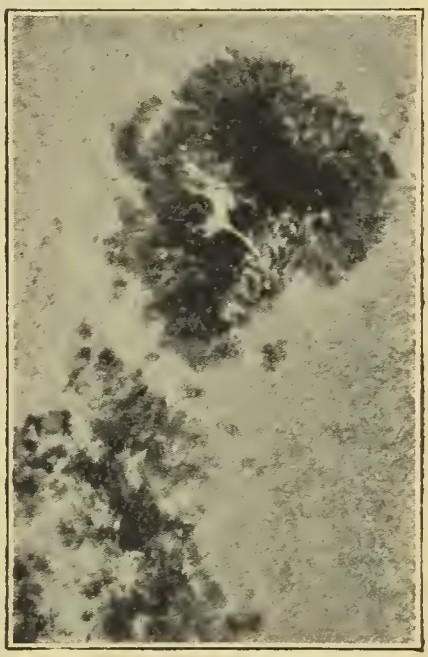


Рис. 43. Солнечное пятно.

Ядро пятна кажется темнымъ лишь по сравненію съ окружающей поверхностью солнца; на самомъ дѣлѣ оно свѣтитъ краснымъ свѣтомъ въ 5.000 разъ сильнѣе полной луны.

Полутѣнь представляетъ, по мнѣнію многихъ астрономовъ, углубленіе въ солнечной поверхности; дно этого углубленія занимаетъ ядро. Это особенно хорошо замѣтно, когда пятно

приближается къ краю солнца (рис. 42). Сторона пятна, болѣе близкая къ краю, становится шире внутренней стороны, какъ это мы можемъ увидѣть у всякой ямы, оврага и т. п.: болѣе далекій отъ насъ склонъ виденъ лучше, чѣмъ болѣе близкій.

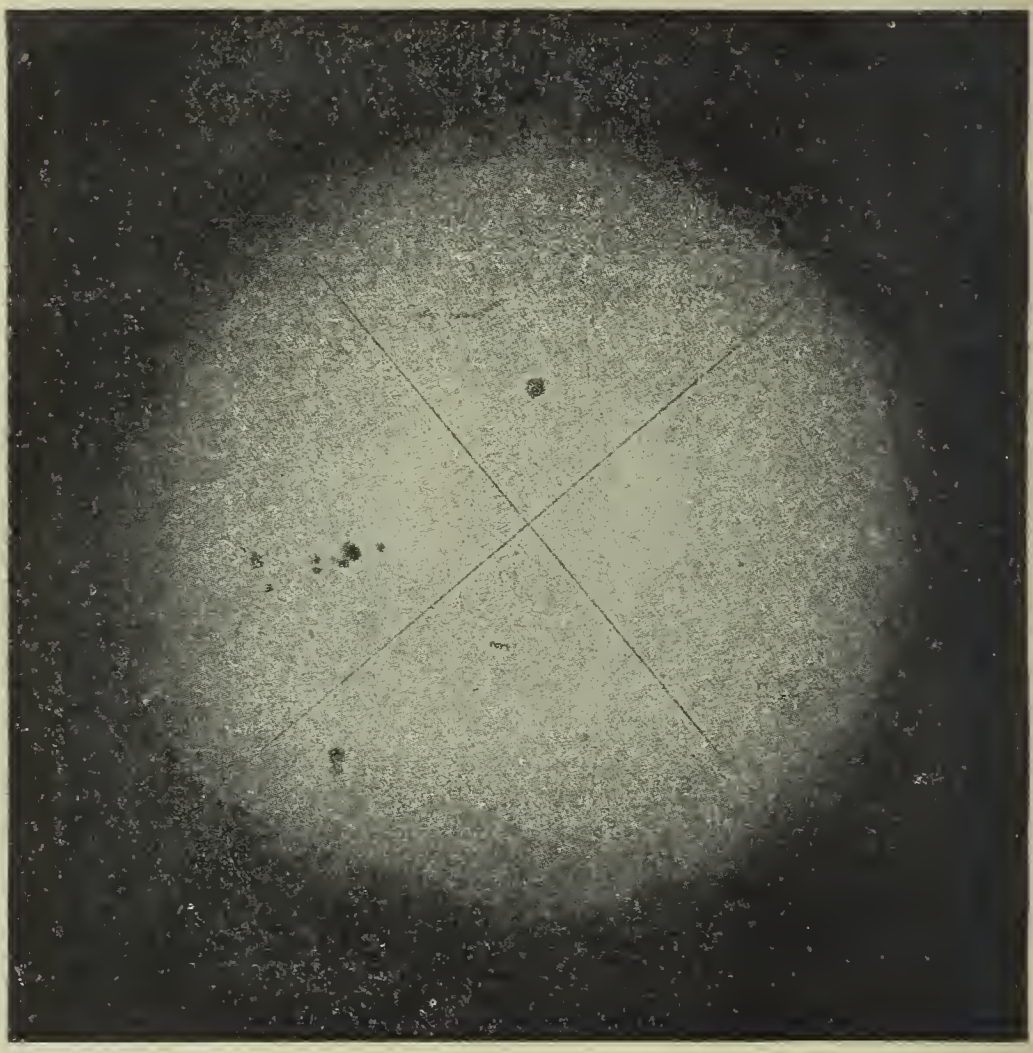


Рис. 44. Фотографія солнца.
(Изъ книги Стратонова Солнце).

При сильныхъ увеличеніяхъ видно, что полутѣнь состоитъ изъ тонкихъ полосокъ, идущихъ лучеобразно къ ядру; получается впечатлѣніе, что съ поверхности солнца по скатамъ пятна изливаются въ ядро струи свѣтлыхъ потоковъ.

Пятна, видимыя вблизи солнечнаго края, всегда окружены изогнутыми свѣтлыми полосами, болѣе яркими, чѣмъ окружающая солнечная поверхность; онѣ называются *факелами*. Факелы обыкновенно кажутся возвышающимися надъ краями пятна. Часто факелы бываютъ видны тамъ, гдѣ исчезло бывшее раньше пятно.

Кромѣ пятенъ, на солнцѣ видны еще мелкія темныя точки, называемыя *порами*. Поры усѣиваютъ всю поверхность солнца, придавая ей зернистый видъ. Свѣтлыя мѣста между порами имѣютъ очертанія, напоминающія *ивовыя листья* или *рисовыя зерна*,—такъ ихъ прежде называли. Теперь ихъ называютъ *зернами* или *грануляціями*; эти-то зерна и даютъ главную массу свѣта. Поверхностный слой солнца, состоящій изъ этихъ зеренъ, называютъ *фотосферой* (т.-е. свѣтящейся оболочкой солнечнаго шара). (Рис. 45.)

Края солнца окружены кольцомъ розоваго цвѣта, называемымъ *хромосферой* (окрашенной оболочкой); ее не видно ни про-

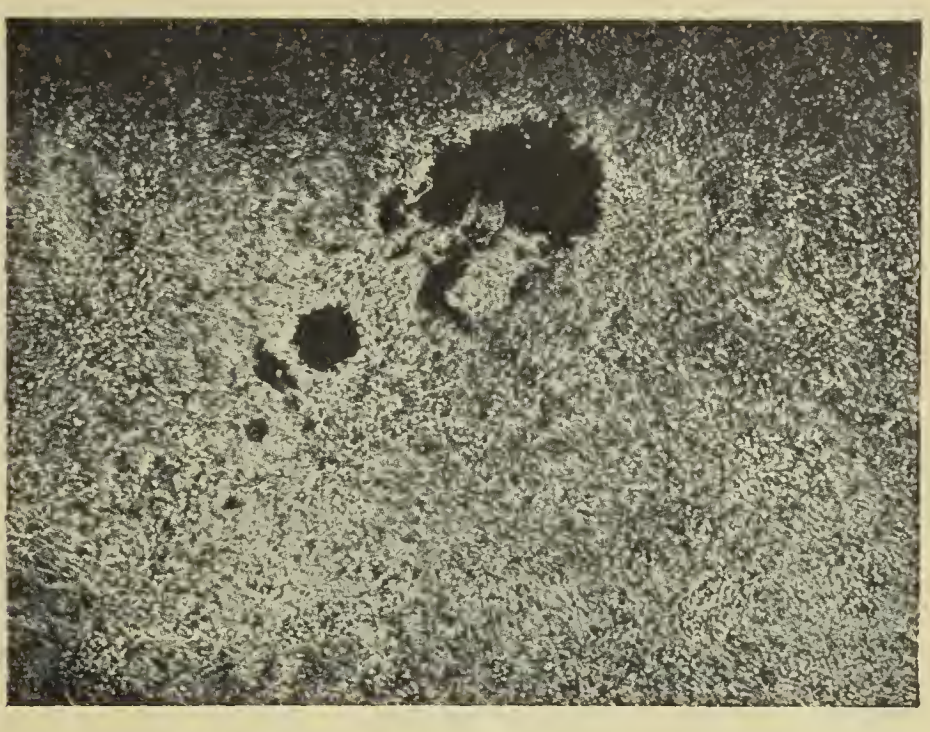


Рис. 45. Солнечная грануляція и пятна.

стымъ глазомъ, ни въ трубу при обыкновенныхъ условіяхъ; видѣть ее удается только при полныхъ солнечныхъ затменіяхъ или съ помощью спектроскопа. Тогда за чернымъ дискомъ луны появляются различные по величинѣ и формѣ выступы розоваго цвѣта, напоминающіе то языки пламени, то клочки облаковъ, оторвавшіеся отъ края солнца, то снопы колосьевъ, то огненные фонтаны (рис. 46). Они окаймляютъ дискъ солнца со всѣхъ сторонъ и поднимаются иногда до 130.000 верстъ высоты и болѣе. Эти выступы называются *протуберанцами* и состоятъ изъ газовъ: низкіе—изъ паровъ металловъ, а высокіе—изъ водорода и иногда другихъ легкихъ газовъ. Протуберанцы такъ же непо-

Рис. 46. Протуберанцы.

стоянны, какъ пятна: нѣкоторые образуются и разсѣиваются въ нѣсколько минутъ, другіе держатся долго. При полныхъ солнечныхъ затменіяхъ, кромѣ розоваго пламени протуберанцевъ, бываютъ видны длинные серебристаго цвѣта лучи, идущіе во всѣ

стороны отъ солнца; форма и длина лучей тоже весьма различна при разныхъ затменіяхъ. Эти лучи называются *солнечной короной*; они тянутся иногда на огромное разстояніе, превышающее поперечникъ самого солнца.

4. Строеніе солнца. Зодіакальный свѣтъ. Солнце состоитъ изъ раскаленнаго шарообразнаго *ядра* и газовой оболочки, т.-е. *атмосферы*. Въ телескопъ видно, что солнечная поверхность гораздо свѣтлѣе посрединѣ, чѣмъ на краяхъ (см. рис. 41 и 44); это происходитъ вслѣдствіе того, что на краяхъ солнца свѣтъ его проходитъ гораздо бо́льшую толщину солнечной атмосферы прежде, чѣмъ достигнетъ нашихъ глазъ. Въ спектроскопѣ солнечная поверхность *(фотосфера)* даетъ яркую радужную полосу спектра, пересѣченную безчисленнымъ множествомъ темныхъ линій (см. таблица I, при стр. 290); эти линіи зависятъ отъ тѣхъ газовъ, которые составляютъ солнечную атмосферу; она состоитъ преимущественно изъ водорода и паровъ различныхъ металловъ, особенно желѣза, калія и натрія. Въ атмосферѣ солнца встрѣчается большинство тѣлъ, изъ которыхъ состоятъ земная кора и атмосфера; но нѣкоторыхъ распространенныхъ на землѣ элементовъ, напримѣръ, кислорода и золота, на солнцѣ до сихъ поръ не найдено. Съ другой же стороны, въ атмосферѣ солнца встрѣчаются такіе газы, которые еще не найдены на землѣ.

Въ настоящее время большинство астрономовъ принимаетъ, что внутренность солнца состоитъ изъ раскаленныхъ *газовъ*, сильно сжатыхъ давленіемъ верхнихъ слоевъ. Температура возрастаетъ по направленію къ центру солнца, гдѣ она должна достигать такой степени, при которой невозможно ни твердое, ни жидкое состояніе вещества. Раскаленные газы поднимаются непрерывными потоками вверхъ, къ поверхности солнца и здѣсь постепенно охлаждаются; на высотѣ 650.000 верстъ отъ центра температура и давленіе уменьшаются на столько, что газы сгущаются въ *облака*, т.-е. въ отдѣльныя массы, состоящія изъ микроскопическихъ *жидкихъ* капель раскаленнаго вещества. Поэтому спектръ, даваемый этими облаками, будетъ *сплошной*, какъ отъ раскаленной жидкости. Эти облака имѣютъ отъ 200 до 2.000 верстъ въ поперечникѣ и кажутся намъ *зернами фотосферы:* они даютъ самый яркій свѣтъ изъ всѣхъ составныхъ частей солнца. Поры представляютъ промежутки между облаками.

Надъ фотосферой солнца находятся: 1) розовый слой *хромосферы* (5.000—15.000 верстъ толщины), состоящій изъ смѣси раскаленныхъ металлическихъ паровъ и болѣе легкихъ газовъ, и 2) серебристобѣлый слой *солнечной короны*, состоящей, главнымъ

образомъ, изъ газа, на землѣ до сихъ поръ не обнаруженнаго и названнаго *короніемъ*.

Солнечная атмосфера, разумѣется, тоже находится въ постоянномъ движеніи. Раскаленные пары и газы, поднимаясь изъ внутреннихъ частей солнца сквозь фотосферу, охлаждаются на различной высотѣ; при извѣстной температурѣ вещества, составляющія эти газы, вступаютъ между собою въ соединенія, болѣе тяжелыя, чѣмъ сами газы. Вслѣдствіе этой причины и вслѣдствіе охлажденія на большой высотѣ они сгущаются и падаютъ обратно на поверхность солнца, образуя *ядро солнечныхъ пятенъ*. Вслѣдствіе круговорота въ атмосферѣ и фотосферѣ получается воронка, въ которую втягиваются струями блестящія облака фотосферы; такъ происходитъ *полутѣнь*.

Соединенія паровъ и газовъ, проникая сквозь фотосферу въ глубину солнца, разлагаются вновь отъ страшнаго жара. По временамъ происходятъ сильные взрывы: потоки паровъ и газовъ поднимаются вверхъ на огромную высоту въ видѣ фонтановъ, поднимая надъ собою, въ мѣстѣ образованія, облака фотосферы. Эти фонтаны на дискѣ солнца кажутся намъ *факелами*, на краяхъ солнца—*протуберанцами* (выступами).

Бываютъ періоды, когда въ теченіе нѣсколькихъ недѣль на солнцѣ не удается видѣть почти ни одного пятна; потомъ число ихъ начинаетъ увеличиваться и черезъ $3^1/_2$ года достигаетъ наибольшей величины; тогда ежедневно можно наблюдать нѣсколько группъ пятенъ. Послѣ того ихъ число вновь идетъ на убыль. Эти колебанія числа пятенъ повторяются черезъ 11 лѣтъ.

Теплота солнца, повидимому, зависитъ отъ трехъ причинъ: первая, и самая важная, состоитъ въ томъ, что образованіе солнца еще не закончено. Оно образуется сжатіемъ газовъ, входившихъ прежде въ составъ туманности, и это сжатіе еще продолжается до сихъ поръ. Оно развиваетъ громадное количество тепла. Вторая причина — паденіе на солнце безчисленныхъ мелкихъ частицъ, носящихся въ пространствѣ, такъ называемыхъ метеоровъ. Третья причина — явленія, происходящія на самомъ солнцѣ: соединенія разныхъ газовъ, взрывы и т. д. Но все-таки охлажденіе солнца съ теченіемъ милліоновъ лѣтъ должно взять верхъ надъ поддержаніемъ тепла. Солнце покроется твердой корой, перестанетъ давать свѣтъ, а потомъ и теплоту. Вслѣдствіе его охлажденія на землѣ и всѣхъ планетахъ должна угаснуть всякая жизнь.

Ежегодно, съ половины декабря, въ южной и средней Россіи можно видѣть на западѣ, когда исчезнетъ вечерняя заря и появятся звѣзды 6-й величины, очень слабое бѣлое сіяніе, идущее

Рис. 47. Зодіакальный свѣтъ (стр. 322).

наклонно влѣво вверхъ отъ мѣста погасшей зари по созвѣздіямъ Зодіака. Сіяніе это получило названіе *зодіакальнаго свѣта* (рис. 47, таблица V). Съ декабря до апрѣля яркость его увеличивается; въ маѣ зодіакальный свѣтъ въ сѣверномъ полушаріи исчезаетъ въ свѣтѣ зари. Приблизительно въ августѣ онъ становится видимъ на востокѣ, передъ утренней зарей, но уже наклоненъ *вправо* вверхъ. Въ ноябрѣ онъ становится незамѣтенъ, а въ декабрѣ снова появляется на западѣ. Меркурій и Венера всегда бываютъ видны въ полосѣ зодіакальнаго свѣта (если только онъ бываетъ виденъ во время наблюденія этихъ планетъ); очевидно, онъ простирается отъ солнца дальше орбиты Венеры. Природа зодіакальнаго свѣта еще не открыта, какъ и его точная форма. Думаютъ, что это скопленіе мелкихъ тѣлъ, обращающихся около солнца. Еще болѣе загадочнымъ представляется явленіе «*отблеска*»; такъ называется слабое сіяніе, которое иногда удавалось замѣчать на ночномъ небѣ въ сторонѣ прямо противоположной солнцу.

XIII. Планеты.

1. Орбиты планетъ. Вокругъ солнца обращаются 8 большихъ планетъ и болѣе 600 малыхъ, называемыхъ *астероидами* (звѣздоподобными, потому что въ телескопъ онѣ имѣютъ видъ мелкихъ звѣздочекъ). 8 большихъ планетъ раздѣляются на 2 группы: первыя четыре, ближайшія къ солнцу, Меркурій, Венера, Земля и Марсъ, могутъ быть названы по величинѣ средними; онѣ всѣ четыре вмѣстѣ гораздо меньше, чѣмъ самая малая изъ четырехъ болѣе далекихъ планетъ. Эти четыре, составляющія вторую группу, Юпитеръ, Сатурнъ, Ураиъ и Нептунъ отличаются своими огромными размѣрами и малой плотностью.

Если бы всѣ орбиты планетъ лежали въ одной плоскости и были бы правильными кругами, то движенія планетъ были бы равномѣрны; тогда чрезвычайно легко и просто было бы опредѣлять положеніе каждой планеты на любой день.

Проведемъ мысленно отъ солнца одну прямую линію къ землѣ, другую—къ планетѣ, напримѣръ, къ Венерѣ. Эти линіи образуютъ уголъ, который постоянно мѣняется по мѣрѣ движенія планетъ. Въ моментъ нижняго соединенія Венеры обѣ линіи совпадаютъ. Черезъ 584 дня (синодическое обращеніе Венеры) вновь наступитъ нижнее соединеніе, т.-е. Венера обгонитъ землю на цѣлый кругъ, на 360°. Значитъ, въ одни сутки Венера обгонитъ землю на $\frac{360^\circ}{584}$, т.-е. на 0°37′. Между тѣмъ сама земля проходитъ

въ сутки $\frac{360^\circ}{365^1/_4}$, т.-е. $0^\circ 59'$. Отсюда ясно, что Венера передвигается въ сутки на $1^\circ 36'$, а полный кругъ по орбитѣ сдѣлаетъ въ $\frac{360^\circ}{1^\circ 39'}$, т.-е. въ 225 дней. Такъ можно опредѣлить время обращенія и среднее суточное движеніе каждой планеты, зная ея синодическое обращеніе; и наоборотъ, по ея обращенію вокругъ солнца (такъ называемому звѣздному или сидерическому) легко опредѣлить ея синодическое обращеніе.

Зная разстоянія планетъ отъ солнца (т.-е. зная, во сколько разъ эти разстоянія больше или меньше разстоянія земли) и среднее суточное движеніе по орбитѣ (въ градусахъ), легко можно было бы получить видимое положеніе планеты на ея круговой орбитѣ на каждый день.

Но въ дѣйствительности орбиты всѣхъ планетъ наклонены къ эклиптикѣ; половину своей орбиты каждая планета проходитъ сѣвернѣе плоскости земной орбиты, половину—южнѣе.

Далѣе орбиты планетъ—не круги, а эллипсы, движенія ихъ неравномѣрны, и разстоянія отъ солнца мѣняются. Поэтому для каждой планеты надо опредѣлить наклонъ ея орбиты, положеніе *линіи узловъ* (т.-е. линіи пересѣченія ея орбиты съ земной орбитой), сплюснутость (эксцентриситетъ) ея эллипса и положеніе его большой оси.

Положеніе большой оси и линіи узловъ считаются отъ точки весенняго равноденствія, т.-е. отъ линіи, проведенной изъ солнца къ мѣсту земной орбиты, гдѣ земля находится 11 сентября, въ день осенняго равноденствія; эта линія встрѣчаетъ небесный сводъ въ созвѣздіи Рыбъ, въ той точкѣ, въ которой мы съ земли видимъ солнце въ день весенняго равноденствія. Другую линію проведемъ изъ солнца въ ту точку, гдѣ планета пересѣкаетъ плоскость земной орбиты съ юга на сѣверъ; уголъ между этими линіями называется *долготою восходящаго узла*. Онъ считается отъ точки весенняго равноденствія по эклиптикѣ къ востоку. Проведя изъ солнца линію къ перигелію планетной орбиты, опредѣлимъ разстояніе перигелія отъ узла. Теперь мы знаемъ положеніе орбиты, а зная на ней положеніе планеты въ какой-нибудь моментъ, время ея обращенія и среднее разстояніе отъ солнца опредѣлимъ вычисленіемъ положеніе планеты, видимое съ земли или съ солнца, для любого момента.

Рис. 48 изображаетъ орбиты всѣхъ планетъ и двѣ орбиты кометъ. Каждый миллиметръ на этомъ рисункѣ содержитъ $37^1/_2$ милліоновъ верстъ. Размѣры планетъ и ихъ орбитъ показаны въ таблицѣ IX, въ концѣ книги.

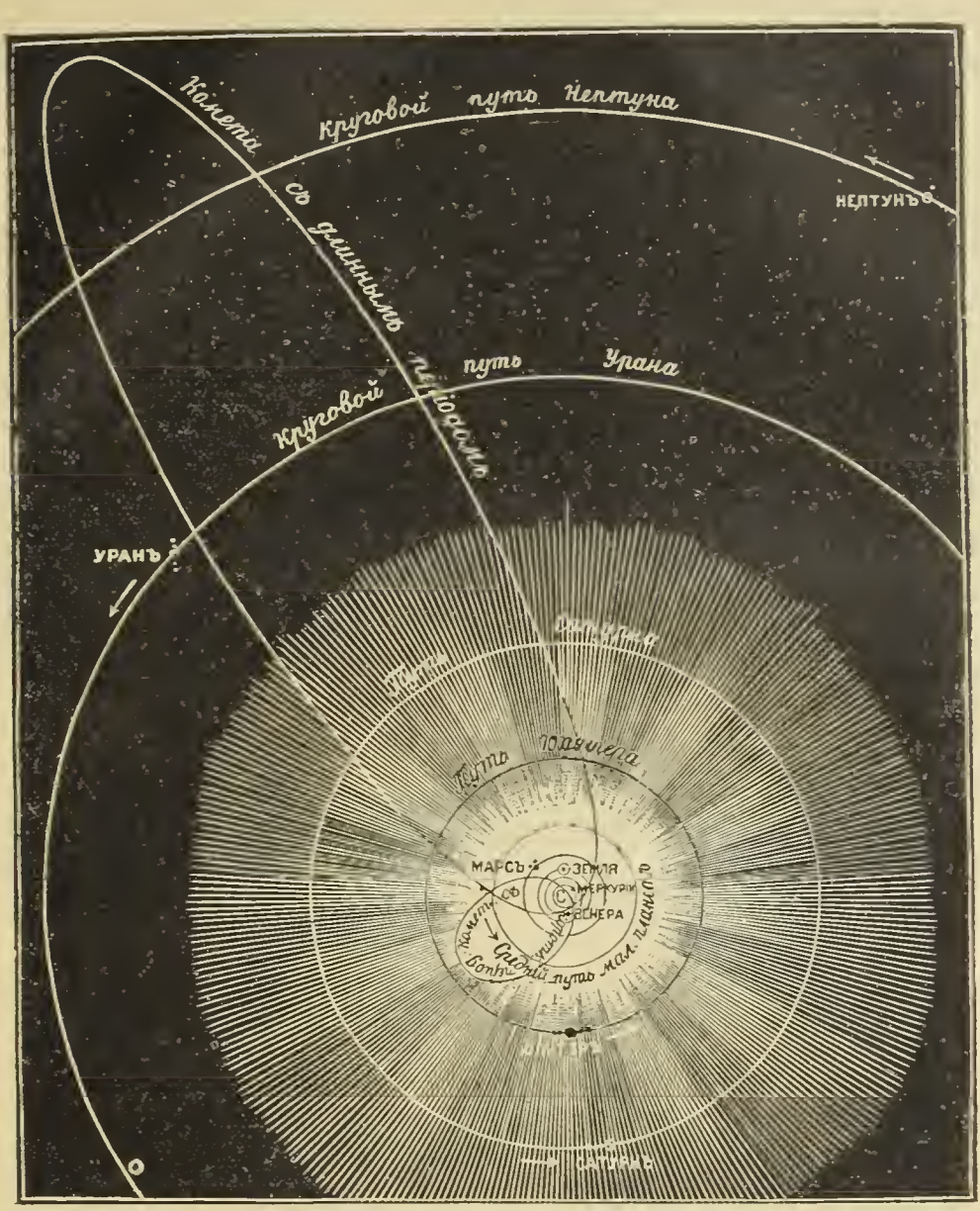


Рис. 48. Орбиты планетъ.

2. Меркурій ☿. Ближайшая къ солнцу планета, Меркурій, въ телескопъ представляетъ всѣ фазы, которыя имѣетъ луна: находясь по другую сторону солнца, онъ обращенъ къ землѣ освѣщенной стороной и имѣетъ видъ маленькаго свѣтлаго кружочка, но не можетъ быть видимъ простымъ глазомъ вслѣдствіе близости къ диску солнца. Это—верхнее соединеніе. Обходя вокругъ солнца, онъ быстро приближается къ землѣ и поворачивается къ ней постепенно темной стороной. Видимый діаметръ увеличивается, а ширина свѣтлой части уменьшается. Въ нижнемъ соединеніи Меркурій ближе всего къ землѣ; онъ обращенъ къ

землѣ темной стороной. Если нижнее соединеніе совпадаетъ съ прохожденіемъ его черезъ узелъ, т.-е. черезъ плоскость земной орбиты, то Меркурій проходитъ по диску солнца отъ восточнаго края къ западному въ видѣ совершенно чернаго круглаго пятна. Прохожденія Меркурія повторяются черезъ 7, 10, 3, 10, 3, 13, 7, 10, 3, 10, 3, 13 лѣтъ и такъ далѣе въ томъ же порядкѣ. Послѣднее прохожденіе было 14 ноября 1907 г.; слѣдующее будетъ 7 ноября 1914 г., 7 мая 1924 г., 9 ноября 1927 г., 11 мая 1937 г., 10 ноября 1940 г. по новому стилю. На поверхности планеты видны темныя и свѣтлыя пятна неопредѣленныхъ очертаній.

3. Венера. ♀. Вторая по порядку отъ солнца планета, Венера, для насъ самое яркое свѣтило послѣ солнца и луны, самая прекрасная изъ звѣздъ. Въ телескопѣ она представляетъ тѣ же фазы, что луна и Меркурій (рис. 49, таблица VI).

Если нижнее соединеніе совпадаетъ съ прохожденіемъ Венеры черезъ плоскость земной орбиты, то мы видимъ прохожденіе ея по диску солнца.

Видимая въ телескопъ поверхность Венеры блеститъ такъ ярко, что на ней ничего не удается разглядѣть. Можно подумать, что она вся покрыта снѣгомъ или блестящими бѣлыми облаками. Въ трубу Венера видна на небѣ всегда среди бѣлаго дня. Простымъ глазомъ ее можно видѣть днемъ только во время наибольшей яркости.

Въ телескопъ можно видѣть, что освѣщенная часть Венеры уменьшается въ яркости отъ края къ границѣ свѣта и тѣни, это замѣтно даже въ маленькую трубу. Сама граница свѣтлой и темной сторонъ размыта и имѣетъ зазубрины. Иногда рога тонкаго серпа Венеры вблизи нижняго соединенія почти сходятся вмѣстѣ, образуя почти полный кругъ. Наблюденія показываютъ, что Венера окружена довольно высокой и плотной *атмосферой*.

4. Марсъ ♂. Марсъ имѣетъ двухъ спутниковъ.

Во время соединенія (когда земля и Марсъ находятся на противоположныхъ сторонахъ солнца) и во время противостоянія, когда обѣ планеты находятся на одной сторонѣ, Марсъ обращенъ къ землѣ своей освѣщенной стороной и имѣетъ въ трубу видъ полной луны. Между соединеніемъ и противостояніемъ къ землѣ обращается часть его неосвѣщенной стороны, такъ что Марсъ имѣетъ видъ неполной луны.

На поверхности Марса въ трубу средней силы видны темныя и свѣтлыя пятна различной формы; и тѣ и другія имѣютъ красноватый оттѣнокъ, такъ что Марсъ всегда кажется краснымъ. Пятна эти движутся всегда въ одну и ту же сторону, отъ восточнаго края къ западному, и всѣ проходятъ по видимой поверх-

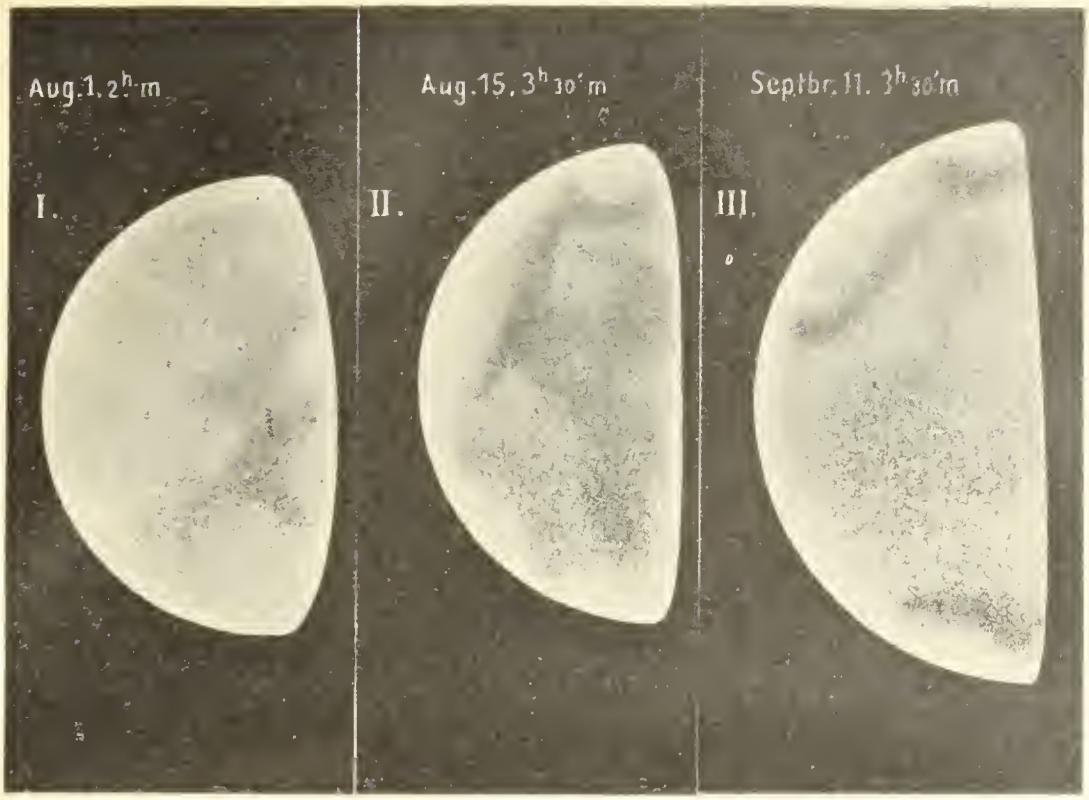


Рис. 49. Фазы Венеры (стр. 326)

Рис. 51. Марсъ (по наблюденіямъ проф. Лоуэлля въ 1905 г., стр. 327).
Изъ книги Стратонова „Солнце".

ности Марса въ одно и то же время, въ 12 часовъ съ небольшимъ. Отсюда заключаютъ, что Марсъ вращается вокругъ своей оси отъ запада къ востоку въ 25 часовъ.

Экваторъ Марса наклоненъ къ орбитѣ подъ угломъ въ 24°52′ т.-е. почти такъ же, какъ и земной экваторъ къ эклиптикѣ, поэтому на Марсѣ имѣетъ мѣсто смѣна временъ года подобная земной.

Марсъ окруженъ атмосферой: края его свѣтятся слабѣе средины, граница свѣта и тѣни во время фазъ размыта, свѣтлыя и темныя пятна становятся менѣе ясно видны у краевъ.

На полюсахъ Марса видны круглыя бѣлыя пятна, на каждомъ полюсѣ по одному пятну. Когда сѣверное полушаріе Марса поворачивается къ солнцу, пятно на немъ замѣтно уменьшается, на южномъ увеличивается, и наоборотъ. При уменьшеніи бѣлаго пятна пространство, вокругъ него, прежде имъ занятое, становится темнымъ. Эти бѣлыя пятна на полюсахъ можно считать

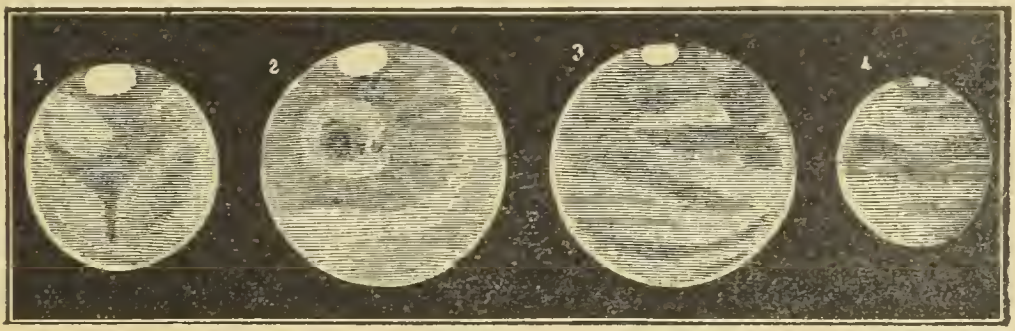


Рис. 50. Марсъ во время противостоянія, въ 1877 году.

какими-либо осадками въ родѣ снѣга или инея, которые зимой увеличиваются, а лѣтомъ уменьшаются.

Свѣтлыя пятна (ярко розовыя и красныя) на Марсѣ считаются сушей, темныя—водою, хотя ея существованіе на Марсѣ не доказано. Рис. 50 изображаетъ Марса во время противостоянія 1877 года. Видно бѣлое пятно южнаго полюса (сѣверный полюсъ невидимъ), постепенно уменьшающееся въ размѣрахъ; видимая величина самого Марса сначала увеличивается, а послѣ противостоянія уменьшается.

Знаменитый Скіапарелли открылъ въ 1879 году на Марсѣ цѣлую сѣть прямыхъ темныхъ линій, которыя онъ назвалъ *каналами* (рис. 51, таблица VI). Что это за каналы, почему они имѣютъ прямую форму и почему иногда они двойные, а иногда одиночные, до сихъ поръ еще не выяснено. Послѣднія наблюденія Черулли, Ньюкома, Антоніади и др. показываютъ, что самые каналы на Марсѣ суть сливающіеся въ непрерывную линію ряды темныхъ пятенъ на его поверхности.

На Марсѣ есть атмосфера, хотя мы еще точно не знаемъ, состоитъ ли она изъ тѣхъ же газовъ, какъ и на землѣ; есть моря изъ жидкости, замерзающія въ холодное время въ видѣ снѣга, хотя состава ея мы тоже не знаемъ. На Марсѣ есть жаркій поясъ, почти на 3° болѣе широкій, чѣмъ на землѣ, есть два умѣренныхъ, на 3° болѣе узкіе, чѣмъ земные, наконецъ оба полюса окружены опять болѣе широкими холодными поясами.

Относительно растительной и животной жизни на Марсѣ ничего опредѣленнаго сказать нельзя. Тѣмъ болѣе нѣтъ основаній говорить о разумныхъ обитателяхъ Марса, съ которыми можно было бы земнымъ жителямъ вступить въ сношенія посредствомъ особыхъ сигналовъ, какъ объ этомъ думали нѣкоторые астрономы.

Въ 1877 г. астрономъ Галль въ Вашингтонѣ (Америка) открылъ у Марса двухъ спутниковъ, названныхъ *Фобосомъ* и *Деймосомъ* (см. таблицу X, въ концѣ книги). Видѣть ихъ можно только въ самые сильные телескопы.

5. Малыя планеты. Во второй половинѣ XVIII столѣтія астрономы Тиціусъ и Бодэ подмѣтили законъ планетныхъ разстояній отъ солнца: если написать подъ рядъ нѣсколько разъ 4, а потомъ, начиная со второго числа, прибавлять 3, 6, 12, 24, 48 и т. д., удваивая всякій разъ число, то получится рядъ чиселъ, соотвѣтствующій разстояніямъ планетъ отъ солнца:

4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,
0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384,
4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388... разстоянія по закону Бодэ.
☿ ♀ ♁ ♂ ♃ ♄ ♅ ♆
4, 7, 10, 15 52, 95, 192, 301... дѣйствительныя разстоянія.

Если разстояніе земли раздѣлить на 10 частей, то разстояніе Меркурія будетъ имѣть такихъ частей 4, Венеры 7, Земли 10, Марса 16, Юпитера 52, Сатурна 100. Рядъ этотъ не совсѣмъ точенъ; какъ видимъ, разстояніе Марса не 16, а 15, разстояніе Сатурна не 100, а 95.

Хотя для разстоянія 28 въ то время не было извѣстно планеты, тѣмъ не менѣе астрономы вѣрили, что между Марсомъ и Юпитеромъ на разстояніи 28 должна быть неизвѣстная еще планета. Когда Гершель открылъ новую планету, Урана, то оказалось, что его разстояніе отъ солнца равно 192, т.-е. очень близко къ числу 196, указанному закономъ Бодэ. Это еще болѣе увѣрило всѣхъ, что между Марсомъ и Юпитеромъ должна существовать планета. 1 января 1801 г. астрономъ Піацци въ Сициліи наблюдалъ въ созвѣздіи Тельца звѣздочку 8-й величины,

которая на слѣдующую ночь перешла на 4′ къ западу. Оказалось, что это была планета. На основаніи произведенныхъ Піацци наблюденій, знаменитый нѣмецкій математикъ Гауссъ вычислилъ ея орбиту и опредѣлилъ, что ея среднее разстояніе отъ солнца равно 2,8 разстоянія земли, т.-е. 28 десятыхъ частей его. Время обращенія ея равняется 4,6 годамъ. Планета получила имя *Цереры*. Такъ былъ заполненъ промежутокъ между Марсомъ и Юпитеромъ и оправдался законъ Бодэ. Но годъ спустя, астрономъ Ольберсъ нашелъ другую планету на среднемъ разстояніи отъ солнца, тоже 2,8 и со временемъ обращенія всего на 4 дня больше, чѣмъ у Цереры. Новая планета названа *Палладой*.

Въ томъ же 1802 г. астрономъ Гардингъ нашелъ звѣзду 8-й величины, оказавшуюся планетой на разстояніи 2,7. Ей дали имя *Юноны*. Предположили, что всѣ три новыя планеты составляютъ обломки одной большой планеты, разорвавшейся или разбитой при какомъ-нибудь столкновеніи. Въ 1807 г. Ольберсъ нашелъ новую планету, имѣвшую видъ звѣзды 6-й величины, на разстояніи отъ солнца 2,4, со временемъ обращенія немного болѣе $3^1/_2$ лѣтъ. Ее назвали *Вестой*. Это — единственная изъ малыхъ планетъ, которую можно видѣть простымъ глазомъ во время противостояній. Черезъ 38 лѣтъ послѣ Весты, въ 1845 году, была открыта пятая планета, *Астрея*. Затѣмъ, съ 1847 года, не проходило ни одного года, чтобы не открыли одну или нѣсколько планетъ. Съ помощью телескопа больше всѣхъ открылъ астрономъ Пализа, съ помощью фотографіи — Вольфъ и Шарлуа.

Теперь число ихъ достигаетъ около 700.

Всѣ эти планеты имѣютъ видъ звѣздъ 8-й величины и слабѣе. Только немногія изъ нихъ имѣютъ діаметръ, замѣтный лишь въ самые громадные телескопы. Большинство астероидовъ, повидимому, имѣютъ размѣры въ 40—50 километровъ въ діаметрѣ.

Ближе всѣхъ къ землѣ подходитъ планета *Эросъ*, единственная, получившая мужское имя. Наблюденія Эроса дали возможность точно измѣрить его параллаксъ, а слѣдовательно, и разстояніе до солнца и всѣхъ планетъ.

6. Юпитеръ $\mathit{4}$. Самая громадная изъ планетъ, находится въ 5,2 разъ дальше отъ солнца, чѣмъ земля. Въ трубу на Юпитерѣ (рис. 52, таблица VII) видны длинныя поперечныя полосы и мелкія пятна. Всѣ они движутся отъ восточнаго края къ западному и возвращаются на старое мѣсто, приблизительно, черезъ 10 часовъ.

Пятна на экваторѣ Юпитера движутся при его вращеніи нѣсколько быстрѣе, чѣмъ пятна, близкія къ полюсамъ; время вра-

щенія экватора считаютъ, приблизительно, въ 9 ч. 56 мин. Изъ этого слѣдуетъ, что видимая нами поверхность Юпитера не твердая, а состоитъ, вѣроятно, изъ облаковъ.

Юпитеръ замѣтно сплюснутъ на оси; ось его вращенія короче діаметра экватора; разница около $^1/_{16}$ діаметра экватора, что происходитъ вслѣдствіе громадной центробѣжной силы на экваторѣ Юпитера.

Даже въ небольшую трубу хорошо различаются на поверхности Юпитера двѣ темныхъ полосы по обѣ стороны экватора. Къ сѣверу и къ югу отъ нихъ бываютъ видны и другія, менѣе широкія полосы. Однако видъ поверхности Юпитера постоянно измѣняется. Поверхность Юпитера окутана атмосферой, въ которой находится масса облаковъ; темныя полосы по сторонамъ экватора представляютъ, вѣроятно, болѣе прозрачныя мѣста.

Въ 1878 г. въ южномъ полушаріи Юпитера рѣзко выдѣлилось длинное яйцевидное пятно краснаго цвѣта, которое замѣчено было еще Кассини въ 1664 г., но потомъ нѣсколько разъ исчезало. Оно было расположено около южной темной полосы, которая въ этомъ мѣстѣ образовала подъ нимъ изгибъ. Къ 1890 г. красный цвѣтъ пятна исчезъ; оно стало сѣрымъ, но все еще хорошо было видно даже въ маленькую трубу.

Изъ всего, видимаго на Юпитерѣ, мы можемъ заключить, что на немъ *еще не закончилось образованіе твердой коры и устройство поверхности.*

Четыре яркихъ спутника Юпитера легко можно видѣть въ небольшую трубу и даже иногда въ очень сильный бинокль.

Эти спутники обыкновенно обозначаются номерами, по порядку разстоянія отъ Юпитера; но имъ были даны и имена: Io (I), Европа (II), Ганимедъ (III), Каллисто (IV) (см. таблица X, въ концѣ книги).

Обходя вокругъ Юпитера, спутники проходятъ между нимъ и землей, три первыхъ при каждомъ обращеніи, четвертый же иногда проходитъ выше или ниже диска. При такомъ прохожденіи, спутникъ кажется темной точкой, ползущей по диску планеты. Проходя между солнцемъ и Юпитеромъ, спутникъ бросаетъ на планету свою тѣнь. Эта тѣнь хорошо видна въ небольшую трубу въ формѣ маленькаго, круглаго, чернаго пятна. Въ мѣстѣ, гдѣ падаетъ тѣнь, на Юпитерѣ происходитъ полное затменіе солнца спутникомъ. Проходя позади Юпитера, спутники скрываются за его дискомъ; это называется *покрытіемъ спутника Юпитеромъ.*

Юпитеръ отбрасываетъ отъ себя въ сторону, противоположную солнцу, громадную тѣнь. Попадая въ эту тѣнь, спутники

Рис. 52. Юпитеръ (по наблюденіямъ Кома-Сола въ 1904 г., стр. 329).
(Изъ книги Стратонова „Солнце“).

Рис. 53. Сатурнъ (стр. 331).

Астрономія. Таблица VII.

лишаются свѣта и исчезаютъ для нашихъ глазъ. Это *затменія спутниковъ Юпитера*. Въ астрономическихъ календаряхъ точно указанъ часъ, минута и секунда, когда исчезаетъ и появляется вновь каждый спутникъ при затменіи. Пользуясь этимъ, можно измѣрить долготу мѣста наблюденія, если извѣстно точно мѣстное время (въ календарѣ дано время какой-нибудь обсерваторіи).

Всѣ эти наблюденія можетъ дѣлать каждый любитель въ маленькую трубу.

Въ большіе телескопы удалось измѣрить діаметры спутниковъ. Оказалось, что самый большой, третій, почти вдвое меньше земли, а самый меньшій изъ четырехъ спутниковъ, второй, почти равенъ лунѣ.

Спутники мѣняютъ періодически свою яркость. Изъ наблюденій этихъ перемѣнъ заключили, что они обращены къ Юпитеру всегда одной и той же стороной, какъ луна къ землѣ.

Въ недавнее время открыто еще четыре спутника.

Элементы спутниковъ даны въ таблицѣ X, въ концѣ книги.

7. Сатурнъ ♄. На разстояніи $9^1/_2$ радіусовъ земной орбиты отъ солнца движется самая удивительная изъ планетъ, Сатурнъ.

Въ большія трубы на Сатурнѣ (рис. 53, таблица VII) видны полосы и пятна; полосы похожи на полосы Юпитера, состоятъ, вѣроятно, изъ облаковъ и тянутся параллельно экватору. Сатурнъ окруженъ атмосферой; по его малой плотности и сильному сжатію у полюсовъ можно думать, что онъ еще не покрытъ твердой корой; на немъ, какъ и на Юпитерѣ, должны совершаться постоянные перевороты.

Сатурнъ отличается отъ всѣхъ небесныхъ тѣлъ своимъ кольцомъ, которое окружаетъ его экваторъ; это кольцо хорошо видно и въ небольшія трубы.

Уже Галилей замѣтилъ по бокамъ Сатурна какіе-то придатки. Гюйгенсъ первый открылъ, что Сатурнъ окруженъ тонкимъ плоскимъ кольцомъ, нигдѣ не прикасающимся къ планетѣ; онъ сдѣлалъ его рисунокъ и отмѣтилъ на немъ тѣнь, которую кольцо бросаетъ на планету. Въ свою очередь, тѣнь планеты бываетъ видна на кольцѣ.

Въ сильные телескопы видно, что кольцо дѣлится на нѣсколько частей; различаютъ три главныхъ: внутреннее полупрозрачное, среднее самое блестящее и наружное, отдѣленное отъ средняго темнымъ промежуткомъ, называемымъ «дѣленіемъ Кассини».

Кольцо имѣетъ форму правильнаго круга, но намъ оно обыкновенно представляется эллипсомъ. Малая ось этого эллипса изъ года въ годъ мѣняетъ свою величину: наибольшая ве-

личина ея приблизительно равна оси Сатурна; при наименьшей величинѣ малой полуоси кольцо имѣетъ видъ тонкой полоски, въ видѣ прямой линіи, пересѣкающей Сатурна. Иногда отъ кольца ничего не видно. Эти явленія происходятъ оттого, что плоскость кольца образуетъ съ эклиптикой уголъ около 28° и при движеніи Сатурна по орбитѣ поворачивается къ землѣ и къ солнцу то ребромъ, то южной стороной, то сѣверной. Эти измѣненія повторяются каждыя 29 лѣтъ. Кольцо невидимо или видно узкой свѣтлой линіей, когда оно обращено къ землѣ ребромъ; это явленіе повторяется приблизительно черезъ 15 лѣтъ.

Ширина кольца 52.000 километровъ; толщина его очень мала. Новѣйшія изслѣдованія показываютъ, что это кольцо состоитъ изъ безчисленнаго множества мельчайшихъ твердыхъ частицъ, обращающихся самостоятельно вокругъ Сатурна и сливающихся для нашихъ глазъ въ одну сплошную полосу.

Сатурнъ имѣетъ 10 спутниковъ, названія и элементы которыхъ указаны въ таблицѣ X, въ концѣ книги.

8. Уранъ. ♅ **или** ♅ Въ 1781 году Вильямъ Гершель, наблюдая звѣзды въ созвѣздіи Близнецовъ, случайно увидѣлъ, что одна звѣзда 6-й величины имѣла въ телескопѣ замѣтный діаметръ и передвигалась между звѣздами. Сначала ее приняли за комету, но по вычисленіи ея орбиты оказалось, что эта звѣзда есть планета, и что ее наблюдали и раньше, но принимали за неподвижную звѣзду. Эта планета получила имя *Урана*.

Уранъ получаетъ свѣта и тепла въ 369 разъ меньше, чѣмъ земля. Дискъ его такъ малъ и такъ слабо освѣщенъ, что хотя на немъ и замѣчали полосы, однако вращенія вокругъ оси замѣтить не удалось.

Уранъ имѣетъ спутниковъ, изъ которыхъ намъ извѣстны 4: *Аріель*, *Умбріель*, *Титанія*, *Оберонъ*. Орбиты спутниковъ образуютъ съ орбитой Урана уголъ въ 98°, т.-е. уголъ, собственно, будетъ въ 82°, но движеніе спутниковъ направлено не съ запада на востокъ, а съ востока на западъ (правильнѣе, съ сѣвера на югъ).

За послѣднее время изслѣдованія спектра Урана показали, что онъ покрытъ атмосферой, отличающейся отъ земной. Но объ Уранѣ мы знаемъ вообще еще мало.

9. Нептунъ. ♆ Черезъ 40 лѣтъ послѣ открытія Урана замѣтили, что онъ сталъ двигаться медленнѣе, чѣмъ двигался раньше, и идетъ не по той орбитѣ, какая была вычислена. Ясно, что на него дѣйствуетъ притяженіе какой-то неизвѣстной планеты.

Два астронома, Адамсъ въ Англіи и Леверье во Франціи, стали вычислять, на какомъ разстояніи и въ какомъ направле-

ніи должна находиться новая планета, чтобы ея притяженіе могло оказать такое дѣйствіе на Урана. Адамсъ рѣшилъ свою задачу раньше; въ октябрѣ 1845 года онъ нашелъ, что новая планета должна находиться въ созвѣздіи Козерога, но указалъ ея мѣсто съ ошибкой въ 2°. Леверье окончилъ вычисленіе въ августѣ 1846 года и нашелъ, что новая планета должна имѣть яркость звѣзды 8 величины и находиться въ созвѣздіи Козерога на 1° отъ мѣста, найденнаго Адамсомъ. По указанію Леверье астрономъ Галле въ Берлинѣ нашелъ планету съ помощью очень подробной карты созвѣздія Козерога, какой тогда еще не было ни въ Лондонѣ, ни въ Парижѣ. Найдя на небѣ звѣзду 8-й величины, не указанную на картѣ, онъ въ сильный телескопъ увидалъ, что она имѣетъ діаметръ около 3″. Найденной планетѣ дали имя *Нептуна*. По закону Тиціуса-Бодэ разстояніе Нептуна должно было бы быть 388, считая разстояніе земли за 10; оказалось, что оно равно только 301.

Нептунъ получаетъ свѣта и тепла въ 906 разъ меньше земли. При такомъ скудномъ освѣщеніи и маломъ угловомъ діаметрѣ поверхность Нептуна не удалось разсмотрѣть, не удалось опредѣлить и время вращенія на оси.

У Нептуна есть спутникъ, который обращается вокругъ него *въ обратную* сторону, съ востока на западъ. Спутникъ имѣетъ яркость 14-й величины и доступенъ лишь самымъ сильнымъ телескопамъ.

XIV. Кометы. Метеоры.

1. Внѣшній видъ и движеніе кометъ. Слово «комета» значитъ по-гречески «волосатая». Такъ назывались въ древности небесныя свѣтила, которыя нашъ русскій народъ называетъ «звѣзда съ хвостомъ».

Каждая комета, видимая простымъ глазомъ, состоитъ изъ «*головы*» и «*хвоста*». Голова имѣетъ видъ свѣтлаго прозрачнаго туманнаго пятна, внутри его свѣтится «*ядро*»—туманная звѣзда, самая яркая часть кометы. Голова закруглена на сторонѣ обращенной къ солнцу, а на противоположной сторонѣ постепенно переходитъ въ хвостъ. Хвостъ имѣетъ видъ свѣтлой полосы, *по краямъ обыкновенно ярче, чѣмъ по оси*; яркость его постепенно ослабѣваетъ по мѣрѣ удаленія отъ головы. Хвосты бываютъ длинные и короткіе, прямые и изогнутые. Иногда хвостъ тянется на десятки градусовъ, занимая нѣсколько созвѣздій. *Хвостъ всегда направленъ въ сторону, противоположную солнцу*, иногда прямо, иногда съ небольшимъ уклономъ. Иныя кометы бываютъ такъ ярки, что ихъ можно видѣть днемъ, иныя едва различа-

ются простымъ глазомъ. Еще большее число кометъ совсѣмъ невидимы безъ помощи трубы; такія чаще не имѣютъ хвоста, иногда у нихъ почти отсутствуетъ ядро. Кометы появляются нерѣдко: въ годъ 5 — 6, но большинство изъ нихъ остается телескопическими. Яркія кометы обыкновенно появляются внезапно. *Хвостъ увеличивается по мѣрѣ приближенія къ солнцу и уменьшается по мѣрѣ удаленія.*

Въ древности только китайскіе астрономы считали кометы за небесныя свѣтила, другіе же астрономы считали ихъ за явленія въ верхнихъ слояхъ земной атмосферы. Первый Кеплеръ высказалъ мнѣніе, что кометы, какъ и планеты, обращаются вокругъ солнца, но онъ не опредѣлилъ ихъ орбитъ. Со времени же Кеплера астрономы стали тщательно отмѣчать положенія кометъ на небѣ, и поэтому Ньютонъ могъ вычислить ихъ орбиты, причемъ оказалось, что кометы движутся вокругъ солнца по параболамъ. Другъ Ньютона, Галлей, сталъ вычислять орбиты 24 кометъ, наблюдавшихся астрономами съ 1500 года и во всѣхъ случаяхъ оказалось, что кометы шли по параболамъ, въ фокусѣ которыхъ было солнце, но такъ какъ наблюденія производились только въ ничтожной части орбиты, вблизи вершины, то отличить параболу отъ очень длиннаго эллипса нельзя; наблюденія подходили и къ параболѣ и къ эллипсу. Галлей замѣтилъ, что изъ вычисленныхъ имъ 24 орбитъ три были одинаковы по разстояніи перигелія отъ солнца, скорости движенія и наклоненію орбиты къ эклиптикѣ. Это были орбиты кометъ 1531, 1607 и 1682 годовъ. Галлей заключилъ, что это одна и та же комета, которая совершаетъ оборотъ не по параболѣ, а по очень удлиненному эллипсу въ 76 или 75 лѣтъ. Разница во времени обращенія получилась отъ того, что комета прошла вблизи Юпитера и Сатурна, притяженіе которыхъ измѣнило періодъ ея обращенія. Если это такъ, то та же самая комета должна была появляться раньше, черезъ тѣ же сроки, и должна прійти послѣ 1682 года черезъ 75 лѣтъ, т.-е. около 1758 года. Дѣйствительно, въ прежнихъ наблюденіяхъ кометъ оказались наблюденія 1305, 1380 и 1456 года, когда появлялись яркія кометы. Совпаденіе срока (75 лѣтъ) убѣдило Галлея, что это одна и та же комета. Сдѣлавъ новыя вычисленія, принимая во вниманіе притяженіе Юпитера и Сатурна, онъ предсказалъ, что комета возвратится въ концѣ 1758 или въ началѣ 1759 года. Къ этому времени всѣ астрономы и всѣ образованные люди начали съ волненіемъ ожидать исполненія предсказанія Галлея. Въ декабрѣ 1758 года крестьянинъ Паличъ въ Саксоніи первый увидѣлъ въ сдѣланную имъ самимъ трубу возвратившуюся комету; въ февралѣ 1759 года она стала

видна простому глазу, перигелій она прошла 12 марта. Такимъ образомъ подтвердилось предсказаніе Галлея, и комета отнынѣ получила имя *кометы Галлея*. Она снова появлялась въ 1835 г. и 1909—1910 гг.

Астрономъ Энке изслѣдовалъ движеніе кометы, названной его именемъ. Она обращается вокругъ солнца въ 3 съ небольшимъ года, въ перигеліи подходитъ къ солнцу ближе Меркурія, въ афеліи удаляется почти до орбиты Юпитера (рис. 54). Простымъ глазомъ она не видна, въ телескопъ имѣетъ видъ круглой туманности. Разстояніе *кометы Энке* отъ солнца при каждомъ оборотѣ *уменьшается*, а время обращенія становится короче.

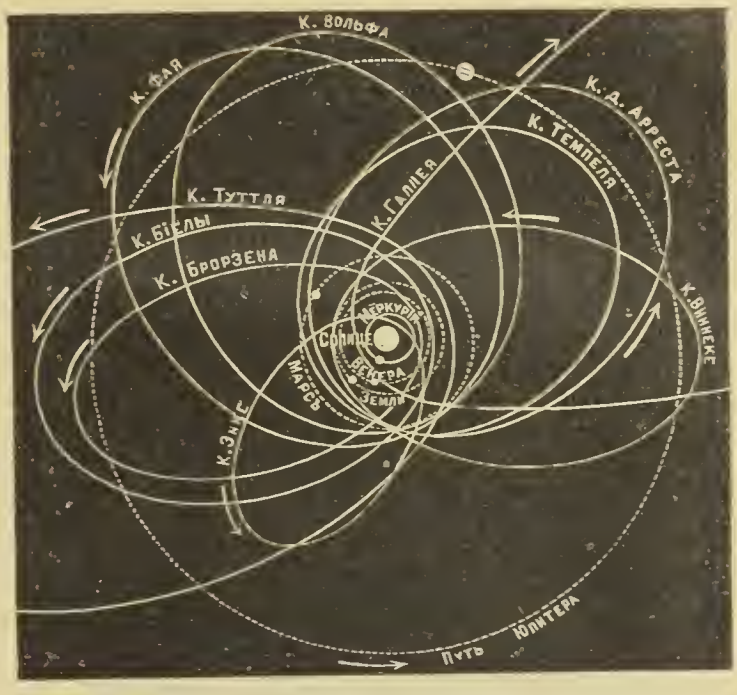


Рис. 54. Орбиты кометъ.

Теперь извѣстно всего 18 періодическихъ кометъ, обращающихся по эллипсамъ, при чемъ возвращеніе ихъ было не только вычислено, но и наблюдаемо. Орбиты нѣкоторыхъ изъ нихъ изображены на рис. 54-омъ.

Орбиты кометъ могутъ измѣниться подъ вліяніемъ планетъ, мимо которыхъ онѣ проходятъ. Наблюдалось, напримѣръ, нѣсколько кометъ, которыя измѣнили свои орбиты изъ длинныхъ въ короткія притяженіемъ Юпитера, или, какъ говорятъ, были захвачены Юпитеромъ и присоединены къ солнечной системѣ.

Сами кометы не оказываютъ ни малѣйшаго притяженія ни на планеты, ни на спутниковъ; отсюда ясно, что онѣ чрезвычайно легки, несмотря на свои громадные размѣры.

Съ глубокой древности до 1910 года простымъ глазомъ было замѣчено около 470 кометъ, съ 1610 до 1910 года, за 300 лѣтъ, около 400 было открыто въ телескопъ. Теперь каждый годъ открываютъ нѣсколько мелкихъ кометъ, и большинство съ помощью фотографіи.

Кромѣ кометы Галлея, весьма многіе кометы отмѣчены не только астрономами, но и лѣтописцами. Напримѣръ, въ 1584 г., передъ смертью Іоанна Грознаго, была видна очень яркая комета. Въ 1666 году, при низложеніи патріарха Никона, надъ Москвой была видна яркая комета, которую народъ счелъ знакомъ Божьяго гнѣва за оскорбленіе патріарха. Въ 1811 году, передъ нашествіемъ Наполеона, была видна огромная комета, хвостъ которой, по вычисленіямъ, имѣлъ въ длину не менѣе 165 милліоновъ верстъ. Эта комета двигалась по эллипсу, время ея обращенія вычислено въ 3066 лѣтъ.

Въ мартѣ 1843 года внезапно вблизи солнца появилась комета необыкновенной яркости; длина ея хвоста, по вычисленіямъ, превосходила хвосты всѣхъ извѣстныхъ кометъ: онъ достигалъ до 300.000.000 вер., и былъ совершенно прямой, какъ у кометы Галлея. Комета 1843 года приблизилась къ солнцу въ перигеліи не много болѣе 650.000 верстъ отъ центра, или около 112.000 вер. отъ поверхности. Она летѣла въ это время со скоростью болѣе 450 верстъ въ секунду, и проносилась между поднимающимися изъ солнца огненными фонтанами протуберанцевъ, сквозь самое вещество солнечной короны. Комета прошла благополучно сквозь солнечную корону и въ началѣ апрѣля стала уже невидима простому глазу, а въ концѣ апрѣля и для телескоповъ.

Рис. 55. Комета Донати.

Въ 1858 г. была видна замѣчательно красивая *комета Донати* (по имени открывшаго ее астронома); она имѣла два почти прямыхъ тонкихъ хвоста и одинъ широкій, изогнутый въ видѣ сабли (рис. 55).

2. Строеніе кометъ. Каждая комета вдали отъ солнца, видимая въ телескопъ, представляетъ круглое туманное пятно. По мѣрѣ приближенія къ солнцу она образуетъ хвостъ.

Изъ *передней* части головы, обращенной къ солнцу, появляются струи, которыя огибаютъ ядро и образуютъ хвостъ. Наибольшей длины хвостъ достигаетъ вскорѣ послѣ прохожденія черезъ перигелій; по мѣрѣ удаленія отъ солнца онъ опять исчезаетъ.

И голова и хвостъ кометы *совершенно прозрачны*: несмотря на ихъ яркость, сквозь нихъ совершенно свободно видны звѣзды.

Кометные хвосты русскій астрономъ Бредихинъ раздѣлилъ на три типа: 1) прямые длинные хвосты, идущіе въ сторону, противоположную солнцу; такихъ два было у кометы Донати, 2) широкіе, яркіе, слегка изогнутые хвосты, какъ главный хвостъ кометы Донати, 3) короткіе хвосты, очень изогнутые и расположенные приблизительно по орбитѣ кометы. Рис. 56 изображаетъ хвосты всѣхъ трехъ типовъ.

Рис. 56. Три типа кометныхъ хвостовъ.

Кометы вдали отъ солнца свѣтятъ отраженнымъ солнечнымъ свѣтомъ, но вблизи отъ солнца въ спектрѣ кометъ (см. таблица I-я, при стр. 290) являются широкія *свѣтлыя полосы*,— кометы начинаютъ свѣтиться сами. Спектръ ихъ показываетъ, что онѣ состоятъ преимущественно изъ водорода, углеводородовъ и паровъ металловъ, особенно натрія. Хвосты 1-го типа (прямые) состоятъ преимущественно изъ водорода и гелія, 2-го типа — изъ углеводородовъ и 3-го типа — изъ паровъ металловъ.

Относительно природы кометныхъ хвостовъ, астрономомъ Бесселемъ была высказана гипотеза, развитая Бредихинымъ въ подробную теорію; по этой гипотезѣ предполагается, что хвосты кометъ образуются вслѣдствіе отталкивательной силы солнца. Бредихинъ изслѣдовалъ, какова должна быть эта сила, чтобы образовать такіе хвосты. Оказалось, что хвосты 1-го типа изъ водорода образуются, если сила отталкиванія приблизительно въ 18 разъ *больше* притяженія; хвосты 2-го типа, если эта сила *равна* или *немного* (раза въ $1^1/_2$) *больше* притяженія; хвосты 3-го типа образованы

силою въ 2—3 раза слабѣе притяженія. Возможно, что это отталкиваніе зависитъ отъ *давленія свѣтовыхъ лучей солнца*. Гонимыя этимъ давленіемъ, частицы газовъ, составляющихъ хвостъ кометы, непрерывно удаляются отъ солнца и разсѣиваются въ пространствѣ.

Такимъ образомъ хвосты кометъ непрерывно разсѣиваются на своемъ концѣ и возобновляются у головы кометы. Рисунокъ 57 даетъ снимки кометы Свифта въ 1892 г. Каждая комета, обогнувъ солнце, теряетъ часть своего вещества: оно улетаетъ въ видѣ газовъ хвоста.

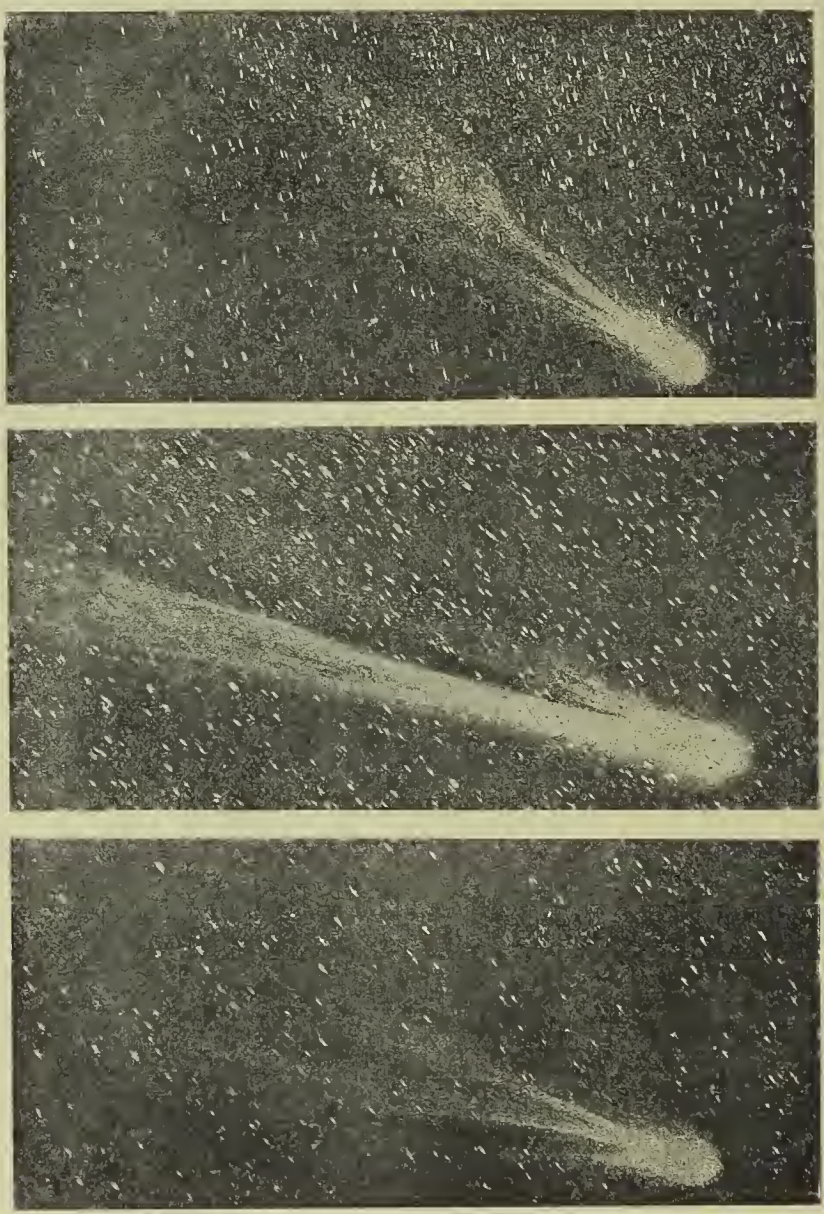


Рис. 57. Фотографическіе снимки кометы Свифта въ 1892 году.

Но, кромѣ потери своего вещества, съ кометами происходятъ и другія перемѣны: самая голова кометы можетъ раздѣлиться на части. Періодическая комета Біэлы, открытая въ 1826-омъ году, обращалась вокругъ солнца въ $6^1/_2$ лѣтъ. Въ 1832 году комета появилась вторично; въ 1845 году комета Біэлы появилась въ третій разъ и вскорѣ *раздѣлилась на двѣ части* разной величины, продолжавшія каждая обращаться вокругъ солнца, слегка удаляясь другъ отъ друга. Въ 1852 г. обѣ кометы Біэлы разошлись уже на разстояніе около 1.400.000 верстъ и появились въ четвертый и послѣдній разъ. Послѣ того прошло два періода ея обращенія, и она не появлялась. Въ 1872 году, въ третій срокъ ея возвращенія, вмѣсто нея 15 (27) ноября появился цѣлый *дождь изъ падающихъ звѣздъ*. Такой же дождь повторился 15 (27) ноября 1885 года, когда земля пришла въ то мѣсто, гдѣ пересѣкаются орбиты земли и кометы Біэлы.

Распаденіе кометъ замѣчалось и въ другихъ случаяхъ, но на примѣрѣ кометы Біэлы стала понятна дальнѣйшая судьба каждой кометы: *голова кометы въ концѣ-концовъ обращается въ потоки метеоровъ*, а *газы, составлявшіе хвостъ, разсѣиваются въ пространствѣ*.

Распаденіе кометъ на газы и метеоры, прозрачность, огромная величина и неощутимая плотность кометъ указываютъ на ихъ строеніе: *кометы состоятъ изъ множества твердыхъ отдѣльныхъ мелкихъ частицъ, окутанныхъ одной общей газовой оболочкой*.

3. Небесные метеоры. Падающія звѣзды. Болиды. Аэролиты. Мы различаемъ *воздушные метеоры* (иначе — *атмосферные*), происходящіе въ земной атмосферѣ (ихъ изучаетъ особая наука *метеорологія*; къ нимъ принадлежатъ радуга, молнія и т. д.) и *небесные* (или *космическіе*, т.-е. міровые) *метеоры*; это—небесныя *свѣтила, проникающія въ земную атмосферу* и иногда достигающія поверхности земли; ихъ изучаетъ астрономія. Небесные метеоры являются въ трехъ видахъ: 1) *падающія звѣзды*, 2) *огненные шары* или *болиды*, 3) *аэролиты* (воздушные камни) или *ураноліты* (небесные камни).

Падающія звѣзды видѣлъ не разъ каждый. Иногда ихъ бываетъ особенно много; звѣзды сыплются и это называется *звѣзднымъ дождемъ*.

Ежегодно въ концѣ іюля можно видѣть особенно много падающихъ звѣздъ, и если продолжить ихъ слѣды назадъ, то почти всѣ онѣ пересѣкутся въ созвѣздіи Персея. Вычисленіе орбиты этихъ метеоровъ, названныхъ *Персеидами*, показало, что они движутся по орбитѣ кометы Тутля. Та область

неба, откуда вылетаютъ метеоры, называются вообще *радіантомъ* звѣзднаго потока. Кромѣ Персеидъ, въ настоящее время извѣстно очень много звѣздныхъ потоковъ. Главнѣйшіе изъ нихъ: Лириды (наибольшее число падающихъ звѣздъ 8 апрѣля ст. ст.), η Аквариды (24 апрѣля), δ Аквариды (16 іюля), Леониды (1 ноября), Андромедиды (15 ноября). Всѣ метеорные потоки представляютъ, вѣроятно, остатки различныхъ кометъ.

Когда комета, состоящая изъ множества твердыхъ частицъ и газообразной оболочки, приближается къ солнцу, связь между частицами ослабѣваетъ; каждая описываетъ свою собственную орбиту вокругъ солнца; такъ происходитъ раздѣленіе кометы на части и частицы и разсѣяніе ихъ вдоль ея орбиты. При встрѣчѣ съ землей, онѣ задѣваютъ земную атмосферу и, вслѣдствіе ея сопротивленія ихъ быстрому, отъ 11 до 70 верстъ въ секунду, движенію, мгновенно раскаляются добѣла. Для насъ онѣ и представляются тогда падающими звѣздами.

Иногда появляется падающая звѣзда, быстро увеличивается въ размѣрахъ и принимаетъ видъ свѣтящагося шара, ярко освѣщающаго все кругомъ. Случается, что такой огненный шаръ бываетъ виденъ и днемъ. Пролетѣвъ нѣкоторое разстояніе, свѣтящійся шаръ разрывается на куски и исчезаетъ, и еще долго въ воздухѣ бываетъ виденъ свѣтлый слѣдъ. Такіе шары называются *болидами*. Иногда не весь болидъ сгораетъ въ воздухѣ: нѣсколько обломковъ его достигаютъ до земли. Такіе куски метеоровъ извѣстны подъ именемъ *аэролитовъ* (воздушныхъ камней) или *уранолитовъ* (небесныхъ камней). Изъ этого видно, что между болидами и аэролитами собственно нѣтъ различія: камень, упавшій гдѣ-нибудь въ видѣ аэролита, изъ другихъ мѣстъ былъ виденъ какъ болидъ.

Наблюденіе метеора одновременно съ нѣсколькихъ мѣстъ даетъ возможность вычислить его высоту надъ земною поверхностью. Оказывается, что падающія звѣзды и болиды *появляются* на высотѣ всегда болѣе 100 верстъ, а въ иныхъ случаяхъ высота ихъ достигала болѣе 200 верстъ.

Уранолиты состоятъ изъ тѣхъ же веществъ, какія встрѣчаются на землѣ, чаще всего изъ желѣза въ соединеніи съ другими тѣлами.

XV. Неподвижныя звѣзды.

1. **Движеніе и параллаксы звѣздъ.** Звѣзды окружаютъ землю со всѣхъ сторонъ на неизмѣримо громадныхъ разстояніяхъ. Съ глубокой древности онѣ считались неподвижными на небесной

сферѣ. Но въ началѣ XVIII вѣка Галлей, сравнивая современныя положенія звѣздъ съ положеніями, данными въ каталогѣ Птоломея, замѣтилъ перемѣщенія Арктура и нѣкоторыхъ другихъ звѣздъ и такимъ образомъ открылъ *собственныя движенія звѣздъ*.

В. Гершель, открывшій множество звѣздъ съ собственнымъ движеніемъ, нашелъ, что звѣзды въ созвѣздіи Геркулеса и ближайшихъ къ нему движутся въ противоположныя стороны, какъ бы *раздвигаются*; видимыя разстоянія между ними *увеличиваются*. Наоборотъ, на противоположной сторонѣ неба звѣзды *сближаются* между собою. Отсюда слѣдуетъ, что само наше солнце вмѣстѣ съ планетами движется въ сторону созвѣздія Геркулеса. Такимъ образомъ движенія звѣздъ отчасти будутъ *кажущіяся:* не звѣзды движутся, а мы вмѣстѣ съ солнцемъ. Но оказалось, что движеніе звѣздъ, находящихся рядомъ, часто отличаются одно отъ другого. Напримѣръ, изъ семи звѣздъ Большой Медвѣдицы пять движутся въ одну сторону, а двѣ—въ другую. Такимъ образомъ движеніе каждой звѣзды слагается изъ ея *дѣйствительнаго* движенія въ пространствѣ и ея *кажущагося* движенія (вслѣдствіе движенія солнца).

Если звѣзда движется *прямо къ землѣ* или прямо *отъ* земли, то передвиженіе ея между звѣздами не будетъ замѣтно. Однако теперь, съ помощью спектроскопа, мы можемъ измѣрять скорость такого движенія. Почти на всѣхъ звѣздахъ въ спектрѣ найдена линія въ желтомъ цвѣтѣ, почти на томъ же мѣстѣ, гдѣ находится линія паровъ натрія на землѣ. Если звѣзда будетъ двигаться прямо къ землѣ, то свѣтъ ея будетъ доходить до насъ быстрѣе, чѣмъ отъ неподвижной; въ секунду нашъ глазъ получитъ большее число волнъ, а потому свѣтъ натрія покажется намъ болѣе зеленоватымъ (цвѣтъ зависитъ только отъ числа свѣтовыхъ волнъ, воспринимаемыхъ нашимъ глазомъ въ секунду), и линія сдвинется ближе къ зеленому цвѣту. Наоборотъ, при удаленіи звѣзды та же линія передвинется немного къ оранжевому цвѣту. Это важное открытіе физиковъ Допплера и Физо даетъ возможность измѣрять скорость движенія звѣздъ къ намъ или отъ насъ и тогда, когда разстояніе звѣзды совершенно неизвѣстно. Оказалось по этому способу, что Вега, движеніе которой въ сторону не было замѣтно за 1600 лѣтъ, довольно быстро движется прямо къ солнцу.

Скорости движенія звѣздъ въ пространствѣ составляютъ обыкновенно десятки километровъ въ секунду.

Опредѣленный изъ наблюденій годичный параллаксъ какой-нибудь звѣзды (см. стр. 300 и 310) даетъ возможность опредѣлить разстояніе этой звѣзды отъ земли. Эти разстоянія настолько гро-

мадны, что выражать ихъ въ обыкновенныхъ мѣрахъ (напримѣръ, въ километрахъ) неудобно. Такъ, напримѣръ, ближайшая къ намъ звѣзда *α* Центавра находится отъ насъ въ 275.000 разъ дальше солнца, а звѣзда 61 Лебедя—въ 619.000 разъ. Поэтому за единицу звѣздныхъ разстояній обыкновенно принимается такъ называемый *свѣтовой годъ:* свѣтовой годъ равенъ пути, проходимому свѣтовымъ лучомъ за одинъ годъ.

Вогъ разстоянія нѣкоторыхъ звѣздъ отъ насъ:

	Разст. въ тысячахъ радіусовъ земной орбиты.	Свѣтовыхъ лѣтъ.
α Центавра	275	4,3
61 Лебедя	619	9,7
Сиріусъ	557	8,6
Альдебаранъ	1.897	29,2
Вега	2.520	38,8
Полярная	2.640	40,8

Это—ближайшія къ намъ звѣзды. Отъ болѣе далекихъ свѣтъ идетъ сотни, можетъ-быть, и тысячи лѣтъ.

2. Перемѣнныя и новыя звѣзды. Двойныя звѣзды. Въ созвѣздіи Персея есть звѣзда 2-й величины *Альголь* (β Персея); эта звѣзда свѣтитъ почти 2 сутокъ ровнымъ свѣтомъ, потомъ вдругъ начинаетъ меркнуть и черезъ $4^1/_2$ часа доходитъ до яркости 4-й величины. Въ такомъ видѣ она остается 20 минутъ, потомъ яркость ея увеличивается и въ $4^1/_2$ часа дѣлается опять прежней. Весь періодъ измѣненій составляетъ 2 дня 20 часовъ 48,9 минутъ.

Подобно Альголю, мѣняютъ свою яркость еще около 20 мелкихъ звѣздъ. Всѣ онѣ, очевидно, имѣютъ темныхъ спутниковъ, т.-е. планеты, затмевающія отъ насъ часть ихъ диска.

Есть звѣзды, блескъ которыхъ нѣкоторое время увеличивается постепенно, а нѣкоторое время ослабѣваетъ въ довольно правильные промежутки времени. Самая замѣчательная изъ нихъ *Мира* Кита (*ο* Кита). Она достигаетъ яркости 2-й величины, постепенно въ теченіе 7 мѣсяцевъ слабѣетъ до 9,5 величины, а потомъ въ $3^1/_2$ мѣсяца опять возрастаетъ до 2-й величины. Повидимому, уменьшеніе ея яркости зависитъ отъ покрытія ея поверхности множествомъ темныхъ пятенъ, послѣ чего начинается усиленное изверженіе газовъ и усиленіе блеска. Очень многія перемѣнныя звѣзды сходны съ Мирой, только имѣютъ разные періоды. Къ нимъ принадлежитъ и наше солнце: у него періодъ длится 11 лѣтъ.

Въ 134 или 130 году до Р. Х. появилась *новая* звѣзда 1-й величины въ созвѣздіи Скорпіона. Потомъ она постепенно исчезла. Ея появленіе и заставило Гиппарха составить списокъ всѣхъ звѣздъ.

Въ ноябрѣ 1572 года Тихо Браге въ Даніи увидѣлъ въ созвѣздіи Кассіопеи необычайно яркую звѣзду бѣлаго цвѣта, превосходившую блескомъ Юпитера и приблизительно равную Венерѣ. Но постепенно ослабѣвая въ яркости, эта звѣзда въ 1574 году исчезла совсѣмъ. Цвѣтъ ея изъ бѣлаго постепенно превращался въ желтый, потомъ въ красный. Теперь звѣзда 1572 года невидима, близъ этого мѣста находится звѣзда 11-й величины.

Въ октябрѣ 1604 года появилась въ созвѣздіи Змѣеносца звѣзда 1-й величины, яркостью превосходившая Юпитера и немного уступавшая Венерѣ. Ее наблюдалъ Кеплеръ. И она стала вскорѣ ослабѣвать и исчезла черезъ 15 мѣсяцевъ безъ всякаго слѣда.

Въ 1876 году въ созвѣздіи Лебедя появилась звѣзда 3-й величины, которая, постепенно слабѣя, превратилась въ звѣзду 12-й величины, при чемъ спектръ ея постепенно сталъ походить на спектръ туманности, что представляетъ характерную особенность новыхъ звѣздъ.

Въ 1892 г. явилась звѣзда 5-й величины въ созвѣздіи Возничаго, потомъ она ослабѣла послѣ нѣсколькихъ колебаній до 15-й величины, ея спектръ превратился въ спектръ туманности.

Въ февралѣ 1901 года явилась яркая звѣзда въ созвѣздіи Персея. Въ день открытія она была 3-й величины, на 11 февраля достигла 1-й величины; на другой же день она пожелтѣла и начала ослабѣвать.

Кромѣ перечисленныхъ, было открыто еще нѣсколько мелкихъ новыхъ звѣздъ, изъ нихъ двѣ или три фотографіей (послѣдняя новая—осенью 1910 г.).

Существуетъ много попытокъ объяснить появленіе новыхъ звѣздъ. Нѣкоторые объясняютъ столкновеніемъ двухъ угасшихъ свѣтилъ, другіе—взрывомъ охлаждавшагося свѣтила, третьи—тѣмъ, что какое-нибудь свѣтило проникло въ туманность и раскалилось вслѣдствіе ея сопротивленія, какъ метеоръ въ земной атмосферѣ.

Звѣзды, подобно нашему солнцу, суть раскаленныя тѣла, окруженныя газовой атмосферой. Онѣ окружены своими планетами, какъ показываетъ примѣръ Альголя, покрыты пятнами, какъ наше солнце (напримѣръ, Мира), и жизнь ихъ подвергается постояннымъ измѣненіямъ.

Многія звѣзды, которыя кажутся простому глазу обыкновенными, при разсматриваніи въ телескопъ раздѣляются на двѣ и болѣе отдѣльныхъ звѣздъ. Прежде думали, что это случайное явленіе: одна звѣзда находится гораздо дальше другой по одному направленію; но оказалось, что для многихъ близость не кажущаяся, а дѣйствительная. Обѣ звѣзды въ такой парѣ соединены между собой силой притяженія и, обращаясь вокругъ общаго центра тяжести, составляютъ «*физическую*» пару. Изъ физически соединенныхъ двойныхъ звѣздъ нѣкоторыя уже успѣли на глазахъ астрономовъ совершить полное обращеніе.

Если разстояніе двойной звѣзды отъ насъ извѣстно, то легко опредѣлить и дѣйствительное разстояніе между обѣими звѣздами, а также вычислить, во сколько разъ сила притяженія въ двойныхъ звѣздахъ больше или меньше притяженія солнца. Такъ удалось вычислить, что масса α Центавра приблизительно вдвое *меньше* массы солнца (время ея обращенія достигаетъ 88 лѣтъ).

Нѣкоторыя двойныя звѣзды окрашены въ различные цвѣта, преимущественно въ красный и голубой. Главная звѣзда обыкновенно бываетъ красная, спутникъ—голубой. Самая красивая изъ такихъ звѣздъ β Лебедя.

Есть звѣзды, состоящія изъ трехъ, четырехъ и болѣе свѣтилъ, обращающихся одно вокругъ другого. — Средняя звѣзда хвоста Большой Медвѣдицы, Мицаръ, имѣетъ около себя звѣздочку 5-й величины, Алькоръ; нормальное зрѣніе ясно различаетъ Алькора (разстояніе 12′). Въ трубу видно, что самъ Мицаръ раздѣляется на двѣ бѣлыхъ звѣзды, которыя обращаются одна вокругъ другой (разстояніе $14^1/_2''$) въ громадный промежутокъ времени, вѣроятно, въ нѣсколько тысячъ лѣтъ. Что касается Алькора, то онъ не имѣетъ никакого отношенія къ Мицару и стоитъ рядомъ съ нимъ случайно.

Фотографируя спектръ Мицара, замѣтили, что каждые 52 дня линія паровъ магнія *раздвояется*; изъ этого заключили, что часть звѣзды удаляется отъ земли (линія идетъ къ красному концу), часть приближается (линія магнія идетъ къ фіолетовому концу спектра). Это раздвоеніе замѣчено только у главной звѣзды; слѣдовательно, она сама состоитъ изъ двухъ звѣздъ, находящихся такъ близко, что *для телескопа* онѣ сливаются въ одну; и обѣ онѣ обращаются одна вокругъ другой въ 104 дня, при чемъ когда одна звѣзда движется въ нашу сторону, то другая удаляется въ противоположную. Такихъ *спектрально двойныхъ* звѣздъ открыто не мало.

Нѣкоторыя двойныя звѣзды были открыты вычисленіями, какъ планета Нептунъ. Въ 1844 году Бессель показалъ, что Сиріусъ обращается въ 49 лѣтъ по орбитѣ вокругъ невидимаго

центра и что около него долженъ быть спутникъ. Этого спутника замѣтили уже послѣ смерти Бесселя; онъ имѣетъ видъ звѣздочки 9-й величины.

3. Звѣздныя кучи и туманности. Кромѣ безчисленныхъ отдѣльныхъ и сложныхъ звѣздъ, усѣивающихъ видимое небо, на немъ встрѣчаются скопленія мелкихъ звѣздъ. Изъ такихъ звѣздныхъ скопленій самыя извѣстныя *Плеяды* въ созвѣздіи Тельца. Среднему глазу Плеяды представляются въ видѣ тѣсной кучки изъ 6 звѣздъ. Въ небольшую трубу видны десятки звѣздъ, въ среднюю—сотни и т. д. Изъ другихъ скопленій, видимыхъ простымъ глазомъ въ сѣверномъ полушаріи, особенно видны *Ясли* въ созвѣздіи Рака, и *звѣздная куча въ Персеѣ*. То и другое кажется простому глазу туманными пятнами, въ телескопъ видны многія сотни мелкихъ звѣздъ. На рис. 58 (Таблица VIII) изображена звѣздная куча въ созвѣздіи Геркулеса.

Къ звѣзднымъ скопленіямъ надо причислить и Млечный путь. Уже въ небольшую трубу можно видѣть множество мелкихъ звѣздъ, особенно въ болѣе яркихъ частяхъ Млечнаго пути; въ болѣе сильныя трубы ихъ видно все больше и больше. Замѣчательно, что неподвижныя звѣзды распредѣлены на небѣ неравномѣрно: чѣмъ дальше отъ Млечнаго пути, тѣмъ число ихъ меньше. Вильямъ Гершель, открывшій это расположеніе, заключилъ, что всѣ видимыя нами неподвижныя звѣзды расположены въ формѣ круглаго плоскаго слоя, толщина котораго ничтожна сравнительно съ длиной и шириной.

Если принять строеніе Млечнаго пути по Гершелю, то поперечникъ его долженъ быть громаденъ; лучъ свѣта долженъ пробѣгать его приблизительно 15.000 лѣтъ, двигаясь по 300.000 километровъ въ секунду.

Несомнѣнно, что Плеяды и другія звѣздныя кучи, въ которыхъ мы въ телескопъ различаемъ отдѣльныя звѣзды, находятся въ нашемъ звѣздномъ мірѣ. Но есть такія звѣздныя кучи, которыя въ самые сильные телескопы кажутся лишь туманными пятнами безъ всякаго намека на отдѣльныя звѣзды. Къ такимъ принадлежитъ *туманность Андромеды* (рис. 59, таблица VIII), видимая простымъ глазомъ, въ видѣ слабой бѣлой туманной звѣздочки. А между тѣмъ спектроскопъ показываетъ сплошной спектръ, какъ для солнца; и поэтому возможно, что эта туманность находится не въ нашемъ звѣздномъ мірѣ, а сама составляетъ такой же безконечно удаленный звѣздный міръ, какъ и нашъ Млечный путь.

Другія туманности даютъ въ спектрѣ (см. таблица I, при стр. 290) линіи газовъ.

Ихъ можно раздѣлить на слѣдующихъ 5 классовъ: 1) туманныя звѣзды, 2) планетныя туманности, 3) кольцеобразныя, 4) спиральныя, 5) неправильныя.

1) *Туманными звѣздами* называются такія звѣзды, которыя окружены туманностью, какъ, напримѣръ, наше солнце, окруженное зодіакальнымъ свѣтомъ.

2) *Планетными туманностями* называются такія, которыя имѣютъ форму ровнаго круглаго диска.

3) *Кольцеобразныя туманности* подобны планетнымъ съ той разницей, что средина ихъ свѣтится гораздо слабѣе краевъ. Въ числѣ ихъ замѣчательна *кольцеобразная туманность* Лиры (рис. 61, таблица VIII).

4) *Спиральныя туманности.* Примѣромъ ихъ могутъ быть туманности въ Гончихъ Собакахъ (рис. 62, таблица VIII).

5) *Неправильныя туманности* не имѣютъ опредѣленной формы. Самая знаменитая изъ нихъ *туманность Оріона* (рис. 60, таблица VIII).

4. Происхожденіе и конецъ міровъ. Относительно происхожденія міра и въ частности нашей солнечной системы существуетъ нѣсколько теорій.

Изъ нихъ наиболѣе извѣстна теорія знаменитаго философа *Канта* и французскаго математика — *Лапласа*, которая имѣла большое научное значеніе.

По гипотезѣ *Лапласа*, наша солнечная система сотни милліоновъ лѣтъ назадъ представляла громадную шарообразную туманность, состоявшую изъ тонкаго вещества, въ родѣ крайне разрѣженнаго газа высокой температуры и простиравшуюся за предѣлы нынѣшней орбиты Нептуна. Внутри туманности находилось шарообразное ядро, будущее солнце, состоявшее изъ того же вещества, что и туманность, только въ болѣе сгущенномъ состояніи. Туманность и ядро находились во вращательномъ движеніи около оси, проходившей черезъ центръ ядра.

Вслѣдствіе низкой температуры окружающаго пространства, частицы туманности, близкія къ поверхности, охлаждались и опускались, т.-е. приближались къ центру; скорость вращенія туманности увеличивалась, возрастала вмѣстѣ съ тѣмъ и центробѣжная сила ея частицъ, конечно больше всего на экваторѣ, гдѣ она становилась, наконецъ, равною силѣ тяготѣнія этихъ частицъ къ центру. Поэтому на экваторѣ съ теченіемъ времени образовалось кольцо изъ частицъ, уже не удерживаемыхъ силою тяготѣнія, и потому постепенно отдѣлившихся отъ общей массы туманности.

Это кольцо вращалось вокругъ туманности и, вслѣдствіе охлажденія, сжималось, какъ бы сплющивалось съ внутренней

Рис. 58. Звѣздная куча въ Геркулесѣ (стр. 345).

Рис. 59. Туманность Андромеды (стр. 345).

Рис. 60. Туманность Оріона (по фотографіи) (стр. 346).

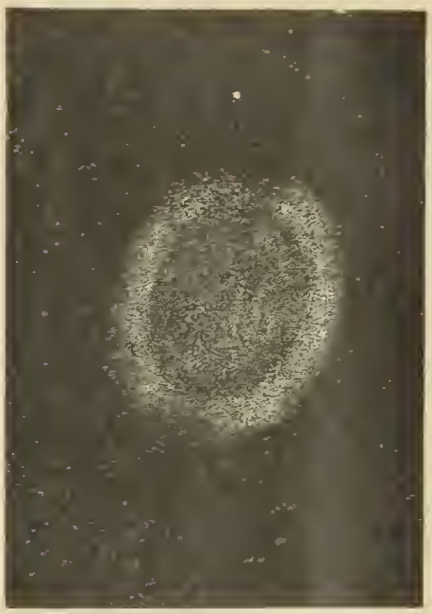


Рис. 61. Туманность въ Лирѣ (стр. 346).

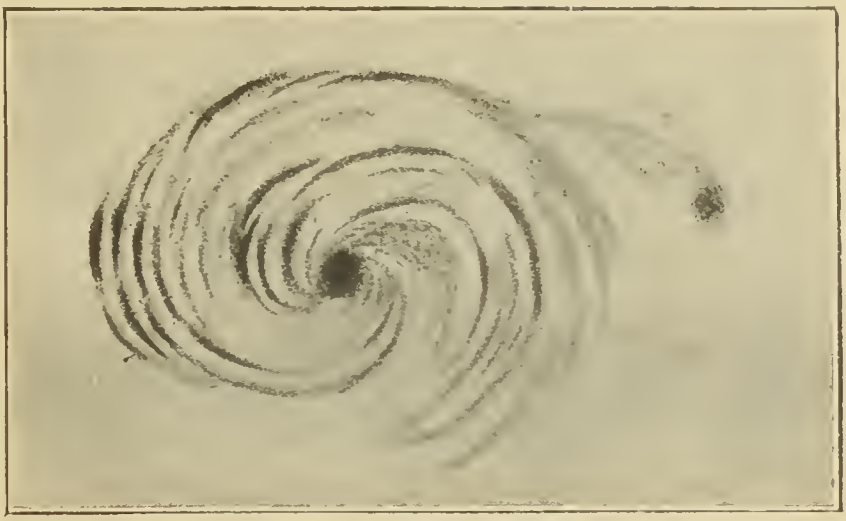


Рис. 62. Спиральная туманность (стр. 346).

и съ наружной стороны, при чемъ скорость вращательнаго движенія наружныхъ частицъ увеличивалась, а внутреннихъ уменьшалась. Вслѣдствіе этого, а также вслѣдствіе взаимнаго тренія частицъ, кольцо вращалось какъ твердое тѣло: всѣ его частицы совершали полный оборотъ около солнца въ одно и то же время, такъ что наружныя частицы двигались быстрѣе внутреннихъ. Такъ какъ кольцо при охлажденіи должно было сжиматься, то оно, наконецъ, разрывалось въ одномъ или даже въ нѣсколькихъ мѣстахъ. Тогда кольцо или его оторвавшаяся часть, вслѣдствіе взаимнаго притяженія частицъ, стягивалось въ шаръ, который продолжалъ двигаться вокругъ центральнаго солнца. Вслѣдствіе неодинаковой скорости частицъ кольца, образовавшійся шаръ получалъ вращательное движеніе около своего собственнаго центра, и притомъ въ сторону общаго движенія всей туманнной системы. Такимъ образомъ могла образоваться первая, наиболѣе удаленная отъ солнца планета. Между тѣмъ главная масса туманности, или солнечная атмосфера, продолжала охлаждаться и увеличивать скорость своего вращенія. Отдѣлялось отъ нея на экваторѣ новое кольцо, которое потомъ разрывалось и превращалось въ новую планету. Каждая вновь образовавшаяся планета продолжала обращаться вокругъ центральнаго ядра по орбитѣ, которую прежде занимало кольцо. Поэтому, болѣе удаленныя отъ солнца планеты: Нептунъ, Уранъ, Сатурнъ — по мнѣнію Лапласа — являются самыми древними. Ближайшія къ солнцу планеты, Меркурій и Венера, произошли въ сравнительно недавнее время. Планеты представляли первоначально также шарообразныя туманности изъ столь же разрѣженнаго вещества, какъ и главная туманность; но, вслѣдствіе вращенія около оси, отъ планетъ отдѣлялись, въ экваторіальной области, кольца, которыя потомъ разрывались и превращались въ шарообразныя тѣла. Эти тѣла, будущія спутники планеты, должны были обращаться вокругъ своей планеты и вокругъ своихъ осей опять-таки въ направленіи вращенія всей солнечной системы. Послѣ достаточнаго охлажденія и сгущенія вещества туманности, отдѣленіе колецъ и образованіе спутниковъ прекращалось. Могло случиться, какъ это мы видимъ въ системѣ Сатурна, что образовавшіяся кольца не разрывались и не превращались въ шарообразныя тѣла, а продолжали вращаться около своей планеты. При дальнѣйшемъ охлажденіи, планеты и ихъ спутники переходили изъ газообразнаго состоянія въ жидкое и покрывались затѣмъ твердою корою. Гипотеза Лапласа, созданная имъ въ концѣ 18-го столѣтія, удовлетворительно объясняла происхожденіе солнечной системы и извѣстныя въ то время движенія небесныхъ тѣлъ: обращенія

планетъ вокругъ солнца и вращенія, какъ солнца, такъ и планетъ около осей въ одной и той же плоскости и въ одномъ и томъ же направленіи (съ запада на востокъ). Объясненія Лапласа дѣлали понятными обращенія спутниковъ вокругъ планетъ и вращеніе ихъ вокругъ своихъ осей, въ томъ же направленіи и въ плоскостяхъ, мало отличныхъ отъ плоскости эклиптики и, наконецъ,—малые эксцентриситеты орбитъ планетъ и спутниковъ. Однако открытіе въ 1797 г. Гершелемъ двухъ спутниковъ Урана, вращавшихся въ сторону, обратную движенію солнечной системы, оказалось въ противорѣчіи съ теоріей Лапласа. Были замѣчены далѣе и другія явленія, трудно объяснимыя этой теоріей: обращеніе одного изъ спутниковъ Марса (Фобоса) и внутренняго кольца Сатурна вокругъ своихъ планетъ въ болѣе короткое время, чѣмъ время вращенія самихъ планетъ около осей. Затѣмъ были открыты у Юпитера и Сатурна новые спутники, обращающіеся въ обратномъ, по сравненію съ солнечной системой, направленіи и на весьма большихъ разстояніяхъ отъ своихъ планетъ. Было доказано, что вращеніе Урана и Нептуна около осей совершается въ обратномъ направленіи, а орбиты нѣкоторыхъ малыхъ планетъ (напримѣръ, Эроса) слишкомъ удлинены и имѣютъ большой наклонъ къ плоскости эклиптики. Поэтому явилась необходимость видоизмѣнить и дополнить теорію Лапласа, чтобы согласовать ее со вновь открытыми фактами. Предложены были совершенно новыя, отличныя отъ взглядовъ Лапласа, гипотезы о происхожденіи нашей солнечной системы и другихъ міровъ.

Французскій астрономъ Фай, для объясненія двойного характера вращеній тѣлъ солнечной системы: однихъ въ прямомъ, т.-е. съ запада на востокъ, какъ земля, другихъ въ обратномъ направленіи, предположилъ двойной способъ образованія этихъ тѣлъ изъ колецъ. Кромѣ того, Фай допускаетъ образованіе самихъ колецъ не внѣ, а внутри первобытной туманности. Онъ говоритъ, что нѣкоторыя кольца и планеты образовались, когда туманность еще не имѣла сгущеннаго ядра, была во всей массѣ своей почти однородна; тогда внутри туманности каждая частица притягивалась къ центру туманности не силою обратно пропорціональною квадрату ея разстояній, а силою, прямо пропорціональною первой степени разстояній, т.-е. чѣмъ дальше частица была отъ центра, тѣмъ сильнѣе было ея притяженіе къ центру. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ части туманности совершали оборотъ около центра въ одинъ и тотъ же періодъ времени, какъ бы составляя твердое тѣло; болѣе удаленныя отъ центра частицы двигались быстрѣе. Вслѣдствіе взаимнаго притяженія, частицы

образовывали кольца, вращавшіяся около центра; кольца эти, разрываясь, давали начало шарообразнымъ тѣламъ, будущимъ планетамъ, вращающимся около своихъ осей въ томъ же направленіи, какъ около общаго центра. Словомъ, все происходило какъ въ теоріи Лапласа. Но образовавшіяся такимъ образомъ тѣла притягивали къ себѣ ближайшія частицы туманности, другія же частицы ея, и притомъ большинство, стягивались къ центру и постепенно образовали сгущенное ядро, или солнце. Болѣе удаленныя отъ центра частицы туманности образовали новыя кольца, но уже для этихъ колецъ началъ дѣйствовать теперь обыкновенный законъ притяженія центральнаго тѣла (ядра) на тѣла, внѣ его лежащія, т.-е. сила притяженія была обратно пропорціональна квадрату разстоянія. Отсюда слѣдовало примѣненіе къ этимъ частицамъ третьяго закона Кеплера: частицы болѣе удаленныя отъ центра, т.-е. наружныя части кольца, должны были двигаться медленнѣе внутреннихъ. Поэтому при разрывѣ кольца происходило явленіе, обратное тому, которое предполагалось теоріей Лапласа, т.-е. внутреннія частицы, двигаясь быстрѣе, заставили образовавшееся шарообразное тѣло вращаться въ сторону обратную общему движенію системы. Такимъ образомъ, образовались, по мнѣнію Фая, наиболѣе новыя и въ то же время самыя удаленныя отъ солнца планеты: Ураиъ и Нептунъ. Всѣ другія планеты, отъ Меркурія до Сатурна, вращающіяся въ прямомъ направленіи, по мнѣнію Фая, первоначально были гораздо дальше отъ солнца, чѣмъ теперь, и только съ теченіемъ времени, вслѣдствіе его притяженія, постепенно приблизились къ нему на теперешнія разстоянія. Образованіе спутниковъ изъ планетныхъ массъ должно было происходить такъ же, какъ образованіе планетъ изъ туманности.

Въ гипотезѣ Фая особенно важно допущеніе возможности образованія планетъ, имѣющихъ вращеніе около оси, обратное направленію ихъ обращенія по орбитѣ. По утвержденію нѣкоторыхъ ученыхъ, напримѣръ, современнаго французскаго математика Пуанкаре, законы механики требуютъ, чтобы всѣ планеты въ моментъ своего происхожденія изъ кольца получали обратное вращеніе около оси. Спрашивается тогда, почему же большинство планетъ, въ томъ числѣ и наша земля, имѣютъ вращеніе прямое? На этотъ вопросъ даетъ отвѣтъ теорія приливовъ и отливовъ Дж. Дарвина, сына знаменитаго естествоиспытателя Чарльза Дарвина. Небесное тѣло, находящееся въ полужидкомъ состояніи, измѣняетъ свою форму подъ вліяніемъ притяженія другого тѣла: оно вытягивается, и если было шарообразно, то принимаетъ видъ эллипсоида (см. стр. 138). Благодаря вращенію

около своей оси и вокругъ притягивающаго тѣла, на нашемъ эллипсоидѣ происходятъ такъ называемые приливы и отливы (см. стр. 306), т.-е. постоянное перемѣщеніе массъ въ этомъ тѣлѣ. Вслѣдствіе вязкости жидкости, перемѣщеніе массы въ нашемъ тѣлѣ не можетъ происходить съ такою же скоростью, какъ вращеніе вокругъ притягивающаго тѣла; поэтому происходитъ опаздываніе приливовъ и отливовъ. Это постоянное перемѣщеніе и треніе массъ, вслѣдствіе приливовъ и отливовъ, должно постепенно замедлять вращеніе нашего тѣла около оси. Въ то же время происходитъ измѣненіе въ направленіи и величинѣ силы притяженія между тѣлами, которое вызываетъ постепенное удаленіе одного тѣла отъ другого и измѣненіе времени его оборота. Такимъ образомъ, планета въ моментъ своего образованія могла получить обратное движеніе около своей оси, но вслѣдствіе приливовъ, производимыхъ солнцемъ въ его массѣ, это обратное вращеніе замедляется, и планета, наконецъ, во все время своего движенія по орбитѣ будетъ направлена одной и той же стороной своей къ солнцу. Но вѣдь это, въ сущности, будетъ значить, что планета стала вращаться около своей оси уже въ прямомъ направленіи. Охлажденіе и сжатіе планеты можетъ затѣмъ вызвать увеличеніе скорости этого (уже прямого) вращенія ея. Дѣйствіемъ приливовъ и отливовъ можно объяснить и другія, противорѣчащія теоріи Лапласа особенности въ движеніи планетъ и спутниковъ.

Въ міровомъ пространствѣ мы видимъ множество другихъ системъ, состоящихъ или изъ отдѣльныхъ солнцъ, вѣроятно, окруженныхъ, какъ и наше солнце, темными планетами, или изъ двойныхъ и тройныхъ звѣздъ или изъ различныхъ туманностей. Поэтому возникаетъ вопросъ о происхожденіи и этихъ далекихъ отъ насъ міровъ. Наблюдаемыя нами газообразныя туманности напоминаютъ первобытную туманность Лапласа; поэтому можно было бы надѣяться увидѣть между ними такія, которыя находились бы въ періодѣ образованія колецъ, съ центральнымъ ядромъ въ срединѣ. На самомъ дѣлѣ туманностей съ ясно обозначенными кольцами и ядромъ (наподобіе, напримѣръ, Сатурна) мы не наблюдаемъ. Является, такимъ образомъ, еще одно возраженіе противъ системы Лапласа, предполагающей происхожденія планетъ изъ колецъ туманности. Американскій астрономъ *Си* высказалъ предположеніе, что планеты и ихъ спутники произошли не изъ солнечной туманности, а явились извнѣ. Это такъ называемая *теорія захвата:* какое-нибудь тѣло изъ другого міра, проходившее случайно около нашего солнца, попадало въ окружающую солнце туманность. Испытывая сопро-

тивленіе отъ вещества туманности, тѣло замедляло свое движеніе и начинало вращаться около солнца по эллиптической орбитѣ. Если попавшее въ солнечную систему небольшое тѣло проходило около какой-нибудь раньше захваченной солнцемъ планеты, то оно притягивалось этой планетой и становилось ея спутникомъ.

Весьма многіе наблюдаемые въ сильные телескопы туманности представляютъ спиральную форму. Поэтому также естественно задать вопросъ, какъ могла произойти эта форма туманности и не представляла ли и наша солнечная система когда-нибудь такую туманность. На этотъ вопросъ отвѣчаетъ теорія американскихъ ученыхъ *Чемберлина* и *Мультона*. Она состоитъ въ слѣдующемъ: представимъ себѣ небесное свѣтило, несущееся въ пространствѣ со скоростью нѣсколькихъ десятковъ верстъ въ секунду. Оно можетъ встрѣтить другое подобное ему тѣло, движущееся съ такою же скоростью. При встрѣчѣ они могутъ столкнуться другъ съ другомъ. Но если бы даже наши тѣла и не столкнулись, а только прошли одно около другого, то и тогда, послѣ этого сближенія, они будутъ уже совсѣмъ не тѣ, какими были раньше: съ каждымъ произойдетъ катастрофа. Взаимное сближеніе тѣлъ вызоветъ на нихъ приливы, т.-е. какъ бы вздутія на двухъ противоположныхъ частяхъ поверхности. Эти приливы, вслѣдствіе огромной притягательной силы между сблизившимися тѣлами, будутъ очень велики. Подъ вліяніемъ поднявшейся высокой температуры и расширенія газовъ, произойдутъ взрывы въ родѣ протуберанцевъ, наблюдаемыхъ на нашемъ солнцѣ. Огромныя массы вещества отдѣлятся отъ нашихъ тѣлъ по двумъ противоположнымъ направленіямъ и будутъ далѣе двигаться подъ вліяніемъ притяженій обоихъ тѣлъ. Приливы будутъ передвигаться по поверхности каждаго тѣла въ зависимости отъ ихъ движеній. Будетъ продолжаться и выбрасываніе новыхъ массъ изъ нашихъ тѣлъ. Эти массы расположатся вокругъ каждаго тѣла по двумъ спиральнымъ линіямъ, выходящимъ изъ двухъ противоположныхъ частей тѣла. Такое расположеніе массъ, по мнѣнію Мультона, мы наблюдаемъ въ спиральныхъ туманностяхъ. Для насъ онѣ кажутся неподвижными вслѣдствіе громаднаго разстоянія отъ земли. На самомъ же дѣлѣ масса этихъ туманностей участвуетъ въ эллиптическомъ движеніи вокругъ главнаго тѣла, стягивается въ шарообразныя тѣла, изъ нихъ образуются планеты и ихъ спутники, и черезъ нѣсколько милліоновъ лѣтъ изъ такой туманности образуется солнечная система, подобная нашей.

По прошествіи еще многихъ лѣтъ солнце охлаждается, превращается въ твердое и темное тѣло, и будетъ носиться въ пространствѣ, пока, быть-можетъ, опять не столкнется съ подобнымъ ему тѣломъ, и это столкновеніе будетъ началомъ новой жизни.

Такъ повсюду угасаетъ и вновь возникаетъ жизнь, туманности обращаются въ солнца, солнца въ темныя, твердыя тѣла; при столкновеніи ихъ можетъ снова развиться туманность. Такая участь, быть-можетъ, постигнетъ и нашу планету—Землю. Но, говоритъ профессоръ Мейеръ, «всякая смерть является вмѣстѣ съ тѣмъ и возрожденіемъ, и на могилахъ расцвѣтаетъ жизнь. Если въ тяжкой борьбѣ за матеріальныя или идеальныя блага вселенной отдѣльная особь нерѣдко погибаетъ, такъ что роковая катастрофа для нея будетъ гибелью міра, то вѣдь она все же не больше какъ атомъ въ міровомъ цѣломъ, а разрушеніе малыхъ организацій служитъ созиданію большихъ».

Рекомендуемыя руководства.

1) **Ньюкомбъ. С.**, проф. Астрономія для всѣхъ. Переводъ съ англійскаго подъ ред. приватъ-доцента А. Р. Орбинскаго. 2-е изданіе. Одесса. Книгоиздательство „Матезисъ". Ц. 1 р. 50 к.

2) **Клейнъ.** Астрономическіе вечера. Изданіе Т-ва „Знаніе". Петербургъ, 1900 г. Ц. 2 руб.

3) **Фламаріонъ.** Живописная астрономія. Переводъ Предтеченскаго. 2-е изданіе Павленкова. Ц. 3 руб.

4) **С. Ньюкомбъ и Р. Энгельманъ**, Астрономія въ общедоступномъ изложеніи Переводъ Н. С. Дрентельна. Спб., 1896 г. Ц. 6 руб.

5) **В. Мейеръ.** Мірозданіе. Астрономія въ общепонятномъ изложеніи. 4-е изд. Переводъ подъ ред. проф. С. П. Глазенапа. Петербургъ. 1902 г. Ц. 7 р. 50 к.

6) **Стратоновъ, В. В.** Солнце. Изданіе автора. Тифлисъ. Астрономическая популярная монографія. 1910 г. Ц. 14 руб.

7) **Литтровъ.** Тайны неба. Переводъ съ дополненіями проф. А. А. Иванова. Петербургъ 1904 г. Ц. 7 р. 50 к.

Тѣмъ, кто желалъ бы самъ производить наблюденія надъ небесными свѣтилами, необходимо пріобрѣсти:

1) **Покровскій.** Путеводитель по небу. Практическое руководство къ астрономическимъ наблюденіямъ невооруженнымъ глазомъ и малой трубой. Спб., 1906 г. 3-е изданіе. Ц. 2 руб.

2) **Русскій Астрономическій календарь.** издаваемый *ежегодно* Нижегородскимъ Кружкомъ Любителей Физики и Астрономіи. Ц. 50 к.

Посредствомъ хорошаго бинокля можно наблюдать спутниковъ Юпитера, пятна на лунѣ, нѣкоторыя двойныя звѣзды. Лучше будетъ годиться небольшой телескопъ съ увеличеніемъ отъ 50 до 100 разъ (стоитъ отъ 75 до 200 рублей). Телескопы съ большимъ увеличеніемъ стоятъ дорого и требуютъ установки на особыхъ каменныхъ столбахъ.

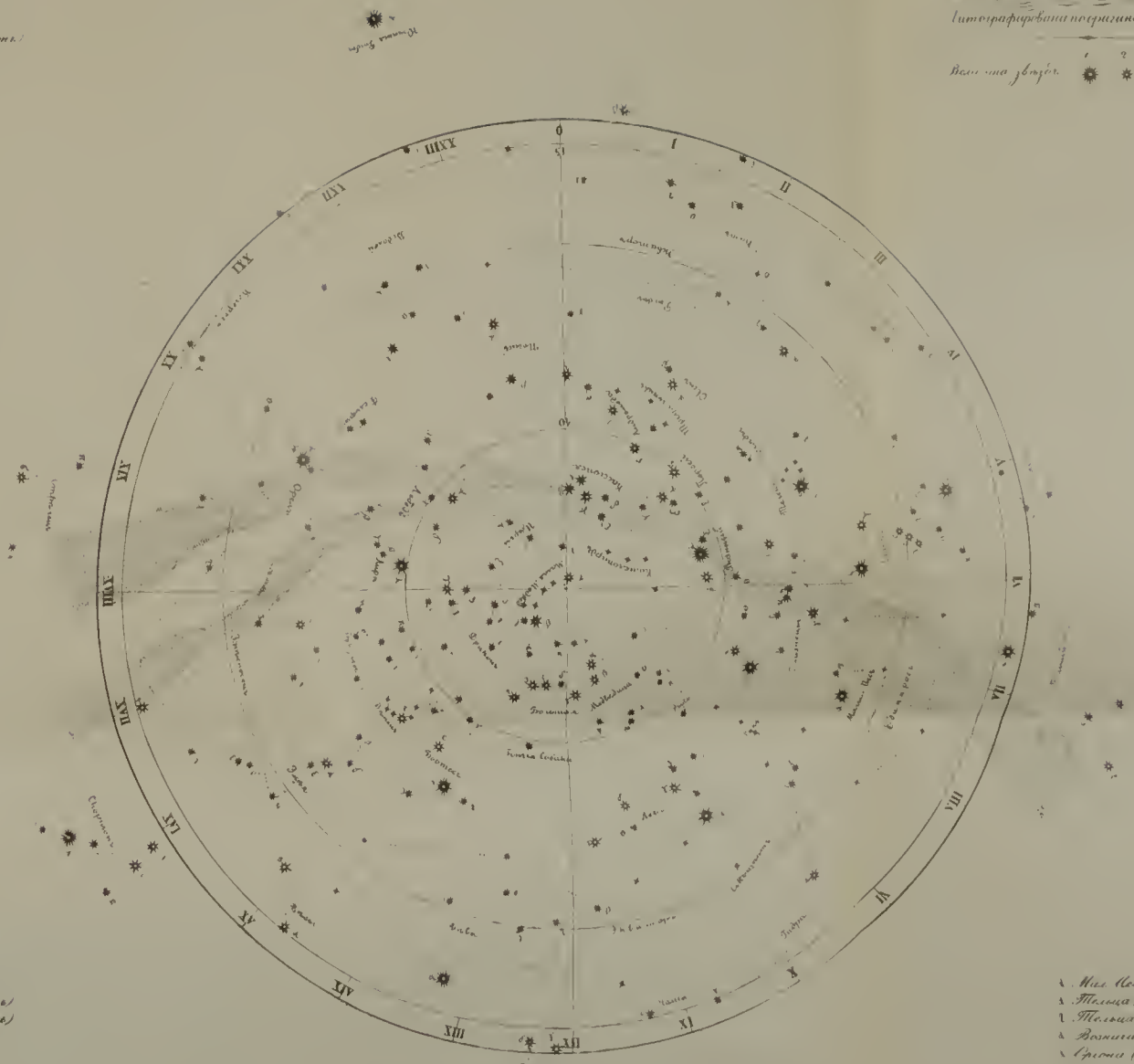
НАЗВАНІЯ ПЛАНЕТЪ.	Меркурій	Венера	Земля	Марсъ	Юпитеръ	Сатурнъ	Уранъ	Нептунъ	Солнце
ЗНАКИ ПЛАНЕТЪ.	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	♆	☉
Среднее разстояніе отъ солнца: въ радіусахъ земной орбиты	0,39	0,72	1	1,52	5,20	9,54	19,18	30,05	—
Среднее разстояніе отъ солнца: въ милліонахъ верстъ	54	101	139	212	725	1329	2673	4188	—
Среднее разстояніе отъ солнца: въ милліонахъ километровъ	58	108	149	227	777	1424	2864	4487	—
Эксцентриситетъ орбиты	0.206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,046	0,009	—
Продолжительность звѣзднаго оборота около солнца	88 дн.	225 дн.	1 годъ	1 годъ 322 дн.	11 л. 315 дн.	29 лѣтъ 167 дн.	84 года 7 дней	164 г. 280 дн.	—
Продолжительность синодическаго оборота	116 д.	584 дн.	—	780 дн.	399 дн.	378 дн.	369 дн.	367 дн.	—
Средвее суточное движеніе	4°5′	1°36′	0°59′	0°31½′	0°5′	0°2′	0°0′42″	0°0′22″	—
Средняя скорость въ секунду въ верстахъ	44	33	28	22	12	9	6½	5	—
Долгота перигелія въ 1910 г.	76°3′	130°17′	101°23′	334°24′	12°53′	91°17′	171°43′	46°53′	—
Долгота восходящаго узла въ 1910 г.	47°16′	75°52′	—	48°52′	99°33′	112°52′	73°32′	130°47′	—
Наклоневіе орбиты къ эклиптикѣ	7°	3°24′	—	1°51′	1°18′	2°30′	0°46′	1°47′	—
Наклоненіе оси вращенія къ плоскости орбиты	?	?	66°33′	65°8′	3°	25°42′	?	?	—
Экваторіальный діаметръ: въ діаметрахъ земли	0,38	0,997	1	0,53	11,14	9,36	4,26	3,82	109,3
Экваторіальный діаметръ: въ верстахъ	4500	11910	11958	6350	133000	112000	51000	46000	1305000
Экваторіальный діаметръ: въ километрахъ	4800	12700	12756	6770	142000	119400	54300	48800	1394000
Видимый діаметръ для земного наблюдателя: наибольшій	12″,9	65″,2	—	30″,4	49″,9	20″,7	3″,5	2″,9	32′36″
Видимый діаметръ для земного наблюдателя: наименьшій	4″,5	9″,5	—	4″,1	30″,4	15″,1	3″,2	2″,6	31′32″
Сжатіе у полюсовъ	0	0	$\frac{1}{290}$	$\frac{1}{190}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	—	—
Объемъ въ единицахъ объема земли	0,05	0,995	1	0,15	1305	733	71	56	1310157
Масса (вѣсъ) въ единицахъ земной массы	0,06	0,79	1	0,1	309,82	91,92	13,52	16,47	333432
Плотность принимая за единицу плотность земли	1,15	0,81	1	0,71	0,24	0,13	0,20	0,30	0,25
Плотность принимая за единицу плотность воды	6,32	4,44	5,50	3,91	1,33	0,70	1,07	1,65	1,36
Продолжительность оборота около оси въ средн. времени	88 дн.	24 ч.	23 ч. 56 м.	24 ч. 37 м.	9 ч. 56 м.	10 ч. 14 м.	?	?	25 дней
Число спутниковъ	—	—	1	2	8	10	4	1	—

ЗВѢЗДНАЯ КАРТА СѢВЕРНАГО НЕБА

Литографирована по оригиналу Проф. Федоренко

Величина звѣздъ: 1 2 3 4

- Лиры (Вега)
- Орла (Атаиръ)
- Лебедя (Денебъ)
- Пегаса (Маркабъ)
- Пегаса (Шеатъ)
- Кокрыбъ (Фомальгаутъ)
- Персея (Алгенибъ)
- Персея (Альголь)



- Близнецовъ (Касторъ)
- Близнецовъ (Поллуксъ)
- Льва (Регулъ)
- Льва (Денебола)
- Дѣвы (Спика)
- Боотеса (Арктуръ)
- Вѣнца (Гелма)
- Скорпіона (Антаресъ)

- Мал. Мед. (Полярная звѣзда)
- Тельца (Альдебаранъ)
- Тельца (Альшона)
- Возничаго (Капелла)
- Ориона (Бетелгейза)
- Ориона (Ригель)
- Большаго Пса (Сиріусъ)
- Малаго Пса (Прошонъ)

Планеты.	спутники.	Кто открылъ спутника.	Годъ открытія.	Годичная полуось орбиты въ радіусахъ планеты.	Время обращенія около планеты.	Наклонъ орбиты спутника къ орбитѣ планеты.	Діаметръ спутника въ верст. (приблиз.)
Марсъ.	I Фобосъ	Голль	1877	2,70	7½ ч.	27°28′	52
	II Деймосъ	Голль	1877	6.74	1 д. 6 ч.	27°24′	15
Юпитеръ.	I Іо	Галилей и Маріусъ	1610	5,93	1 д. 18 ч.	2°8′	3800
	II Европа			9,44	3 дн. 13 ч.	1°39′	3200
	III Ганимедъ . . .			15,06	7 дн. 4 ч.	2°	5400
	IV Каллисто . . .			26,49	16 дн. 17 ч.	1°57′	4000
	V —	Барнаръ	1892	2,55	12 ч.	2°20′	—
	VI —	Перринъ	1904	160	251 д.	28°56′	—
	VII —	Перринъ	1905	167	265 дн.	31°	—
	VIII —	Меллотъ	1908	357	739 дн.	0°33′	—
Сатурнъ.	I Мимасъ	Гершель	1789	3,07	22½ ч.	27°29′	—
	II Энцелядъ			3,94	1 д. 9 ч.	28°4′	—
	III Фетида		1684	4,87	1 д. 21 ч.	28°40′	—
	IV Діона	Кассини	1684	6.25	2 дн. 18 ч.	28°4′	—
	V Рея		1672	8,73	4 дн. 12 ч.	28°22′	—
	VI Титанъ	Гюйгенсъ	1655	20,22	15 дн. 23 ч.	27°39′	3300
	VII Гиперіонъ	Бондъ	1848	24,49	21 д. 7 ч.	29°15′	300 (?)
	VIII Япетъ.	Кассини	1671	58,91	79 дн. 8 ч.	18°28′	—
	IX Фебея	Пикерингъ	1898	214	550 дн. 11 ч.	175°5′	—
	X Фемида	Пикерингъ	1904	24,2	20 дн. 20 ч.	39°6′	—
Уранъ.	I Аріель	Лассель	1851	7,04	2 дн. 12 ч.	97°58′	—
	II Умбріель	Лассель	1851	9,91	4 дн. 3 ч.	98°21′	—
	III Титанія	Гершель	1787	16,11	8 дн. 17 ч.	97°47′	909
	IV Оберонъ	Гершель	1787	21,54	13 дн. 1 ч.	97°54′	800
Спутникъ НЕПТУНА. . .		Лассель	1846	14 73	5 дн. 21 ч.	142°40′	3400

XI.

Греческія буквы, которыми обозначаются въ астрономіи неподвижныя звѣзды въ созвѣздіяхъ.

α — альфа	η — эта	ν — ню	τ — тау
β — бэта	ϑ — тэта	ξ — кси	υ — ипсилонъ
γ — гамма	ι — іота	ο — омикронъ	φ — фи
δ — дельта	κ — каппа	π — пи	χ — хи
ε — эпсилонъ	λ — ламбда	ρ — ро	ψ — пси
ζ — дзета	μ — мю	σ — сигма	ω — омега

Латинскій алфавитъ.

A, a — а	F, f — ефъ	K, k — ка	P, p — пе	U, u — у
B, b — бе	G, g — г	L, l — ель	Q, q — ку	V, v — ве
C, c — це	H, h — ха	M, m — емъ	R, r — еръ	X, x — иксъ
D, d — де	J, i — и	N, n — енъ	S, s — есъ	Y, y — игрекъ
E, e — е	j — й	O, o — о	T, t — те	Z, z — зетъ

Указатель словъ и названій, встрѣчающихся въ математическомъ полутомѣ.

Абберація—301.
Абсолютная погрѣшность—22.
Абсолютное значеніе—26, 28, 33, 120.
Абсолютное движеніе—190, 205.
Абсцисса—128.
Адамсъ—332.
Адріанъ Меція—149.
Азимутъ—257, 258.
Акварпды (звѣздн. потокъ)—340.
Аксіома—62, 72.
Алгебра—35.
Алгебраическая сумма—31, 38.
Алгебраическая формула—36.
Алгебраическое выраженіе—36, 103.
Алидада—186.
Альголь (звѣзда)—342.
Альдебаранъ (звѣзда)—342.
Алькоръ (звѣзда)—344.
Альмагеста—280.
Альпы (лунныя)—314.
Альтазимутъ—289.
Аналитическая геометрія—117.
Андромеда (туманность)—340, 345.
Аномалистическій годъ—306.
Антоніадп—327.
Апеннины (лунныя)—314.
Апогей—265, 269.
Апофема—92.
Аріель (спутн. Урана)—332, 355.
Арктуръ (звѣзда)—341.
Арифметика—1.
Арифметическая прогрессія—48.
Арифметическое дѣйствіе—6, 21, 36.
Архимедъ—148.
Ассимптота—136.
Астероиды—323.
Астрея (планета)—329.
Астрологія—247.
Астрономія—246.
Астрономическая обсерваторія—289.
Атмосфера — 295.
Атмосфера Венеры—326.
Атмосфера, или газовая оболочка Солнца—321.
Афелій—282, 283, 301.
Аэролиты или Муранолиты—339.
Барнаръ—355.
Безконечно-малый—145. 151, 213.
Безмѣнъ—223.
Безразличное равновѣсіе—217.
Бессель—300, 337, 344.
Близнецы (созвѣздіе)—264, 332.
Блокъ—224.
Блокъ неподвижный—224.
Бодэ—328.
Болиды, или огненные шары—339.
Боковая поверхность цилиндра—98.
Боковая грань—96.
Большая Медвѣдица (созвѣздіе) — 256. 341.
Большая ось—132, 285.
Больше—5.
Большой кругъ—99, 257.
Бондъ—355.
Бороздки (лунныя)—314.
Брадлей—300, 305.
Бредихинъ—337.
Буквенный множитель—37.
Ванька-встанька—217.
Вега (звѣзда)—300, 341, 342.
Венера (планета) — 279, 280, 282, 307 323, 328. 343.
Вертикальный кругъ или вертикалъ—257.
Верхнія планеты—279.
Верхнее основаніе призмы—96.
Верхнее основаніе цилиндра—98.
Вершина конуса—98.
Вершина многогранника—95.
Вершина параболы—137.
Вершина пирамиды—97.
Вершина треугольника—64.
Вершина угла—60, 95.
Вершина четыреугольника—82.
Вершина эллипса—133, 138.
Веста (планета)—329.
Вечерняя звѣзда—279.
Взаимно перпендикулярныя прямыя—61.
Видимыя движенія планетъ—278.

Винтъ—229.
Винтовый шагъ—229.
Високосный годъ—276.
Внутренній уголъ—69.
Внутренность земного шара—294.
Внутренняя полутѣнь—272.
Внѣшній видъ кометъ—333.
Внѣшній видъ Луны—267.
Внѣшній уголъ—69.
Внѣшняя полутѣнь—272.
Водолей (созвѣздіе)—264.
Водяной нивеллиръ—187.
Возвышеніе въ степень—19.
Возмущенія планетъ—286.
Возрастающая функція—120. 157.
Вольфъ—329.
Воротъ—226.
Востокъ—252.
Вращеніе Земли вокругъ оси—296.
Время обращенія Луны—269.
Всемірное тяготѣніе—283.
Выпуклость Земли—249.
Высота конуса—98.
„ наклонной плоскости—227.
„ пирамиды—97.
„ призмы—96.
„ свѣтила—257.
„ треугольника—64.
„ цилиндра—98.
Вычисленіе объемовъ—99.
„ площадей—88.
Вычитаемое—10, 29, 30.
Вычитаніе—10, 17, 29.
Вѣрность вѣсовъ—222.
Вѣсы—222, 264.
Вѣсы десятичные—223.
„ римскіе—223.
Вѣсъ тѣла—214.
Вѣхи—177.
Вѣчный двигатель—242.
Вѣшеніе—177.
Галилей—192, 230, 233, 280, 317, 331, 355.
Галле—338.
Галлей—309, 334, 341.
Галль—328.
Ганимедъ (III) (спутн. Юпитера)—330, 355.
Гардингъ—329.
Гауссъ—329.
Гексаэдръ—97.
Географическая долгота—292.
Географическая широта—292.
Географическій меридіанъ—291.
Геометрія въ пространствѣ—92.
Геометрія Лобачевскаго—72.
Геометрія на плоскости—58.
Геометрическая фигура—58.
Геометрическая аксіома—72.
Геометрическое значеніе производной—155.
Геометрическое тѣло—58, 95.
Геркулесъ (созвѣздіе)—317, 341.
Гершель—255, 328, 332, 341, 355.
Гидродинамика—195.
Гидростатика—195.
Гипербола—135, 137, 285.
Гиперболоиды—139.
Гиперболическій параболоидъ—141.
Гиперіонъ—355.
Гипотенуза—64.
Гиппархъ—343.
Главная ось—140.
Главное сѣченіе—138.
Годичный параллаксъ звѣздъ—300, 310, 341.
Годовой множитель учета—53.
Голль—355.
Гончихъ Собакъ (туманность)—346.
Горизонтальный параллаксъ—307.
Горизонтъ—248.
Горловой эллипсъ—140.
Градусное измѣреніе—294.
Градусъ—85, 256.
Гражданскій мѣсяцъ—278.
Грани угла—95.
Графическое изображеніе силы—206.
Графическое представленіе функцій—122.
Григоріанское лѣтосчисленіе—277.
Григорій XIII (папа)—277.
Группа—5.
Гюйгенсъ—331, 355.
Дарвинъ—351.
Движеніе—190.
„ абсолютное—190.
„ относительное—190.
„ переносное—205.
„ поступательное—201.
Движеніе звѣздъ—340.
„ собственныя—341.
„ кажущіяся—341.
Движеніе Луны—267. 311.

Движеніе небесныхъ свѣтилъ—233.
„ планетъ—278.
Движеніе равномѣрно-перемѣнное—193.
„ Солнца—260, 315.
„ Солнца между звѣздами—260.
„ твердаго тѣла—201.
„ точки—195.
„ перемѣнное—195.
„ равномѣрное—195.
Двойныя звѣзды—342.
Двуполый гиперболоидъ—140.
Двугранный уголъ—93.
Деймосъ—328, 355.
Декартова система координатъ—127, 137.
Деламбръ—294.
День весенняго равноденствія—261.
День лѣтняго солнцестоянія—262.
День осенняго равноденствія—262.
Десятичная дробь—21.
Деферентъ—280.
Динамика—195.
Динамометръ—193.
Директриса—137.
Дифференціалъ—153, 155.
Дифференціальное исчисленіе—151.
Діагональ—82.
„ параллелограма—205.
„ прямоугольника—204.
Діаметральная плоскость—99.
Діаметръ окружности—83.
Діаметръ шара—99.
Діона—355.
Діоптры—181.
Длина математическаго маятника—242.
„ наклонной плоскости—227.
Длина окружности—147.
Додекаэдръ—97.
Долгота восходящаго узла—324.
Донати—336.
Допплеръ—341.
Драконическій мѣсяцъ—269.
Драконъ (созвѣздіе)—300.
Дробное число—14.
Дробный показатель—26.
Дробь—14.
„ десятичная—21.
Дѣва—264.
Дѣйствіе избавленія отъ радикаловъ—134.
Дѣленіе—12, 20.
Дѣленіе Кассини—331.
Дѣлимое—12.
Дѣлимость—14, 20.
Дѣлитель—12.
Европа (II) (спутникъ Юпитера)—330, 355.
Единица высшаго разряда—3.
Зависимость между силами и движеніями—230.
Законъ большихъ чиселъ (теорема Бернулли)—170.
Законъ движенія точки—191.
„ живыхъ силъ—240.
„ перемѣстительный—6. 17, 29, 33.
„ равенство дѣйствія противодѣйствію—236.
„ сохраненія энергіи—240.
„ сочетательный—6, 29, 34.
Замкнутая поверхность—250.
Западъ—252.
Затменія лунныя—270, 273.
„ солнечныя—270, 273.
„ спутниковъ Юпитера—331.
Звѣздное небо—252.
Звѣздный годъ—264, 276.
Звѣздныя сутки—274.
Звѣздныя кучи—345.
Звѣздныя туманности—345.
Звѣзды—341, 342, 344.
Землемѣріе—58, 175.
Земная ось—305.
Земной меридіанъ—254, 260.
Земной экваторъ—259, 291.
Земля—246, 290, 315, 323, 328, 347.
Зенитное разстояніе свѣтила—257.
Зенитъ—248, 257.
Зерно фотосферы—321.
Змѣеносецъ (созвѣздіе)—343.
Зодіакальный свѣтъ—321, 322.
Зодіакальныя созвѣздія—263.
Зодіакъ—263.
Знакъ дѣленія—12.
„ неравенства—5 и 6.
„ суммы—28.
Знаменатель—15.
Извлеченіе корня—13.
Измѣреніе вписаннаго угла—85.
Измѣреніе временн—275.
Измѣреніе линій—177.
Измѣреніе отрѣзковъ—76.
Измѣреніе разстояній небесныхъ тѣлъ—307.

Измѣреніе силы въ единицахъ вѣса—193.
Изохронность—242.
Икосаэдръ—97.
Инертность—235.
Инерція—230, 234.
Интегралъ—158.
Интегральное исчисленіе—151, 158.
Интерполированіе—130, 142.
Ирраціональное число—24.
Истинная скорость—197.
Истинное ускореніе точки—199.
Истинныя солнечныя сутки—275.
Io (I) (спутн. Юпитера)—330, 355.
Кавальери—151.
Кавендишъ—295.
Кавказъ (лунный)—314.
Календарь—275.
Каллисто (IV) (спутникъ Юпитера) 330, 355.
Каналы Марса—327.
Кантъ—346.
Карпаты (лунныя)—314.
Карта и планъ—175.
Касательная—83.
Касательная плоскость—99.
Касательное ускореніе—200.
Кассини—331, 355.
Кассіопея (созвѣздіе)—343.
Катетъ—69.
Квадратура—268.
Квадратъ—82, 120.
Квадратъ алгебраической суммы двухъ чиселъ—39.
Кеплеръ—192, 234, 280, 282, 283, 334, 343.
Килограммометръ—237.
Километръ—294.
Кинематика—194.
Китъ (созвѣздіе)—342.
Клавіусъ—314.
Клинъ—228.
Козерогъ (созвѣздіе)—264, 333.
Кольцеобразное затменіе—270.
Кольцеобразныя туманности—346.
Кольцо Сатурна—331.
Колья—177.
Кометы—333, 335, 336, 338, 339
Комплексный корень—46.
Конецъ міровъ—346.
Коническая поверхность—98.
Коническое сѣченіе—137.
Конусъ—150.
Координатныя оси—127, 137.
Координаты въ пространствѣ—137.
Координаты на плоскости—127, 128.
Коперникъ—278, 280, 281, 299, 314.
Корень уравненія—44.
Короній—322.
Косинусъ угла—111.
Косность—235.
Коэффиціентъ 37, 40.
Кратеры (лунные)—313.
Кратное—12.
Криволинейное движеніе—195.
Криволинейное тѣло—97.
Кривая линія—127, 137.
Круглая цилиндрическая поверхность—98.
Круглый конусъ—98.
Круглый цилиндръ—98.
Кругосвѣтное путешествіе—250.
Кругъ высоты свѣтила—257.
Кругъ склоненія свѣтила—257, 258.
Кубическая парабола—129.
Кубъ—96, 99.
Кульминація звѣзды—254.
Лакайль—308.
Лаландъ—308.
Лапласъ—346.
Лассель—355.
Лебедь (созвѣздіе)—300, 342, 343.
Леверье—332.
Левъ—264.
Лейбницъ—151.
Леониды (звѣздн. потокъ)—340.
Либрація 312.
Луна—306, 311, 347.
Линейный уголъ—93.
Линза—286.
Линія узловъ—324.
Лира (туманность)—317, 346.
Лириды (звѣздн. потокъ)—340.
Логарифмъ—13, 116.
Лунныя горы—313.
Лунныя моря—313.
Лѣво-параллельная линія—74.
Малая Медвѣдица—302.
Малая ось—132.
Малыя планеты—279, 328.
Маріусъ—355.
Марсъ—279, 282, 283, 306, 323, 326, 328, 347.

Масса—230, 233.
Масштабъ—177.
Математика—1.
Математическая индукція—49.
Математическій маятникъ—242.
Математическое ожиданіе—171.
Маятникъ—242, 298.
„ фуко—298.
Мгновенная винтовая ось тѣла—204.
Мгновенная угловая скорость тѣла—203.
Медіаны—214.
Мейеръ—347, 352.
Меллотъ—355.
Мензула—186.
Меньше—5.
Меридіанный кругъ—288.
Меркурій—279, 281, 282, 307, 323, 325, 328, 335.
Метеорологія—339.
Метеоры—333, 339.
Метръ—294.
Мешенъ—294.
Мимасъ—355.
Минусъ—10.
Минута—85, 256.
Мира (звѣзда)—342.
Мицаръ (звѣзда)—344.
Млечный путь—255, 345.
Мнимая величина—46.
Мнимый корень—46.
Многогранникъ—95.
Многогранный уголъ—95.
Многоугольникъ—82,
Многочленъ—39.
Множимое—7.
Множитель—7.
Молотъ—245.
Моментъ силы—212, 221.
Море Дождей—313.
Море Ясности—313.
Мощность—237, 239.
Мультонъ—351.
Мускульная сила—193.
Мѣрная лента—178.
Мѣрная цѣпь—179.
Мѣсяцъ—269.
Надиръ—257.
Наибольшее значеніе—157.
Наименьшее значеніе—157.
Наименьшее кратное—16.
Наклоненная плоскость—241.
Накрестлежащіе углы—70.
Направленіе силы—206.
Направляющая—97.
Натуральный рядъ чиселъ—4 и 47.
Натяженіе веревки (сила)—206.
Наука о свойствахъ пространства—59.
Начало координатъ—127, 137.
Небесная механика—195.
Небесная сфера—247, 292.
Небесный меридіанъ—254, 291.
Небесный сводъ—247.
Небесный экваторъ—254, 257, 291.
Небесныя свѣтила—246.
Небо—246, 259.
Невосходящая звѣзда—254.
Невклидова геометрія—76.
Незаходящая звѣзда—254.
Неоднородное тѣло—214.
Неопредѣленность—13.
Неопредѣленный интегралъ—161.
Неподвижная звѣзда—255, 256, 340.
Неправильная дробь—19.
Неправильная туманность—346.
Непрерывная функція—151.
Нептунъ (планета) 279, 306, 315, 323, 332, 347, 348.
Неравенство—6.
Несоизмѣримое число—24.
Несоизмѣримые отрѣзки—77.
Неустойчивое равновѣсіе—217.
Нивеллированіе—187.
Нивеллиры—187.
Нижнее основаніе призмы—96.
Нижнее основаніе цилиндра—98.
Нижнее соединеніе—279.
Нижнія планеты—279.
Никейскій соборъ—277.
Новолуніе—267.
Новая звѣзда—642.
Номеръ—5.
Нуль—4.
Нумерація—4.
Нутація—305.
Ньюкомъ—327.
Ньютонъ—151, 195, 223, 283, 334.
Оберонъ (спутн. Урана)—332, 355.
Образующая—97.
Обратное дѣйствіе—11.
Обратное отношеніе—43.
Обсерваторія—286, 287, 288, 290, 317.
Общій знаменатель—16, 17.

Объективъ—286.
Объемы и поверхности геометрическихъ тѣлъ—150.
Объемъ параллелопипеда—101.
Объемъ призмы—102.
Овенъ—264.
Огненные шары, или болиды—339.
Одноименные многоугольники—88.
Однополый гиперболоидъ—140.
Одночленъ—37, 38.
Окружность—83, 132.
Октаэдръ—97.
Окуляръ—286.
Ольберсъ—329.
Опредѣленіе вычитанія—29, 30.
„ вѣроятностей—162.
„ положенія звѣзды на небесномъ сводѣ—256.
Опредѣленія положенія точки на земномъ шарѣ—290.
Опредѣленіе функціи—118.
Опредѣленный интегралъ—159.
Орбита Земли—305, 309.
Орбита Луны—269.
Орбиты планетъ—323, 325.
Ордината—128.
Ордината въ началѣ—131.
Ось эллипса—138.
Основаніе конуса—98.
Основаніе логарифмовъ—14.
Основаніе пирамиды—97.
Основаніе системы счисленія—3.
Основаніе степени—10.
Основаніе треугольника—64.
Основанія геометріи—62.
Остатокъ—12.
Острый уголъ—62.
Ось абсциссъ—128.
Ось, или магистраль вѣшенія—184.
Ось міра—257.
Ось ординатъ—128.
Ось склоненія—287.
Отблескъ—323.
Отвѣсное направленіе—206.
Отливъ—306.
Относительная погрѣшность—24.
Относительные размѣры Солнца и планетъ—315.
Отношеніе—42.
Отрицательное число—26, 27, 34.
Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ—95.
Падающія звѣзды—339.
Пализа (астрономъ)—329.
Паллада—329.
Парабола—127, 136, 137, 285.
Параболическое интерполированіе—144.
Параболоидъ—141.
Параметръ—137.
Параллаксъ годичный—310.
Параллаксъ горизонтальный—307, 308.
Параллаксъ звѣзды—340.
Параллаксъ свѣтила—307.
Параллелограмъ—82.
Параллелопипедъ—96.
Параллельный кругъ—253.
Параллельныя Лобачевскаго—74.
Параллельныя плоскости—93.
Параллельныя прямыя—68, 70, 73, 112.
Пара силъ—213.
Паровая лошадь—239.
Пассаты—297.
Первая четверть луны—267.
Перемѣнная величина—117, 145.
Перемѣнная звѣзда—342.
Перенумеровать—5.
Перигей—265, 269, 311.
Перигелій—285, 335.
Периметръ—82, 88, 92.
Періодическая дробь—22.
Перпендикуляръ—61.
Перринъ—355.
Персеиды—339.
Пикерингъ—355.
Пирамида—96, 97.
Пифагоръ—8.
Піацци—328.
Планетная туманность—346.
Планеты—256, 279, 323.
Плеяды (звѣздн. кучи)—345.
Плоскій уголъ—95.
Плоскость—137.
„ горизонта—257.
„ меридіана—257.
Плотность—295.
Площадь круга—149.
„ опоры—216.
„ параллелограма—90.
„ правильнаго многоугольника—91.
„ прямоугольника—90.
„ трапеціи—91.
„ треугольника—91.

Плюсъ—6.
Поверхность—59.
„ второго порядка—137.
„ земного шара—294.
Погрѣшность—93.
Подобіе треугольниковъ—80.
Подобные одночлены—38.
Пожизненная рента—57.
Показатель корня—13.
Показатель степени—10, 37.
Покрытіе звѣздъ Луною—270, 279.
Полное затменіе—270.
Полнолуніе—267, 278.
Положительное число—26, 34.
Полугодовой множитель учета—55.
Полуденная линія—254, 257.
Полутѣнь—271.
„ солнечнаго пятна—317.
Полюсы—253, 257, 259, 291, 316.
Полюсы Марса—327.
Полярная звѣзда—256, 342.
Поры солнца—319.
Послѣдняя четверть луны—267.
Постоянная величина—117, 145.
Постулатъ Эвклида—69, 73, 75.
Поступательное движеніе тѣла—201.
Правило параллелограма силъ—209.
Правило вычитанія—11, 31.
„ дѣленія—35.
„ знаковъ при сложеніи отрицательныхъ чиселъ—28.
„ умноженія—37.
Правильная дробь—19.
„ пирамида—97.
Правильный многогранникъ—86.
Правильный треугольникъ—64, 66, 67.
Право-параллельная линія—74.
Празднованіе Пасхи—278.
Предвареніе равноденствія—263, 264, 304.
Прецессія—304.
Приближенное вычисленіе—22.
„ значеніе числа—22.
„ интерполированіе—144.
Приведеніе къ общему знаменателю—16, 17.
„ подобныхъ членовъ—39.
Призма—96.
Приливъ—306, 350, 351.
Приложеніе алгебры къ геометріи—103.
Провѣшить—178.
Прогрессія—47.
Произведеніе—7.
„ алгебраической суммы на разность—39.
„ отрицательнаго числа на положительное число—32, 33.
„ положительнаго числа на положительное число—32.
Производная—153.
„ интеграла—159.
Происхожденіе міра—346.
Пропорціональные отрѣзки—78.
Пропорція—43.
Простой годъ—276.
Простые проценты—51.
Простая машина—224.
Противостояніе, или оппозиція—268, 279.
Протуберанцы—319.
Профиль—189.
Процентъ—51.
Прямая линія—59, 130, 137, 138.
„ пирамида—97.
„ призма—96.
Прямое восхожденіе свѣтила—257, 258.
Прямое движеніе—278.
Прямой круговой конусъ—98.
„ параллелопипедъ—96.
„ уголъ—61.
„ цилиндръ—98.
Прямолинейное интерполированіе—143.
Прямоугольникъ—82.
Прямолинейный параллелопипедъ—96.
Прямыя и плоскости—92.
Птоломей—280, 341.
Пуанкаре—234, 349.
Пудофутъ—237.
Путь точки—190.
Равенство—5, 41.
Равенство треугольниковъ—64, 65, 67.
Равенство угловъ—69, 71, 95.
Равнобедренный—64.
Равнобедренный треугольникъ—64, 66.
Равновеликія фигуры—89, 99.
Равновѣсіе силъ—193, 207, 209, 211, 212.
Равнодѣйствующая сила—207, 208, 211.
Равномѣрное вращеніе тѣла—202.
Равномѣрное движеніе—195.
Равносторонній треугольникъ—64.
Равные треугольники—64, 65, 67.
Радикалъ—25.

Радіантъ звѣзднаго потока—340.
Радіусъ—83.
Радіусъ векторъ—283.
„ Земли—308.
„ кривизны—200.
„ шара—99.
Разложеніе параллельныхъ силъ—218.
„ силъ—195.
Разность—10, 29.
„ прогрессіи—48.
„ угловъ—61.
Разстояніе до звѣздъ—259.
„ Солнца отъ Земли—265.
Ракъ (созвѣздіе)—264, 345.
Распредѣлительный законъ для умноженія относительно вычитанія—11.
Распредѣлительный законъ для умноженія относительно сложенія—8.
Реакція—193.
Ребро угла—95.
Рента—57.
Рефлекторъ—286.
Рефракторъ—286.
Рефракція—265.
Рея—355.
Ромбъ—82, 110.
Рыбы (созвѣздіе)—264, 302, 324.
Рычагъ—219, 241.
„ двуплечный—220.
Рѣшеніе геометрическихъ задачъ—103. 106.
Рѣшеніе треугольниковъ—116.
Рѣшеніе уравненій—44.
Рядъ чиселъ—24, 25.
Сантиметръ—294.
Саросъ—274.
Сатурнъ—279, 296, 306, 315, 323, 328, 331, 332, 334, 347, 348.
Свѣтовой годъ—342.
Сегментъ—84.
Секторъ—83.
Секунда—85, 256.
Секундный маятникъ—242.
Сп—351.
Сидерическій мѣсяцъ—269.
Сила—193, 206, 207, 212.
„ инерціи—237, 239.
„ равнодѣйствующая—193, 207, 208, 211, 212.
„ сопротивленія руки—193.
„ тренія—193.
Сила тяжести—193.
„ упругости—244.
„ центробѣжная—236, 298.
„ центростремительная—236.
Силомѣръ—193.
Силы параллельныя—211.
„ приложенныя къ одной точкѣ—206.
„ составляющія—207, 209, 212.
Символъ—13.
Синодическій мѣсяцъ—267, 270.
Синусъ угла—111.
Спріусъ (звѣзда)—342, 344.
Система блоковъ—225.
Система координатъ—127.
Система міра—278, 280.
Скорость переноснаго движенія—205.
Скорость движенія солнца—265.
„ „ точки—195.
„ средняя—196, 197.
Скорпіонъ (созвѣздіе)—264.
Слагаемое—6.
Сложеніе—6, 17, 27.
„ вѣроятностей—165.
„ движеній—204, 205.
„ отрицательныхъ чиселъ—27.
„ силъ—195.
Сложные проценты—53.
Слѣдъ прямой—93.
Смежный уголъ—60.
Смѣшанное число—19.
Соединеніе—268.
Созвѣздія—328, 332, 333, 341, 342 343, 345, 346.
Сопзмѣримые отрѣзки—77.
Солнечная корона—271, 321.
Солнечныя грануляціи—310.
„ поры—319.
„ пятна—315.
„ факелы—318.
Солнце—306, 314, 317, 347.
Соотвѣтственные углы—70.
Сопряженныя выраженія—47.
Составляющая сила—207, 209, 212.
Спектроскопъ—321.
Спектръ кометъ—290, 337.
„ солнца—290.
Спиральная туманность—346, 351.
Спутники планетъ—328, 332, 333, 355.
Среднее солнце—275.
Среднія сутки—275.

Среднее ускореніе точки—199.
Статика—195.
Степень—10.
Сторона треугольника—64.
„ угла—60.
Стороны четыреугольника—82.
Страхованіе—173.
Строеніе кометъ—336.
„ солнца—321.
Струве—300.
Стрѣлецъ—264.
Сумма—6, 17, 27, 28.
„ угловъ—61.
Суточная параллель свѣтила—257.
Суточное вращеніе небеснаго свода—252.
Суточное двпженіе солнца—266.
Сферическая проекція—175.
Сходственныя стороны—80.
Счетъ—1. 5.
Счисленіе—4.
Съемка—177.
Сѣверное полушаріе—259, 291.
Сѣверный полюсъ земли—259.
„ „ міра—253, 257.
„ „ неба—302.
Сѣверный полярный кругъ—269.
Сѣверъ—253.
Сѣкущая—83, 99.
Таблица Пифагора—8.
Таблица смертности—58.
Тангенсъ угла—112.
Телескопъ—286.
Телецъ (созвѣздіе)—264, 328. 345.
Температура солнца—314.
Теодолитъ—289.
Теорема Бернулп (законъ большихъ чиселъ)—170.
Теорема Пифагора—81.
Теоретическая механика—190, 194.
Теорія вѣроятностей—162.
Теорія захвата—351.
Теорія предѣловъ—145.
Терминаторъ—97.
Тетраэдръ—97.
Типы кометныхъ хвостовъ—337.
Титанія (спутн. Урана)—332, 355.
Тихо Браге—280, 282, 313, 343.
Тиціусъ—328.
Тождество—43.
Топографія—176.
Точка—59.
„ весенняго равноденствія—257, 261, 302.
„ востока—257, 261.
„ восхода свѣтила—257.
„ заката—257.
„ запада—257.
„ кульминаціи—257.
„ осенняго равноденствія—262, 302.
„ сѣвера—257.
„ юга—257.
„ округленія—139.
Траекторія точки—190.
Транспортиръ—85.
Трапеція—82.
Треугольникъ—64.
Трещина (лунная)—314.
Тригонометрическая величина—111, 112.
Тригонометрія—111.
Трисекція угла—109.
Титанъ—355.
Тріангуляція—294.
Тропикъ Козерога—262, 267, 304.
„ Рака—262, 267, 304.
Тропическій годъ—264, 267.
Туманность—346.
Туманныя звѣзды—346.
Тупой уголъ—62.
Тѣнь—271.
„ солнечнаго пятна (ядро)—317.
Тяжелое тѣло—193.
Убывающая функція—121, 157.
Угловая скорость—202, 203.
Угловой коэффиціентъ—131.
Уголъ—60.
Угольникъ—106.
Ударъ—244.
Удвоеніе куба—199.
Удѣльный вѣсъ—295.
Узлы восходящіе и нисходящіе—269.
Умбріель (спутн. Урана)—332, 355.
Умен шаемое—10, 29, 30.
Умноженіе—7, 17, 18, 31, 33.
„ вѣроятностей—166.
Универсальный инструментъ—289.
Уравненіе—44, 121, 129, 137, 138.
„ времени—276.
„ второй степени—44.
„ первой степени—44.
„ прямой линіи—130.
Уранолиты или аэролиты—339

Уранъ—279, 306, 315, 323, 328, 332, 347, 348.
Ускореніе силы тяжести—201, 232, 236, 243.
Ускореніе точки—199.
„ „ касательное—200.
„ „ полное—200.
„ центростремительное—200.
Условія равенства треугольниковъ—64, 65, 66, 67.
Устойчивое равновѣсіе—217.
Утренняя заря—252.
Утренняя звѣзда—279.
Фабрицій—317.
Фазы луны—267.
Фай—348.
Фебея—355.
Фемида—355.
Ферма—151.
Фетида—355.
Физическій маятникъ—244.
Фобосъ—328, 348.
Фокусъ—137.
Фотографія солнца—318.
Фотосфера—319, 321.
Фуко—298.
Функція—117, 125, 151.
Хвостъ кометы—333.
Хорда—83.
Хромосфера—319, 321.
Хронометръ—289.
Центавръ (звѣзда)—342.
Центральный уголъ—84.
Центробѣжная сила—236, 298.
Центръ—83, 99, 133, 138, 140.
Центръ небесной сферы—257.
„ тяжести—213, 214.
„ эллипса—133.
Церера—329.
Циклоидъ—297.
Цилиндрическая поверхность—98.
Цилиндръ—150.
Цирки (лунныя)—313.
Циркуль—83.
Цифра—3.
Цѣлое число—14.
Часовая ось—287.
Частное—12, 20.
Части неравенства—6.
Части равенства—5.
Часы съ маятникомъ—289.
Чемберлинъ—351.
Черулли—327.
Четвертый пропорціональный отрѣзокъ—79.
Четыреугольникъ—82.
Числа противоположныя—29.
Числитель—15.
Число—1 и 5.
Числовая величина алгебраическаго выраженія—36.
Члены прогрессіи—48, 50.
Шарообразность земли—251.
Шаръ—99, 151.
Шейперъ—317.
Шестиугольникъ—86.
Экваторіалъ—287, 288.
Экваторъ—254, 259, 291.
Эккеръ—180.
Эклиптика—263, 302, 305.
Элементарная геометрія—58.
Эклиметръ—179.
Эксцентриситетъ—282.
Эллипсоидъ—138.
„ вращенія—139, 295.
Эллипсъ—132, 137, 140, 141, 282, 285.
Эллиптическій параболоидъ—141.
Эмпирическая функція—125.
Энергія—237, 238.
Энке (астрономъ)—335.
Энцелядъ—355.
Эпициклы—280.
Эросъ (планета)—329, 348.
Югъ—252.
Южное полушаріе—259, 291.
Южный полюсъ земли—259.
Южный полюсъ міра—253, 257.
„ „ неба—259, 302.
Юліанскій календарь—276.
Юлій Цезарь—276.
Юнона—329.
Юпитеръ—279, 283, 294, 296, 306, 315 323, 328, 329, 334, 343, 347.
Ядро кометы—333.
Ядро солнечнаго пятна (тѣнь)—317, 321.
Япетъ—355.
Ясли (звѣздныя кучи)—345.

Списокъ портретовъ и таблицъ, помѣщенныхъ въ математическомъ полутомѣ.

Стр.

Портретъ Лобачевскаго 74
Портретъ Ньютона 152
Портретъ Галилея 230
Портретъ Коперника 280
Портретъ Кеплера 282
Таблица I. Спектры небесныхъ тѣлъ 290
Таблица II. Поверхность луны 314
Таблица III. Фотографія луны около времени полнолунія 314
Таблица IV. Фотографія части лунной поверхности, съ луннымі апеннинами 314
Таблица V. Зодіакальный свѣтъ 322
Таблица VI. Фазы Венеры. Марсъ (по наблюденіямъ проф. Лоуэлля въ 1905 г.) 326
Таблица VII. Юпитеръ (по наблюденіямъ Кома-Сола въ 1904 г.) Сатурнъ . 330
Таблица VIII. Звѣздныя кучи. Туманности 346
Таблица IX. Элементы большихъ планетъ и солнца 354
Таблица X. Элементы спутниковъ 355
Таблица XI. Греческія буквы, которыми обозначаютъ въ астрономіи неподвижныя звѣзды въ созвѣздіяхъ 355
Латинскій алфавитъ 355
Звѣздная карта сѣвернаго неба 356

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страница.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
54	6 (снизу)	т.-е. обращается	т.-е. 1 рубль обращается
69	14 (сверху)	пастулатъ Эвклида	постулатъ Эвклида
97	9 (снизу)	Додкаэдръ	Додекаэдръ
280	6 (сверху)	см. табл. I.	см. табл. IX, на стр. 354.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

Общее предисловіе къ „Народной Энциклопедіи“ V
Предисловіе XXVII

МАТЕМАТИКА.

I. Ариѳметика.

1. О счетѣ. 1

2. Ариѳметическія дѣйствія.

1. Сложеніе. 6
2. Умноженіе 7
3. Возвышеніе въ степень 10
4. Вычитаніе . . . . . —
5. Дѣленіе 12
6. Извлеченіе корня. Логарифмъ. 13

3. Дробныя числа.

1. Опредѣленіе дробей. 14
2. Сложеніе и вычитаніе дробей 17
3. Умноженіе дробей . . . . . .
4. Дѣленіе дробей 20
5. Десятичныя дроби 21

4. Приближенныя вычисленія 22

5. Числа ирраціональныя 24

6. Отрицательныя числа.

1. Опредѣленіе 26
2. Сложеніе 27
3. Вычитаніе 29
4. Умноженіе 31
5. Дѣленіе 34

II. Алгебра.

1. **Алгебраическія выраженія и дѣйствія надъ ними** 35
2. **Равенства и уравненія.** 41
3. **Прогрессіи.** 47
4. **Вычисленіе процентовъ** 51

III. Элементарная геометрія.

I. Геометрія на плоскости.

1. **Геометрическія тѣла и фигуры** 58
2. **Углы** 60
3. **Треугольники** 64
4. **Параллельныя прямыя** 68
5. **Геометрическія аксіомы. Геометрія Лобачевскаго** 72
6. **Измѣреніе отрѣзковъ. Пропорціональные отрѣзки** 76
7. **Подобіе треугольниковъ** 80

Стр.

8. Многоугольники 82
9. Окружность. Измѣреніе угловъ 83
10. Правильные многоугольники 86
11. Вычисленіе площадей 88

II. Геометрія въ пространствѣ.

12. Прямыя и плоскости 92
13. Геометрическія тѣла 95
14. Вычисленіе объемовъ 99

III. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ.

1. Приложеніе алгебры къ геометріи 103
2. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ при помощи циркуля и линейки . . 106
3. Удвоеніе куба и трисекція угла 109

IV. Тригонометрія.

V. Аналитическая геометрія.

1. Функціи и ихъ изображеніе.
1. Постоянныя и перемѣнныя величины 117
2. Опредѣленіе функцій 118
3. Графическое представленіе функцій 122
2. Координаты на плоскости. Кривыя линіи.
1. Декартова система координатъ 127
2. Прямая линія 130
3. Окружность 132
4. Эллипсъ . . . . . —
5. Гипербола 135
6. Парабола 136
7. Коническія сѣченія 137
3. Координаты въ пространствѣ. Поверхность.
1. Декартова система. Плоскость. Прямая. Поверхности второго порядка. —
2. Эллипсоидъ 138
3. Гиперболоиды 139
4. Параболоиды 141

VI. Интерполированіе.

1. Опредѣленіе 142
2. Прямолинейное интерполированіе 143
3. Параболическое интерполированіе 144

VII. Теорія предѣловъ и ея приложенія.

1. Опредѣленіе 145
2. Длина окружности 147
3. Площадь круга 149
4. Объемы и поверхности геометрическихъ тѣлъ 150

VIII. Дифференціальное и интегральное исчисленіе.

1. Функціи непрерывныя и прерывныя 151
2. Производная и дифференціалъ 153
3. Геометрическое значеніе производной 155

Стр.
4. Приложенія производныхъ 156
5. Интегралъ и его свойства 158
6. Приложенія 161

IX. Теорія вѣроятностей.

1. Опредѣленіе вѣроятностей 162
2. Сложеніе вѣроятностей 165
3. Умноженіе вѣроятностей 166
4. Теорема Бернулли 170
5. Математическое ожиданіе 171
6. О страхованіи 173

ЗЕМЛЕМѢРІЕ.

1. Карта и планъ 175
2. Вѣшеніе и измѣреніе линій 177
3. Эккеръ и съемка имъ 180
4. Мензула 186
5. Нивеллированіе 187

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

1. О движеніи, времени и силахъ 190
2. Равномѣрное и перемѣнное движеніе точки 195
3. Движеніе твердаго тѣла 201
4. Силы, приложенныя къ одной точкѣ 206
5. Параллельныя силы 211
6. Центръ тяжести 213
7. Разложеніе параллельныхъ силъ 218
8. Рычагъ 219
9. Вѣсы 222
10. Простыя машины 224
11. Зависимость между силами и движеніями. Масса. Инерція. 230
12. Работа. Энергія. Мощность 237
13. Законъ живыхъ силъ и его приложенія 240
14. Маятникъ 242
15. Понятіе о силахъ упругости 244
16. Объ ударѣ . . . . . —

АСТРОНОМІЯ.

I. Небо и земля.

1. Первыя понятія. Начало астрономіи 246
2. Небесный сводъ. Форма земли 247

II. Звѣздное небо.

1. Суточное вращеніе небеснаго свода 252
2. Неподвижныя звѣзды и созвѣздія 255
3. Опредѣленіе положеній звѣздъ на небесномъ сводѣ 256
4. Небо мѣняется съ перемѣной мѣста на землѣ. Размѣры земли. Разстояніе до звѣздъ 259

III. Движеніе солнца.

1. Движеніе солнца между звѣздами 260

Стр.
2. Эклиптика и зодіакъ. Предвареніе равноденствій 263
3. Скорость движенія и разстояніе солнца отъ земли. Перигей и апогей . 265
4. Суточное движеніе солнца. 266
IV. Движеніе луны.
1. Внѣшній видъ луны. Фазы 267
2. Орбита луны, время обращенія, узлы, перигей и апогей 269
3. Покрытія звѣздъ луною. Затменія солнечныя и лунныя 270
V. Измѣреніе времени. Календарь. 275
VI. Движеніе планетъ.
1. Видимыя движенія планетъ. Система древнихъ. Коперникъ 278
2. Тихо Браге. Галилей, Кеплеръ 280
3. Ньютонъ. Всемірное тяготѣніе 283
VII. Телескопы и обсерваторіи. 286
VIII. Земля.
1. Опредѣленіе положенія точки на земномъ шарѣ 290
2. Величина земного шара, его поверхность и внутренность 294
3. Вращеніе земли вокругъ оси 296
IX. Движеніе земли вокругъ солнца 299
X. Измѣреніе разстояній небесныхъ тѣлъ 307
XI. Луна.
1. Движеніе луны вокругъ земли и вокругъ солнца 311
2. Величина луны. Устройство поверхности 312
XII. Солнце.
1. Величина, свѣтъ и температура солнца 314
2. Вращеніе и движеніе солнца 315
3. Солнце въ телескопѣ 317
4. Строеніе солнца. Зодіакальный свѣтъ 321
XIII. Планеты.
1. Орбиты планетъ 323
2. Меркурій. 325
3. Венера. 326
4. Марсъ . . . . . —
5. Малыя планеты 328
6. Юпитеръ. 329
7. Сатурнъ 331
8. Уранъ 332
9. Нептунъ . . . . . —
XIV. Кометы. Метеоры.
1. Внѣшній видъ и движеніе кометъ 333
2. Строеніе кометъ. 336
3. Небесные метеоры. Падающія звѣзды. Болиды. Аэролиты 339
XV. Неподвижныя звѣзды.
1. Движеніе и параллаксы звѣздъ 340
2. Перемѣнныя и новыя звѣзды. Двойныя звѣзды 342
3. Звѣздныя кучи и туманности 345
4. Происхожденіе и конецъ міровъ 346
Указатель словъ и названій, встрѣчающихся въ математическомъ полутомѣ. 356
Списокъ портретовъ и таблицъ, помѣщенныхъ въ математическомъ полутомѣ 366
Замѣченныя опечатки . . . . . —